معرفی یک روش برای ایجاد دنباله‌های متعامد غیر باینری با حداقل الفبا

منصور زینلی
استادیار دانشکده برق، دانشگاه آزاد اسلامی واحد نجف آباد
mansoor.zeinali@gmail.com

چکیده

دنباله‌های باینری و غیر باینری با تابع خود همبستگی متناوب بهینه که با نام دنباله‌های بهینه ویا دنباله‌های متعامد از آنها یاد می‌شود، دارای اهمیت ویژه‌ای در سیستمهای مخابراتی می‌باشند. باوجود اینکه دنباله‌های باینری به علت سادگی پیاده‌سازی، مورد توجه و بررسی گسترده‌ای بوده‌اند ولی بجز یک مورد، بقیه این دنباله‌ها شبه متعامد می‌باشند. دنباله‌های غیر باینری ضمن اینکه از لحاظ تابع خود همبستگی بهینه می‌باشند از نظر تابع همبستگی متقابل و همچنین از نظر تعداد بر دنباله‌های باینری برتری دارند. کوچک بودن تعداد الفبای بکار رفته از جمله پارامترهای مهم انتخاب یک دنباله متعامد می‌باشد. در این مقاله روش جدیدی برای ساختن دنباله‌های غیر باینری متعامد برای طولهایی که مضرب چهار باشند، ارایه می‌گردد که نیاز به کمترین تعداد الفبای شناخته شده در بین دنباله‌های مشابه دارند. همچنین همبستگی متقابل بین این دنباله‌ها بررسی خواهد شد.

کلمات کلیدی

دنباله‌های متعامد، دنباله‌های غیر باینری

۱- مقدمه

دنباله‌های با تابع خود همبستگی متناوب بهینه و یا بطور معادل دنباله های متعامد به دنباله‌هایی گفته می‌شود که بر تمام چرخشهای خود عمود باشند. تعداد بیشمار این دنباله ها در حالت غیر باینری و همچنین خواص همبستگی خوب انها موجب استفاده از این دنباله ها در زمینه های مخابرات طیف گسترده [۱، ۲]، فشرده سازی پالس در رادارها [۳]، تخمین کانالها برای شروع سریع عمل همسانسازی [۴]، پردازش سیگنالهای یک یا دو بعدی زمان گسسته [۵]، ترکیب آنتنهای برداری الکترومغناطیسی و آکوستیکی [۶]، ساختن دنباله‌های مکمل و فوق مکمل [۷]، ایجاد همزمانی در سیستمهای مخابراتی [۴] و غیره شده است.

تحقیقات انجام شده در مورد ساختن این دنباله‌ها در حالت باینری (۱،۱-)تنها منجر به پیدا کردن یک دنباله متعامد بصورت {۱،۱،۱،۱-} شده است. با توجه به رابطه متقابلی که بین این دنباله‌ها و مجموعه‌های تفاضلی گردشی و همچنین ماتریسهای هادامارد کلاسیک وجود دارد، اثبات شده است که دنباله متعامد باینری دیگری برای طولهای کوچکتر یا مساوی ۱۲۱۰۰ وجود نداشته و چنانچه بتوان دنباله متعامد جدیدی در حالت باینری با طول بزگتر از این مقدار پیدا کرد، طول آن باید مربع کامل باشد [۸].

نزدیکترین دنباله‌های متعامد پیدا شده به دنباله‌های باینری دنباله‌های سه تایی شامل الفبای {۱+,۰, ۱-} می‌باشند که به علت توزیع غیر بهینه توان در دنباله کاربرد چندانی ندارند [۹]. سایر دنباله‌های غیر باینری متعامد را می‌توان به دو دسته زیر تقسیم کرد:

۱) دنباله‌هایی که از نگاشت دنباله‌های شبه متعامد به دنباله‌های حاصل می‌شوند. انواع اصلی این نگاشت، بصورت نگاشت دنباله‌های باینری متعلق به مجموعه‌های تفاضلی گردشی به دنباله‌های دو فازه [۱۰] و همچنین نگاشت دنباله‌های ماکزیمال در میدان $GF(q)$ به دنباله‌های چند فازه متعامد [۱۱] می‌باشند. این روش گرچه از لحاظ داشتن کمترین الفبای ممکن بهینه می‌باشد ولی کارایی این روش بستگی به پارامترهای دنباله‌های شبه متعامد موجود دارد، که ممکن است دنباله دلخواه را بدست ندهند. برای مثال دنباله‌های بارکر با طولهای ۵ و ۱۳ قابل تبدیل به دنباله های متعامد واقع بر دایره واحد نمی‌باشند [۱۰].

