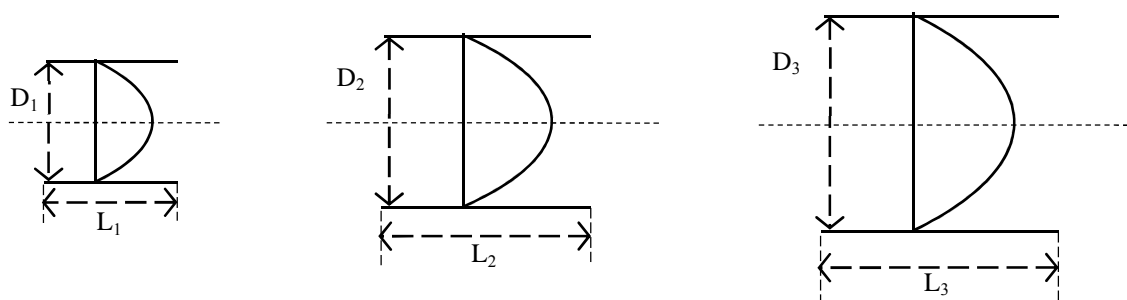


۱. مقدمه

آنالیز ابعادی در مکانیک سیالات دارای اهمیت خاص می‌باشد، زیرا روابط بین متغیرها را بیان می‌نماید. روابط تجربی بین متغیرها معمولاً از طریق داده‌های آزمایشگاهی به دست آمده است. در حرکت سیالات معمولاً دو گروه از متغیرها وجود دارد. یک گروه از متغیرها مربوط به خواص سیال می‌باشد، مانند دانسیته، ویسکوزیته، کشش سطحی و غیره. گروه دیگر مربوط به ابعاد و شکل هندسی مجاری سیال و نیروهای دینامیکی می‌باشد. بعضی از متغیرها مستقل از یکدیگرند و برخی به هم وابسته‌اند. در آنالیز ابعادی رابطه‌هایی مانند گروه‌های بدون بعد بین متغیرهای وابسته به وجود می‌آید که دارای مفهوم فیزیکی می‌باشند. از کاربردهای آنالیز ابعادی در سیالات می‌توان از دو کلاس ذیل نام برد:

الف- جواب عمومی برای معادلات حرکت، به خصوص معادله ناویر استوکس

حرکت سیال در مجاری مختلف با شکل هندسی متشابه اما با ابعاد مختلف معمولاً دارای پروفیل سرعت یکسان می‌باشد. برای مثال حرکت سیال در یک لوله دارای پروفیل سهموی می‌باشد. حال در چند لوله با ابعاد مختلف، مثلاً با قطرهای متفاوت، پروفیل سرعت همواره به صورت سهمی خواهد بود.



شکل ۷-۱: پروفیل سرعت یکسان برای حرکت سیال در داخل لوله با ابعاد مختلف

برای مثال، شکل (۷-۱) را ملاحظه نمایید. سه لوله با ابعاد و قطرهای متفاوت نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود در هر سه لوله پروفیل سرعت به صورت سهمی می‌باشد. بنابراین یک پروفیل سرعت عمومی به صورت سهمی

در حرکت سیال در لوله وجود دارد. پس هدف از آنالیز ابعادی به دست آوردن یک حل و جواب عمومی برای حرکت سیال در مجاری با شکل های هندسی متشابه می باشد.

ب- رابطه همبستگی بین داده های آزمایشگاهی

بسیاری از پدیده ها در مکانیک سیالات به طور پیچیده به مجاری با شکل های هندسه مختلف و پارامترهای جریان بستگی دارد. برای مثال نیروی درگ (اصطکاک) بر یک کره توپر را که در مسیر جریان یکنواخت قرار دارد، در نظر بگیرید. واضح است نیروی دینامیکی ناشی از جریان سیال بر روی کره تابعی از متغیرهایی چون خواص سیال (نظیر دانسیته (ρ) و ویسکوزیته (μ))، ابعاد کره مانند قطر کره (D) و سرعت جریان (v) می باشد. پس می توان نیروی درگ را به صورت ذیل نوشت:

$$F = f(D, v, \rho, \mu) \quad (7-1)$$

البته در این جا از پارامترهایی مانند زبری سطح کره صرف نظر شده است. اگر از ما خواسته شود که یک سامانه ای آزمایشگاهی طراحی نماییم که نیروی درگ را با تغییر چهار متغیر مذکور بررسی کند، معمولاً لازم است همیشه یک متغیر تغییر نماید و بقیه متغیرها ثابت بمانند. به عنوان مثال اگر سرعت را در بازه ای وسیعی ده مرتبه تغییر دهیم و به همین ترتیب در هر زمان یک متغیر را ثابت و بقیه متغیرها را ده مرتبه تغییر دهیم، حدود 10^4 آزمایش را باید انجام دهیم که اثرات چهار متغیر را برای اندازه گیری نیروی F بررسی کنیم. همان گونه که ملاحظه می شود انجام این تعداد آزمایش از نظر اقتصادی گران تمام می شود. ولی خوشبختانه لازم نیست این تعداد آزمایش انجام شود! با استفاده از آنالیز ابعادی می توان ضریب درگ را بر حسب یک گروه بدون بعد مانند عدد رینولدز از طریق آزمایش اندازه گیری نمود و به صورت یک منحنی به شکل ذیل آن را ارائه کرد:

$$\frac{F}{\rho v^2 D^2} = f\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right) \quad (7-2)$$

² Correlation relation

پس به جای 10^4 آزمایش، کافی است طبیعت تابع مذکور را با دقت بالا با ده تست بررسی کنیم. به عنوان مثال کافی است ده کره با قطرهای مختلف تهیه شود، لیکن سایر متغیرها ثابت باقی بمانند. به عبارتی با تغییر اندازه قطر کره فقط پارامتر $\rho v D / \mu$ تغییر می کند.

در بعضی از مواقع ممکن است شکل هندسی مجاری سیال ساده نبوده بلکه دارای پیچیدگی خاصی باشد؛ مانند حرکت سیال در رودخانه‌ها، حرکت سیال از جریان سنج سوزنی^۳، حرکت سیال اطراف یک هواپیما و غیره. در بسیاری از این مواقع یک راه حل تحلیلی برای توصیف حرکت سیال وجود ندارد. اما خوشبختانه با یک سری از تست‌های دقیق آزمایشگاهی می توان داده‌های مناسبی تولید کرد که بتوان با استفاده از گروه‌های بدون بعد، حرکت سیال را در مجاری با هندسه‌های پیچیده توصیف نمود.

۲. آنالیز ابعادی معادلات ناویر – استوکس

از دیگر کاربردهای آنالیز ابعادی، مقیاس سازی^۴ فرآیندها است. گاهی در آزمایشگاهی فرآیندی طراحی می شود و اطلاعات و یا داده‌های آزمایشگاهی تهیه می شود. حال چگونه می توان از این داده‌ها برای طراحی همان فرآیند در مقیاس صنعتی بهره برد؟ به هر حال ابعاد دستگاه‌ها در فرآیند صنعتی ممکن است چندین برابر همان فرآیند در ابعاد آزمایشگاهی باشد. با استفاده از آنالیز ابعادی و با روش شبیه سازی^۵ می توان فرآیندها را در مقیاس صنعتی طراحی کرد. در این فصل به این نکته نیز اشاره خواهد شد و چگونگی شبیه سازی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

برای ساده سازی در این جا ابتدا از معادله ناویر – استوکس شروع می کنیم. سیالی را با دانسیته و ویسکوزیته ثابت در نظر بگیرید. پس معادلات پیوستگی و ناویر – استوکس به شکل ذیل برای این سیال نوشته می شود:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (7-3)$$

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] \quad (7-4)$$

³ Orifice Meter

⁴ Scaling

⁵ Similarity

اولین مرحله برای بدون بعد کردن معادلات، نرمال کردن و یا بدون بعد کردن تمام متغیرهای وابسته و غیر وابسته می- باشد. متغیرهای فیزیکی مانند طول، عرض، قطر و غیره را معمولاً با مشخصه‌های طولی سیال بدون بعد می‌نمایند. به عنوان مثال مشخصه "L" را به صورت ضریب مقیاس یا مشخصه طولی^۶ در نظر می‌گیرند. برای متغیر سرعت نیز یک مشخصه سرعت^۷ مانند "U" تعیین می‌کنند. این مشخصه ممکن است سرعت جریان آزاد یا سرعت متوسط باشد. برای فشار دو گونه مشخصه فشار^۸ می‌توان انتخاب کرد که بستگی به رژیم جریان دارد. در جریانات مغشوش که سرعت بالا است و ممکن است ویسکوزیته سیال پایین باشد و معمولاً نیروهای اینرسی^۹ یا لختی حاکم است، مشخصه فشار به صورت ρU^2 در نظر گرفته می‌شود. از طرفی دیگر در سیالات با ویسکوزیته بالا که حرکت سیال خزشی است، مشخصه فشار ممکن است به صورت $\mu U/L$ در نظر گرفته شود. در حالت اول انرژی سینتیک حاکم بوده و در حالت دوم نیروهای ویسکوز یا برشی غالب خواهند بود.

