بسم الله الرحمن الرحیم

شبکه هاپفیلد گسسته

معرفی

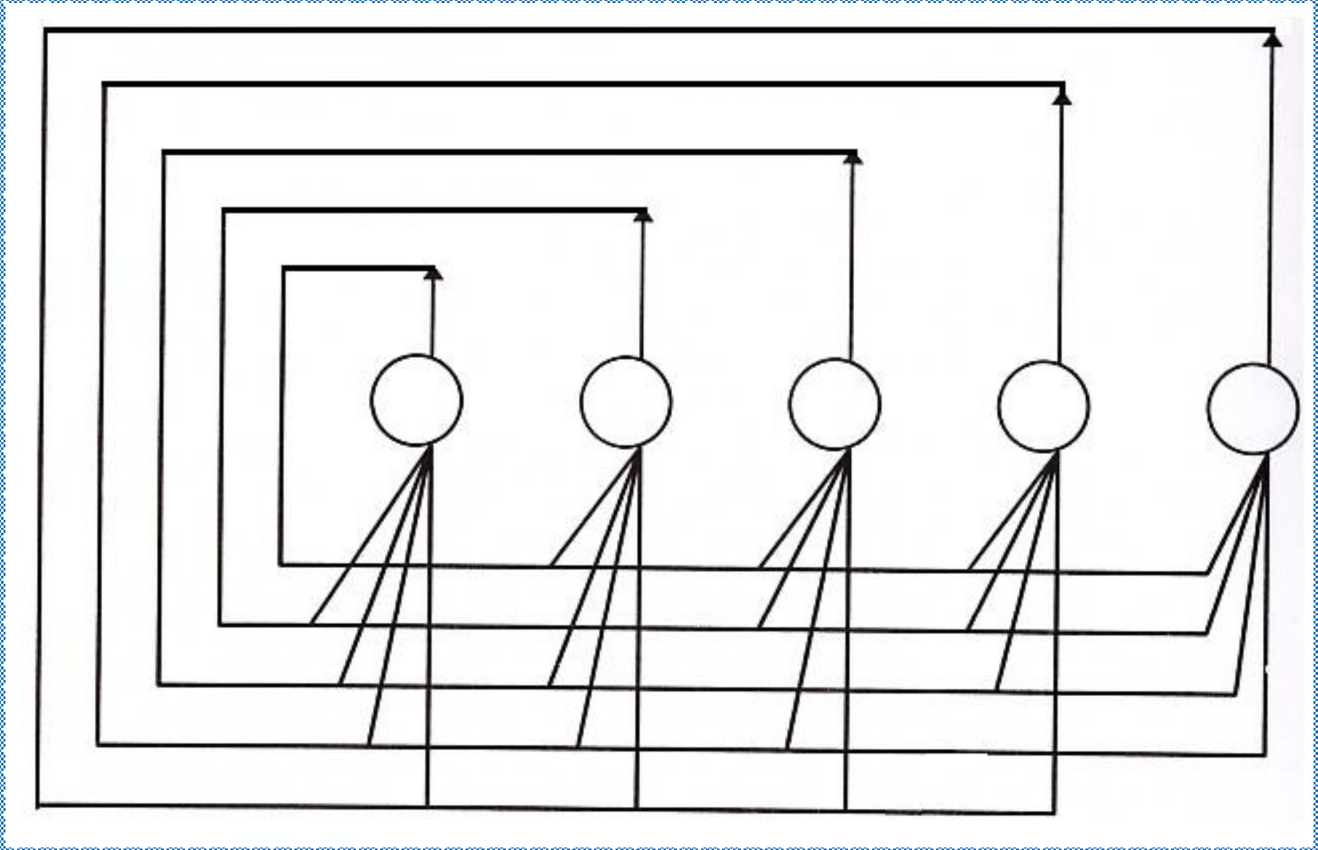
- ارائه توسط هاپفیلد (استاد فیزیک)
- اوایل دهه ۸۰ میلادی (سال‌های ۱۹۸۲ و ۱۹۸۴)
- یک شبکهٔ خودانجمن کاملاً به هم متصل بوده و دارای وزن‌های متقارن و بدون اتصال به خود
  - در هر بار فقط یکی از واحدها فعال‌سازی خود را به‌روز می‌کند که این به‌روز کردن بر اساس سیگنال‌های دریافتی از واحدهای دیگر است.
  - هر واحد شبکه، علاوه بر سیگنال‌های دریافتی از سایر واحدهای شبکه، یک سیگنال خارجی را نیز دریافت می‌کند که همان ورودی شبکه است