۲) دنباله‌های چند فازه‌ای که از توانهای اول ریشه Nام عدد یک تشکیل شده‌اند. اگر چه روشهای مختلفی برای ساختن این دنباله‌ها پیشنهاد شده است، ولی اکثر این روشها حالتهای خاصی از دنباله‌های Chu [۱۲]، می‌باشند که با انجام عملیات ریاضی روی این دنباله‌ها حاصل می‌شوند. برای مثال در مرجع [۱۳] نشان داده شده است که چگونه با مدوله کردن دنباله‌های Chu می‌توان دنباله‌های متعامد چند فازه دیگری را بدست آورد.

در بخشهای بعدی این مقاله ضمن تعریف و تحلیل ریاضی دنباله‌های متعامد، روشهای تولید این دنباله‌ها معرفی شده سپس با تعریف پارامترهای دو دسته مهم از دنباله‌های متعامد یک روش جدید برای ساختن این دنباله‌ها ارائه می‌گردد. همچنین چگونگی ایجاد دنباله‌های متعامد جدید با استفاده از دنباله‌های قبلی بررسی شده و تابع همبستگی متقابل بین این دنباله‌های جدید مورد تحلیل قرار خواهد گرفت.

۲- دنباله‌های متعامد و روشهای ایجاد آنها

تابع خود همبستگی متناوب ، a_m و تبدیل فوریه گسسته آن،A_k ، برای یک دنباله مختلط $\{x_i\}_{i=0}^{N-1}$ بطول N بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$a_m = \sum_{i=0}^{N-1} x^*_{(i+m)\bmod N} x_i \ ,m = 0,1,\cdots,N-1 \quad (1)$$

$$A_k = |X_k|^2, k = 0,1,\cdots,N-1 \quad (2)$$

که در آن $\{X_k\}_{k=0}^{N-1}$ تبدیل فوریه گسسته دنباله $\{x_i\}_{i=0}^{N-1}$ و $\{A_k\}_{k=0}^{N-1}$ تبدیل فوریه گسسته دنباله $\{a_k\}_{k=0}^{N-1}$ بوده و * نشان-دهنده مزدوج مختلط می‌باشد. دنباله متعامد دنباله‌ای است که رابطه

$$a_m = \begin{cases} N & ,m = 0 \\ 0 & ,m \neq 0 \end{cases} \quad (۳)$$

برای آن برقرار بوده یا بطور معادل $A_k = |X_k|^2 = 1$ باشد. بنابراین یک روش واضح برای ساختن یک دنباله متعامد بطول N گرفتن عکس تبدیل فوریه از یک دنباله دلخواه بطول N روی دایره واحد است. این روش مناسبترین راه برای ساختن دنباله‌های متعامد با الفبای حقیقی می باشد ولی بعلت آنکه الفبای دنباله خاص در اکثر موارد قابل پیش-بینی نیست کمتر مورد استفاده قرار گرفته است. باید توجه کرد که در بسیاری از موارد کاربردی، دنباله هایی مورد نظر هستند که ضمن داشتن حداقل الفبا، عناصر دنباله روی دایره واحد قرار داشته باشند.

همچنین می‌توان نشان داد که شرط لازم و کافی برای وجود یک دنباله باینری متعامد، وجود یک دنباله چند فازه متعامد (با الفبایی واقع بر دایره به شعاع $\sqrt{N}$) و شرط تقارن:

$$X_i = X^*_{N-i} \ , i = 0,1,\ldots,N-1 \quad (۴)$$

می‌باشد. برای مثال عکس تبدیل فوریه گسسته دنباله متعامد $j = \sqrt{-1}$ ،$\{2,2j,2,-2j\}$، دنباله متعامد $\{1,-1,1,1\}$ است.