شبکه هاپفیلد گسسته

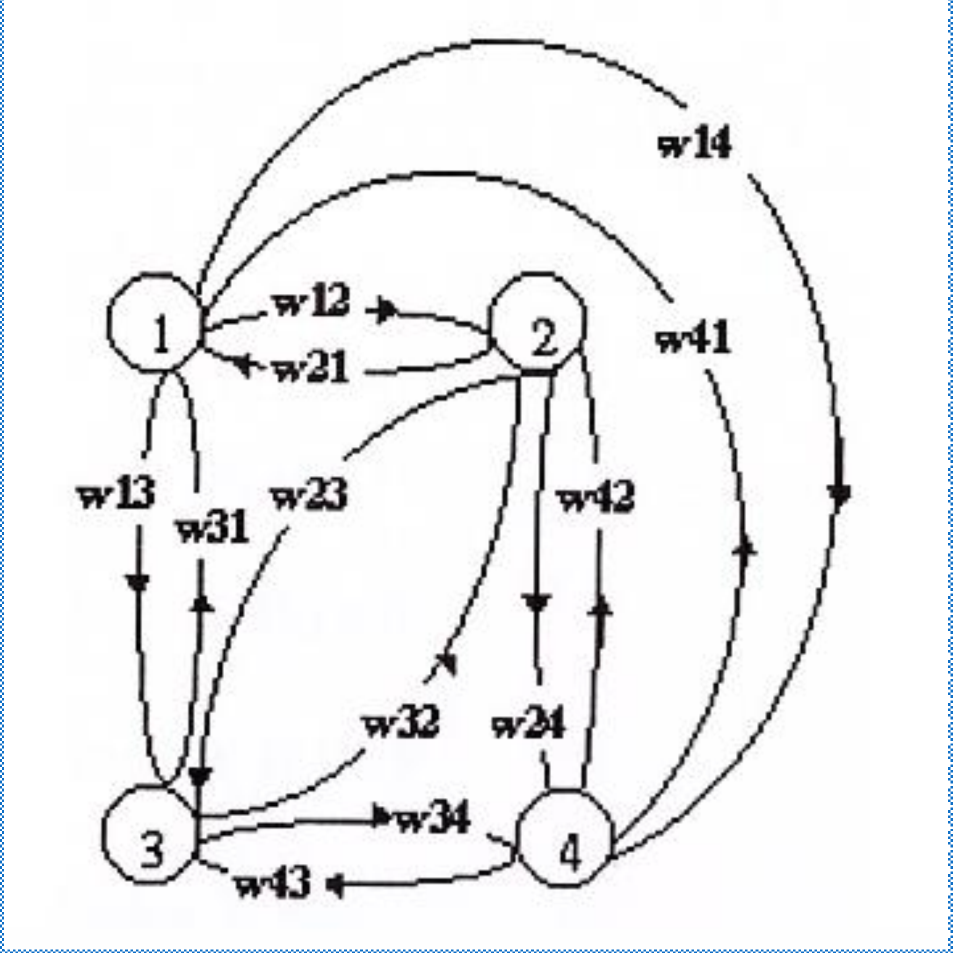
شبکه هاپفیلد از شبکه های خود انجمن تکراری است. این شبکه ها، حالت گسترش یافته ای از شبکه خود انجمن است که در آن پاسخ شبکه به یک الگوی ورودی خاص، دوباره به عنوان ورودی به شبکه داده می شود. برای ذخیره الگوهای دودویی و یا دوقطبی $S(p)=(S1(p),\ldots,Si(p),\ldots,Sn(p))$، ماتریس وزن‌ها به صورت زیر به دست می آید:

- **بردارهای دودویی** $w_{ij} = \sum_p (2s_i(p)-1)(2s_j(p)-1)$
- **بردارهای دوقطبی** $w_{ij} = \sum_p s_i(p)s_j(p)$
- **ماتریس وزن** $\mathbf{W} = \{w_{ij}\}$

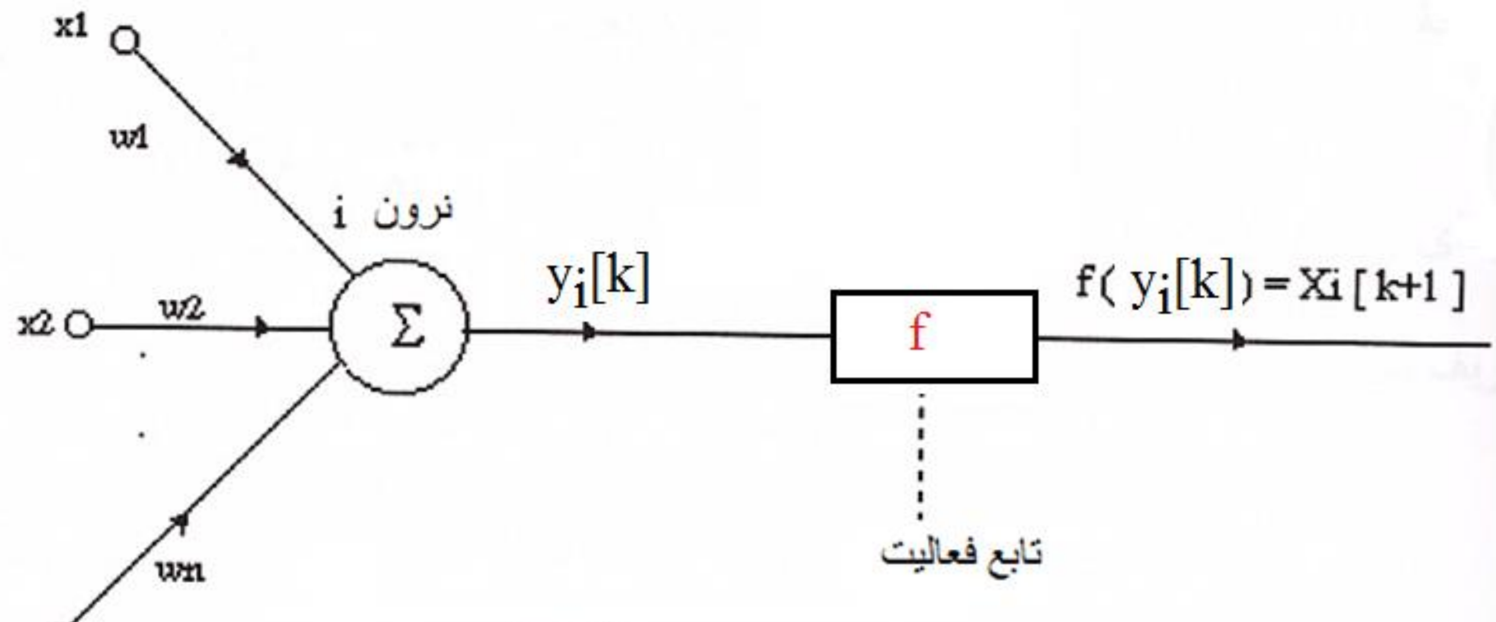
ساختارشبکه هاپفیلد



ارتباط بین نودها و وزنها در شبکه هاپفیلد



مشخصه رفتاری نرونها در یک شبکه هاپفیلد زمان گسسته



$$y_i[k] = \sum_{j=1}^{n} wijxj[k]$$

k زمان گسسته است که می‌توان بصورت kT در نظر گرفت که T پریود نمونه برداری است.

خروجی نرون در حالت $x_i[k+1]$

$$x_i[k+1] = f(y_i[k]) = \begin{cases} 1 & \text{for } \; y_i[k] > 0 \\ x_i[k] & \text{for } \; y_i[k] = 0 \\ -1 & \text{for } \; y_i[k] < 0 \end{cases}$$

سطح آستانه $\theta_i = 0$

درحالت کلی با توجه به سطح آستانهٔ θ_i، خروجی نرون در حالت $x_i[k+1]$ برابراست با:

$$x_i[k+1] = f(y_i[k]) = \begin{cases} 1 & \text{for } \; y_i[k] > \theta_i > 0 \\ x_i[k] & \text{for } \; y_i[k] = 0 \\ -1 & \text{for } \; y_i[k] < \theta_i < 0 \end{cases}$$

انتخاب وزنهای شبکه هاپفیلد

وزنهای شبکهٔ هاپفیلد براساس مجموعه اطلاعات بردارهای $X^s = [x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s]$ می‌باشد، که