اولین دنباله‌های متعامد با الفبای واقع بر دایره واحد توسط فرانک [۱۴] معرفی شدند و بنام خود وی نیز معروف می‌باشند. دنباله‌های فرانک برای طولهایی که مربع کامل باشند وجود داشته و دارای الفبای $\sqrt{N}$ تایی می‌باشند. این دنباله‌ها حداقل الفبا را در بین دنباله‌های مشابه داشته و حداقل اختلاف فاز بین دو عنصر مختلف (تفکیک فاز) در دنباله $2\pi/\sqrt{N}$ است. در موارد کاربردی، بزرگ بودن این مقدار از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است [۱۵].

دنباله‌های معروف دیگر از این نوع دنباله های Chu می‌باشند. این دنباله‌ها برای هر طول دلخواه N وجود دارند و بسته به اینکه طول دنباله زوج یا فرد باشد به ترتیب متشکل از یک الفبای N تایی یا $N/2$ تایی می‌باشند. حداقل اختلاف فاز بین دو عنصر مختلف در این دنباله π/N می‌باشد که در مقایسه با دنباله‌های فرانک چندان مناسب نیست.

۳- روش جدید تولید دنباله‌های متعامد

اکنون روشی برای ساختن دنباله‌های متعامد با طول N (مضربی از چهار) با یک الفبای حداکثر $N/2$ تایی ارائه می‌گردد. همچنین در حالتی که N عدد زوج غیر مضرب چهار باشد این دنباله‌ها اختلاف جزئی با دنباله‌های متعامد دارند. حداقل اختلاف فاز بین دو عنصر مختلف از این دنباله ها $4\pi/N$ است که چهار برابر مقدار مشابه در دنباله های Chu می‌باشد. دنباله $\{X_i\}$ را بصورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$x_i = \begin{cases} \omega^{i^2} & , i = 0,2,\ldots,N-2 \\ \omega^{i^2-1} & , i = 1,3,\ldots,N-1 \end{cases} \quad (5)$$

که در آن $\omega = \exp(\frac{j\pi}{N})$ می باشد. روشن است که این دنباله Nتایی شامل $N/2$ عنصر متفاوت است. از رابطه (5) بسادگی دیده می شود:

$$x_{(i+m)\bmod N} = x_{i+m} \quad \text{و} \quad i,m = 0,1,\ldots,N-1 \quad (6)$$

تابع خود همبستگی متناوب برای این دنباله چنین است :

$$a_m = \sum_{i=0}^{N-1} X_i X^*_{i-m} \qquad ,m = 0,1,\ldots,N-1 \quad (7)$$

اکنون با فرض آنکه m فرد و N مضرب چهار باشد، خواهیم داشت:

$$a_m = \sum_{i=0,i_{\text{زوج}}}^{N-1} X_i X^*_{i-m} + \sum_{i=0,i_{\text{فرد}}}^{N-1} X_i X^*_{i+m} = \omega^{-m^2+1}\left(\frac{1-\omega^{-2Nm}}{1-\omega^{-4m}}\right) + \omega^{-m^2-1}\left(\frac{\omega^{-2m}-\omega^{-2m(N+1)}}{1-\omega^{-4m}}\right) = 0 \quad (8)$$

برای m زوج رابطه (7) چنین خواهد شد :

$$a_m = \omega^{-m^2} \sum_{i=0}^{N-1} \omega^{2mi} \quad (9)$$

حال اگر $m \neq 0$ باشد از رابطه فوق خواهیم داشت :

$$a_m = \left(\frac{1-\omega^{-2mN}}{1-\omega^{-2m}}\right) = 0 \quad (10) \quad \omega^{-m^2}$$

و اگر m=0 باشد از رابطه (9) خواهیم داشت :

$$a_0 = N \quad (11)$$

با توجه به روابط (8) و (10) و (11) مشخص است که در چرخشهای غیر صفر تابع خود همبستگی متناوب دنباله پیشنهاد شده مساوی صفر است و در چرخش صفر نیز مساوی N است، بنابراین یک دنباله متعامد است.