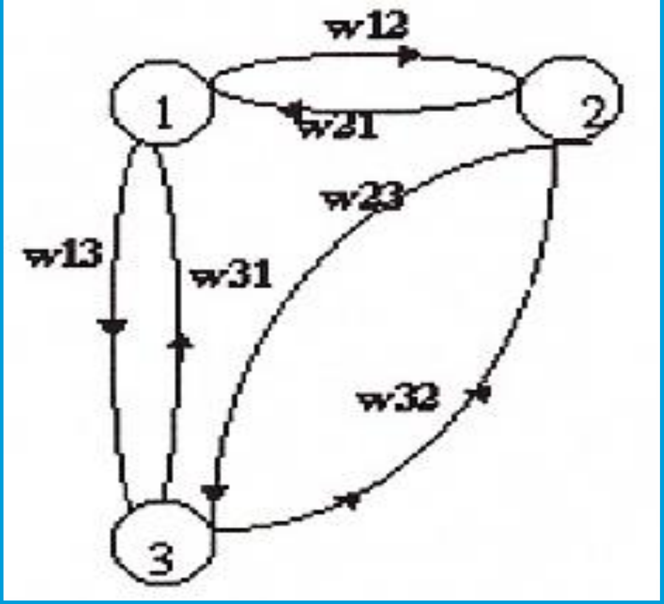
$$s=1, 2, \dots, M$$

مجموعه بردارهای $\{X^s\}_{s=1}^{M}$ اطلاعاتی هستند که می‌خواهیم در شبکه انبار کنیم. در این صورت وزنهای شبکه بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} w_{ij} = 0 & \text{for} \quad i=j \\ w_{ij} = w_{ji} = \sum_{i=1}^{n} x_i^s x_j^s & \text{for} \quad i \neq j \\ \quad 1 \leq i, j \leq n & \end{cases}$$

مثال 1:

فرض کنید الگوهای نمونه‌ای که می‌خواهیم در شبکهٔ زیر انبار کنیم عبارتند از:



$$x^1 = [1 \quad -1 \quad 1]$$

$$x^2 = [1 \quad 1 \quad -1]$$

$$x^3 = [-1 \quad 1 \quad 1]$$

ادامه مثال 1:

وزنهای مربوطه طبق تعریف عبارتند از:

$$w_{11} = w_{22} = w_{33} = 0$$

$$w_{12} = x_1^1 x_2^1 + x_1^2 x_2^2 + x_1^3 x_2^3 = 1*(-1) + 1*1 + (-1)*1 = -1$$

$$w_{13} = -1 \quad , \quad w_{23} = -1$$

ماتریس وزنهای شبکه برابر است با:

$$w = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

نحوه بازیابی اطلاعات

چنانچه شبکه را با یک حالت اولیه $X(0) = [\ x_1(0),\ \ x_2(0),\ \ldots, x_n(0)\ ]$ تحریـک کنیـم، سـپس براسـاس وزنهای انبار شده در شبکه (ماتریس وزنهای W) و مشخصهٔ رفتاری نرونها، حـالت شـبکه را بـرای زمانهـای گسسـتهٔ بعدی (k) تعیین می‌نماییم، زمانی که حالت شبکه به یک مقدار دائمی می‌رسد، مقــدار دائمـی را خروجـی شـبکه در رابطه با مقدار تحریکی $X(0)$ می‌نامیم. نحوهٔ محاسبهٔ حالتهای بعدی شبکه بطور همزمان[1] و یا غیر همزمان[2] انجام می شود. در روش همزمان حالتهای بعدی تمام نودها محاسبه می‌گردد، سپس شبکه با ایـن مقـادیر جدیـد تحریـک مـی گردد، اما در روش غیرهمزمان حالت بعدی یک نود که محاسبه شد، با توجه به خروجیهـای حالتهـای فعلـی نودهـای دیگر، شبکه با این مقادیر تحریک می‌گــردد.

---

[1] synchronized

[2] unsynchronized

مثال 2:

با توجه به مثال۱ و ماتریس وزنهای محاسبه شده، چنانچه شبکه را با حالت اولیهٔ $X(0)=[\,1 \quad -1 \quad 1\,]$ تحریک کنیم خروجی نرونها در هر مرحله براساس روش همزمانی عبارتست از:

باتوجه به: $y_i[k] = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}\, x_j[k]$

$$x_i[k+1] = f(y_i[k]) = \begin{cases} 1 & \text{for } y_i[k]>0 \\ x_i[k] & \text{for } y_i[k]=0 \\ -1 & \text{for } y_i[k]<0 \end{cases}$$

$\theta_i=0$ سطح آستانه

$$y_1[0] = w_{11}x_1[0] + w_{12}x_2[0] + w_{13}x_3[0]$$

$$y_1[0] = [\,w_{11} \quad w_{12} \quad w_{13}\,] \begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_2[0] \\ x_3[0] \end{bmatrix} = w_1\, x^T(0) = 0$$

ادامه مثال 2:

$$y_1[0] = 0 \Rightarrow x_1[1] = f(y_1(0)) = x_1(0) = 1$$

$$y_2[0] = w_2X^T(0) = -2 \Rightarrow x_2[1] = f(y_2(0)) = -1$$

$$y_3[0] = w_3X^T(0) = 0 \Rightarrow x_3[1] = f(y_3(0)) = 1$$

باتوجه به مقادیر بدست آمده وحالت اولیهٔ $X(0) = [1 \ \ -1 \ \ 1]$ داریم:

با توجه به روابط و محاسبات بیان شده، حالتهای بعدی شبکه عبارتند از:

$$X(1) = [1 \ \ -1 \ \ 1]$$

$$X(2) = [1 \ \ -1 \ \ 1]$$

$$X(3) = [1 \ \ -1 \ \ 1]$$

یعنی شبکه در رابطه با ورودی $X(0) = [1 \ \ -1 \ \ 1]$ به حالت دائمی $X = [1 \ \ -1 \ \ 1]$ رسیده است، بعبارت دیگر بردار بازیافتی شبکه همان بردار انبار شده $X^1 = [1 \ \ -1 \ \ 1]$ است.

مثال 3:

در مثال ۲ چنانچه شبکه را با بردار حالت $X(0) = [1 \quad 1 \quad 1]$ تحریک کنیم بر اساس روش تازه‌سازی همزمان داریم:

$$X(1) = [-1 \quad -1 \quad -1]$$

$$X(2) = [1 \quad 1 \quad 1]$$

$$X(3) = [-1 \quad -1 \quad -1]$$

بنابراین به جواب پریودیک (حالت پریودیک) برای شبکه رسیده‌ایم.

مثال 4:

چنانچه در مثال ۳ از روش تازه سازی غیر همزمان استفاده شودحالتهای بعدی شبکه عبارتند از:

$X(0) = [\,1 \quad 1 \quad 1\,]$

$X(1) = [\,1 \quad 1 \quad -1\,]$ واحد۳ را تازه سازی می‌کنیم

$[\,-1 \; -1 \;\; 0\,]\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = -2 \Rightarrow -1$

$X(2) = [\,1 \quad 1 \quad -1\,]$ واحد ۲را تازه سازی می‌کنیم

$X(3) = [\,1 \quad 1 \quad -1\,]$ واحد ۱را تازه سازی می‌کنیم

$X(4) = [\,1 \quad 1 \quad -1\,]$ واحد ۳را تازه سازی می‌کنیم

بنابراین حالت دائمی شبکه برابر با: $[\,1 \quad 1 \quad -1\,] = X^2$ است برداری‌که قبلاً انبار کرده‌ایم.

مثال 5:

در مثال ۴ چنانچه شبکه را با حالت اولیهٔ $X(0) = [\ -1 \quad -1 \quad 1]$ تحریک کنیــم، آنگـاه در خروجــی شــبکه بـه همین بردار $X(0)$ می‌رسیم.

حالتی که قبلاً در شبکه انبار نکرده‌ایم،

این اطلاعــات را اطلاعـات بدلـی[1] می‌نـامیم، زیـرا برداری بازیافت شده که قبلاً در شبکه انبار نشده است.

---

1 spurious

تابع انرژی در شبکه هاپفیلد زمان گسسته

- هاپفیلد ثابت کرد
  - شبکهٔ گسستهٔ وی با در نظر گرفتن یک تابع انرژی (یا لیاپونف) برای سیستم، به نقطهٔ حدی پایدار (الگوی فعال‌سازی واحدها) همگرا خواهد شد.