برای مثال دنباله‌های بطول ۴ و۸ و۱۲ بدست آمده از این روش به ترتیب عبارتند از:

{ 1,1,-1,1} و {1,1,j,-1,1,-1,j,1}و

$\{ ١,1,e^{j\pi/3},e^{j2\pi/3},e^{j4\pi/3},1,-1,1,e^{j4\pi/3},e^{j2\pi/3},e^{j\pi/3},1\}$

هنگامی که $N=2q$ و q یک عدد فرد باشد روابط (8) و (10) و (11) جز برای $m=q$ برقرار می‌باشند و مقدار a_q از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$a_q = \frac{N\omega^{-q^2}(\omega-\omega^{-1})}{2} = jN\omega^{-q^2}\sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \quad (12)$$

بنابراین در این حالت دنباله بر تمام چرخشهای خودش بجز در چرخش q ام عمود می باشد.

همچنین با انجام عملیات ریاضی خاص بر روی دنباله های متعامد

معرفی شده می‌توان دنباله‌های متعامد دیگری را بدست آورد. بسادگی می‌توان نشان داد که عملیات ابتدایی مانند مزدوج مختلط گرفتن از دنباله، چرخش دنباله، ضرب تمام دنباله در یک عدد مختلط ثابت، ضرب هر یک از عناصر دنباله در عناصر متناظر از یک سطر یا ستون دلخواه از ماتریس فوریه NxN و همچنین تبدیل فوریه گرفتن از دنباله هیچ تاثیری بر خاصیت متعامد بودن دنباله نمی‌گذارند. علاوه بر این در ادامه نشان خواهیم داد که اگر تک تک عناصر دنباله متعامد بدست آمده را به توان یک عدد صحیح r که نسبت به N اول است برسانیم، دنباله ایجاد شده همچنان متعامد باقی می‌ماند. همچنین اگر $\{b_0, b_1\}$ دو عدد مختلط دلخواه روی دایره واحد باشند و عناصر دنباله x را که در مکانهای زوج و فرد قرار دارند به ترتیب در این دو عدد ضرب کنیم دنباله جدید $y = \{y_i\}$ بصورت :

$$y_i = \begin{cases} b_0 x_i & , i = 0,2,\ldots,\mathrm{N}-2 \\ b_1 \mathrm{x}_i & , i = 1,3,\ldots,\mathrm{N}-1 \end{cases} \tag{13}$$

بدست می‌آید که این دنباله نیز متعامد می‌باشد .

برای تحقیق دو مطلب فوق و همچنین بررسی تابع همبستگی متقابل بین دنباله های بدست آمده، اندازه تابع همبستگی متقابل بین دو دنباله حاصل از تبدیلهای فوق را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم دنباله‌های z,y بصورت زیر باشد:

$$y_i = \begin{cases} a_0 \omega^{ri^2} & , \mathrm{i} = 0,2,\ldots,\mathrm{N}-2 \\ a_1 \omega^{ri^2-i} & , \mathrm{i} = 1,3,\ldots,\mathrm{N}-1 \end{cases} \tag{14}$$

و

$$\mathrm{z_i} = \begin{cases} b_0 \omega^{\mathrm{si}^2} & , \mathrm{i} = 0,2,\ldots,\mathrm{N}-2 \\ b_1 \omega^{si^2-s} & , \mathrm{i} = 1,3,\ldots,\mathrm{N}-1 \end{cases}$$

که $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$ اعداد مختلط دلخواهی روی دایره واحد و r,s نسبت به N اول می‌باشند. مربع اندازه تابع همبستگی متقابل بین دو دنباله $y = \{y_i\}$ و $z = \{z_i\}$ چنین تعریف می‌شود:

$$\left|R_{zy}(m)\right|^2 = \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{N}-1} z_i y_{i-m}^* \sum_{\mathrm{l}=0}^{\mathrm{N}-1} z_l^* y_{l-m} ,m=0,1,\ldots,\mathrm{N}-1 \tag{15}$$

حال چند حالت ساده زیر را در نظر می گیریم:

۱) $r=s$ و $a_0 = a_1 = b_0 = b_1$ در این صورت $\left|R_{zy}(m)\right|^2$ همان مربع اندازه تابع خود همبستگی دنباله y می‌باشد و خواهیم داشت $R_{yy}(m) = 0$ برای $m \neq 0$ و $\mathrm{R_{yy}}(0) = \mathrm{N}$. بنابراین دنباله y که از توانهای r ام عناصر دنباله x بوجود آمده است، یک دنباله متعامد است.