- تابع انرژی (لیاپونف) . . .
  - یک تابع کران پایین و غیرصعودی از حالت سیستم
  - حالت سیستم = بردار فعال‌سازی‌های واحدها

محدودیتهای شبکه هاپفیلد

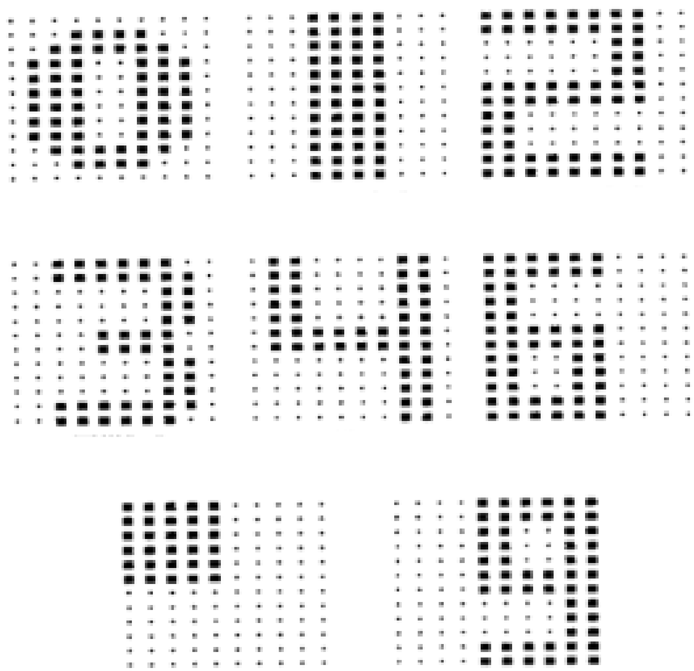
- شبکه هاپفیلد همیشه از یک حالت اولیه به نزدیکترین حالت پایدار (انبار شده) همگرا نمی گردد.
- تمام حالتهای انبار شده با تاکید مساوی بازیافت نمی شود.
- در بعضی از مواقع اطلاعات بدلی بازیافت میشود.
- ظرفیت ذخیره‌سازی
  - تعداد الگوهایی که می‌توان در شبکه با دقت قابل قبول ذخیره‌سازی و بازخوانی کرد
  - برای الگوهای دودویی (به صورت تجربی و تقریبی) $P \approx 0.15n$
    - n- تعداد نرون‌های شبکه
    - P- تعداد الگوهای قابل ذخیره و بازیابی
  - برای الگوهای دوقطبی $P \approx \dfrac{n}{2\log_2 n}$

شبکه هاپفیلد زمان گسسته

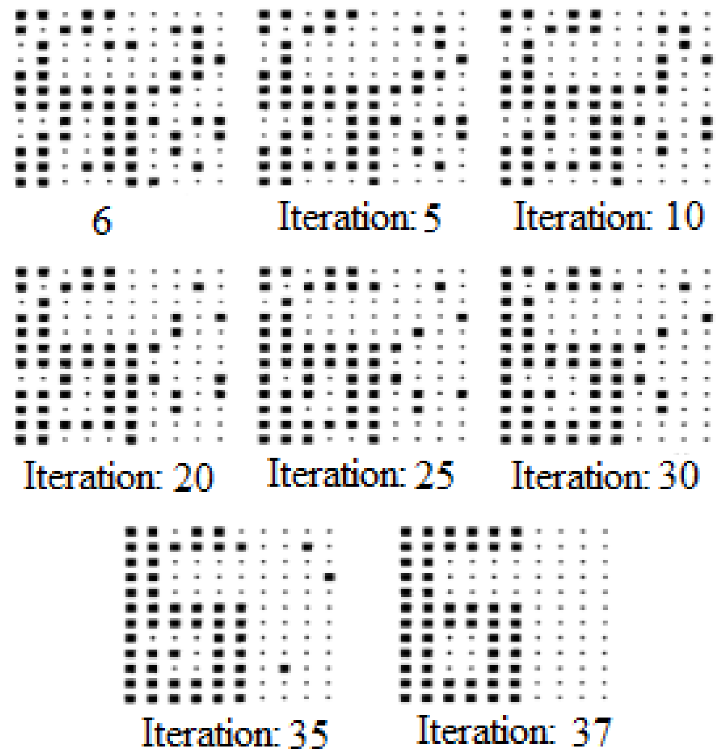
- مهم‌ترین ویژگی‌های این شبکه برای تضمین همگرایی
  - به‌روز کردن غیرهم‌زمان وزن‌ها
  - متقارن بودن ماتریس وزن و وجود وزن‌های صفر روی قطر اصلی ماتریس وزن
- برای اثبات همگرایی مهم نیست
  - در حین انجام فرآیند، سیگنال خارجی وجود داشته باشد
  - و ورودی‌ها و فعال‌سازی‌ها دودویی یا دوقطبی باشند
- حالت پایدار جعلی (Spurious Stable State)
  - بردار ورودی = یک بردار «ناشناس»
  - همگرایی به یک بردار فعال‌سازی (با تکرار شدن شبکه) که با هیچ‌کدام از الگوهای ذخیره شده در حافظه یکسان نیست