۲) $r=s$ و $a_0 = b_0$ و $a_1 = b_1$ در این حالت نیز $\left|R_{zy}(m)\right|^2$ مربع اندازه تابع خود همبستگی دنباله y می باشد و با توجه به روابط فوق مشخص است که $\mathrm{R_{yy}}(m) = 0$ برای $m \neq 0$ و $\left|R_{yy}(0)\right| = \mathrm{N}$، بنابراین دنباله y که از ضرب $\{b_0, b_1\}$ در دنباله x بدست آمده نیز متعامد می‌باشد.

۳) $r=s$ و $a_0 \neq b_0$ و $a_1 \neq b_1$ در این حالت $\left|R_{zy}(m)\right|^2$ برای mهای فرد مساوی صفر خواهد شد که نشان می‌دهد دو دنباله مختلف که از ضرب کردن یک دنباله اولیه بدست آمده‌اند در چرخشهای فرد بر هم عمود می باشند.

۴- نتیجه

در این مقاله ضمن تحلیل و بررسی روشهای ایجاد دنباله‌های متعامد، روش جدیدی برای ساختن این دنباله ها ارائه گردید که با توجه به روشهای موجود نیازمند به کمترین الفبا برای طولهای مضرب چهار بوده و از لحاظ تفکیک فاز نیز مناسب می‌باشد. همچنین چگونگی ایجاد دنباله‌های متعامد دیگری با استفاده از دنباله‌ها و تابع همبستگی متقابل بین آنها مورد بحث قرار گرفت.

۵- مراجع

[1] Lam, A.W., *Performance bounds for DS SSMA with complex signature sequences*, IEEE Trans. Commun., pp. 1607- 1614, 1992.

[2] Lok, T.M., *An asymptotic analysis of DS SSMA communication systems with random polyphase signature sequences*, IEEE Trans. Inform. Theory, pp. 129- 136, 1996.

[3] Levanon, N., *Periodic ambiguity function of CW signals with perfect periodic autocorrelation*, IEEE Trans. AES, pp. 387-394, 1992.

[4] Clark, A.P, *Fast start-up channel estimation*, IEE Proc., pp. 375-382, 1984.

[5] Lük, H.D., *Binare and fast binare orthogonal Folgen und Matrizen*, Frequenz, pp. 310-314, 1987.

[6] Schoeder, M.R., *Diffuse sound reflection by maximum-length sequences*, J. Acoust. Soc. Am., pp. 149-150, 1975.

[7] Popovic, B.M., *Complementaery sets of chirp like poly phase senquences*, Electron.lett, pp.254-255, 1991.

[8] Baumert, L.D., *Cyclic Difference Sets*, Berlin, Spring verlag, 1971.

[9] Hoholdt, T., *Ternary sequences with perfect periodic autocorrelation*, IEEE Inform. Theory, pp. 597-599, 1983.

[10] Golomb, S.W., *Two-valued sequences with perfect periodic autocorrelation*, IEEE Trans. AES, pp.383-386, 1992.

[11] Kirimoto, T., Oh-hashi,Y., *Orthogonal periodic sequences derived from M-sequences*, IEEE Trans. Inform. Theory, pp. 526-532, 1994.

[12] Chu, D.C., *Polyphase codes with perfect periodic correlation properties*, IEEE Trans. Inform. Theory, pp. 531-532, 1972.

[13] Popovic, B.M., *GCL sequences withoptimum alphabets*, Elec.lett., pp. 106-107, 1994.

[14] Frank, R.L., *Phase shift pulse codes with good periodic correlation function*, IRE Trans. Inform. Theory, pp. 381-382, 1962.

[15] Leopold, B., *Perfect N-Phase sequences and arrays*, IEEE JSAC, pp. 782-788, 1992.