مثال: تشخیص نویسه در شبکه هاپفیلد

دادههای ذخیره شده در حافظه

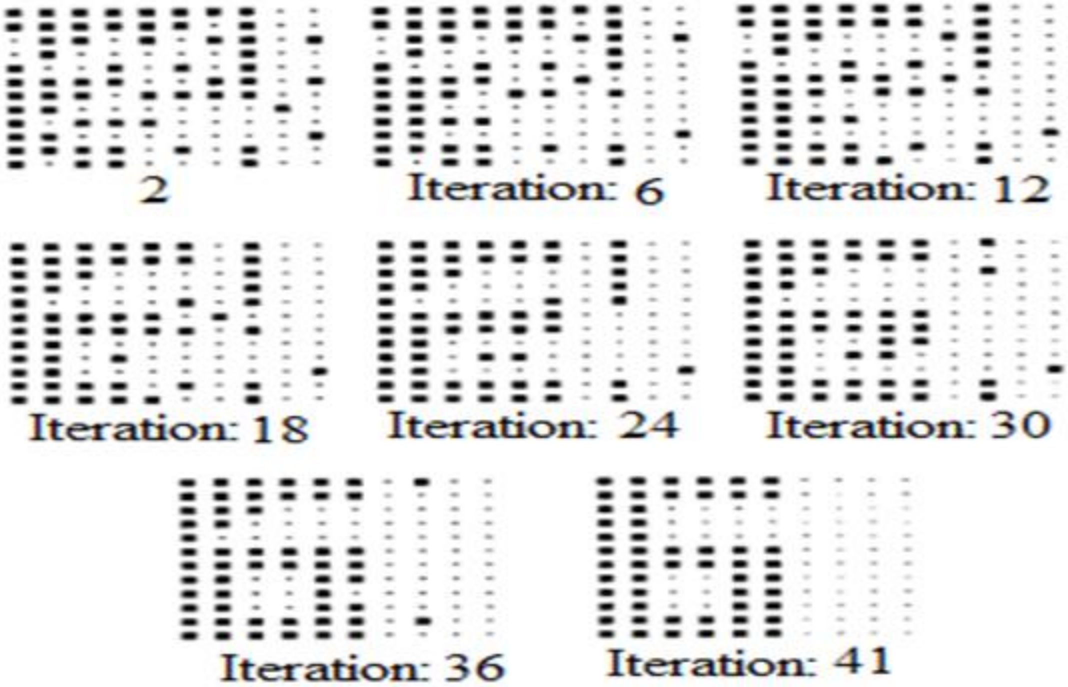


ورودی شبکه:عدد ۶ (اعوجاج یافته)

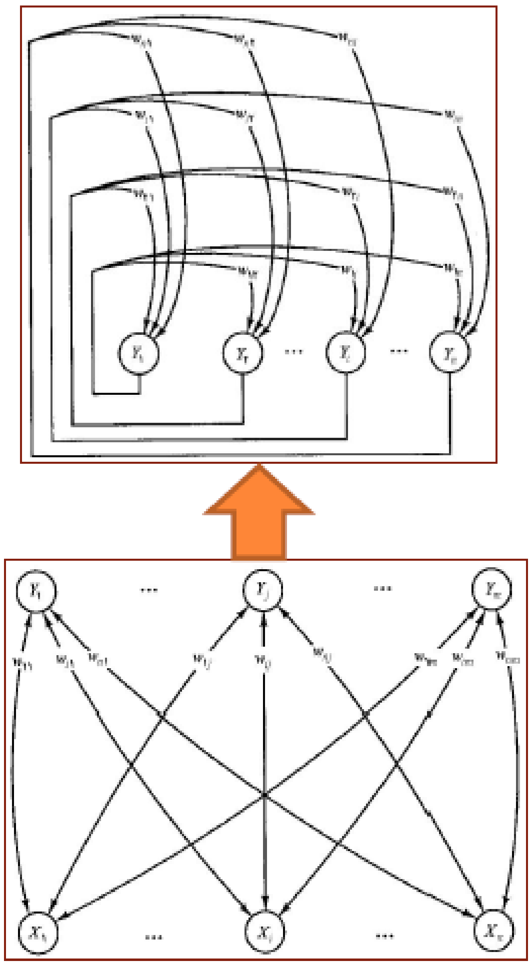


مثال: تشخیص نویسه در شبکه هاپفیلد

ورودی شبکه:عدد ۲ (اعوجاج یافته)



تابع انرژی در شبکه عصبی هاپفیلد



- برای شبکه هاپفیلد
  - هاپفیلد حالتی خاص از BAM است
  - شبکه خودانجمنی است، پس x=y
  - مقدار آستانه دو لایه برابر است
    - دو لایه معادل یک لایه است

$$E(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_i) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}_i\mathbf{W}\mathbf{y}_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\theta_{\mathbf{x}}\mathbf{y}_i^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\mathbf{x}_i\theta_{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}$$

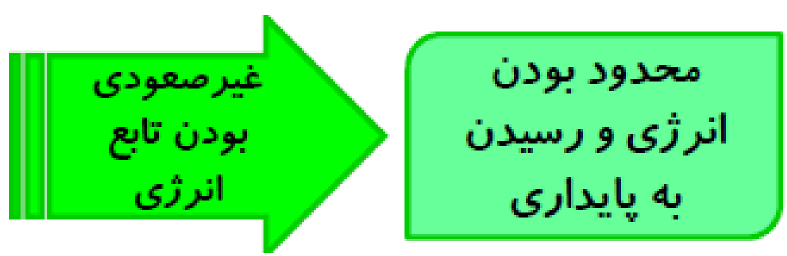
$$\begin{aligned} E(\mathrm{x}) &= -\frac{1}{2}\mathrm{x}\mathrm{W}\mathrm{x}^{\mathrm{T}} + \theta\mathrm{x}^{\mathrm{T}} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} w_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n}\theta_i x_i \end{aligned}$$

تابع انرژی در شبکه عصبی هاپفیلد

- اثبات همگرایی فعال‌سازی‌ها
  - به کمک تابع انرژی یا تابع لیاپونف (Lyapunov Function)

$$E(\mathrm{x}) = -\frac{1}{2}\mathrm{x}\mathrm{W}\mathrm{x}^{\mathrm{T}} + \theta\mathrm{x}^{\mathrm{T}}$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} w_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n}\theta_i x_i$$

- تابع انرژی (لیاپونف)



شبکه هاپفیلد پیوسته

- شکل تغییر یافتهٔ شبکهٔ هاپفیلد گسسته با توابع خروجی پیوسته
  - کاربرد در حل مسائل حافظهٔ انجمنی (همانند هاپفیلد گسسته) یا مسائل بهینه‌سازی با محدودیت (مثل مساله فروشنده دوره‌گرد)
  - اتصالات بین واحدها، مشابه هاپفیلد گسسته، است و ماتریس وزن متقارن است
  - برای این شبکه، فعالیت درونی نرون $= u_i$ و سیگنال خروجی $= v_i = g(u_i)$

تابع فعال‌سازی

- تابع انرژی

$$E = 0.5\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij} v_i v_j + \sum_{i=1}^{n} \theta_i v_i$$

  - تا زمانی‌که $\frac{d}{dt}E \le 0$، شبکه به یک پیکره‌بندی ثابت (که در آن تابع انرژی کمینه است)، همگرا می‌شود.
  - شبکه با تابع انرژی فوق، زمانی همگرا می‌شود که فعالیت هر نرون طبق معادلهٔ دیفرانسیل زیر با زمان تغییر کند

$$\frac{d}{dt}u_i = -\frac{\partial E}{\partial v_i} = -\sum_{j=1}^{n} w_{ij} v_j - \theta_i$$