بنابراین با تعیین مشخصه‌های مذکور تمام متغیرها و عبارتهای معادله ناویر-استوکس به صورت ذیل نرمال (بدون بعد) می‌شوند:

$$v_i^* = \frac{v_i}{U} \quad ; \quad x_i^* = \frac{x_i}{L} \quad ; \quad h^* = \frac{h}{L} \quad (7-5)$$

که در این جا $v_i = Uv_i^*$ و $x_i = Lx_i^*$ خواهد بود. هم چنین بالا نویس "*" به معنی نرمال شده متغیر مذکور می‌باشد، یعنی v_i^* مؤلفه سرعت بدون بعد و x_i^* متغیر بدون بعد برای X و Y و Z هستند. به همین ترتیب متغیر زمان به صورت ذیل نرمال می‌شود:

$$t^* = \frac{t}{(L/U)} = \frac{tU}{L} \quad (7-6)$$

که در این جا $t = L/U t^*$ می‌باشد. فرض می‌کنیم که سیال مغشوش بوده و فشار بدون بعد به صورت ذیل نوشته شود:

$$P^* = \frac{P}{\rho U^2} \quad (7-7)$$

⁶ Characteristic Length
⁷ Characteristic Velocity
⁸ Characteristic Pressure
⁹ Inertia Force

که $P = \rho U^2 P^*$ خواهد بود. هم چنین $D/Dt^* = (L/U)D/Dt$ می‌باشد. با اعمال متغیرهای بدون بعد در معادله ناویر-استوکس می‌توانیم بنویسیم:

$$\left(\frac{\rho U^2}{L}\right) \frac{Dv_i^*}{Dt^*} = -\frac{\rho U^2}{L} \frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} - \rho g \frac{\partial h^*}{\partial x_i^*} + \frac{U\mu}{L^2} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} \right] \quad (7-8)$$

با ساده سازی و تقسیم کردن هر دو طرف معادله (7-8) بر $\rho U^2/L$ خواهیم داشت:

$$\frac{Dv_i^*}{Dt^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} - \frac{gL}{U^2} \frac{\partial h^*}{\partial x_i^*} + \frac{\mu}{\rho UL} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} \right] \quad (7-9)$$

همان گونه که در معادله (7-9) دیده می‌شود، تمام عبارات بدون بعد می‌باشند. اگر به دو عبارت gL/U^2 و $\mu/\rho UL$ دقت کنید، با اعمال ابعاد متغیرها در آنها به بدون بعد بودن آنها پی خواهید برد.

این دو عبارت یا دو گروه بدون بعد، ترکیبی از متغیرهای سیال هستند که دارای مفهوم فیزیکی خاص می‌باشند. در حرکت سیال، معمولاً نیروهای اینرسی، گرانشی و ویسکوز حاکم هستند، به طوری که در جریان سیال، کسر هر یک از این نیروها نسبت به یکدیگر مهم می‌باشد. نسبت هر یک از این نیروها با عناوین خاص معرفی شده‌اند. به عنوان مثال عدد رینولدز¹⁰ به صورت ذیل تعریف شده است:

$$Re = \frac{\text{نرخ تغییرات مومنوم}}{\text{نیروی ویسکوز}} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی ویسکوز}} \quad (7-10)$$

اگر مشخصه نیروهای اینرسی و ویسکوز را در تعریف بالا جاگذاری نمایم، خواهیم داشت:

$$Re = \frac{\rho U^2}{\mu} = \frac{\rho UL}{\mu} \quad (7-11)$$

معادله (7-11) تعریف عدد رینولدز خواهد بود. به همین ترتیب برای عدد فرود¹¹ خواهیم داشت:

$$Fr = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی گرانشی}} = \frac{\rho U^2}{\rho gL} \quad (7-12)$$

پس عدد فرود به صورت ذیل تعریف می‌شود:

¹⁰ Reynolds Number

¹¹ Frude Number

$$Fr = \frac{U^2}{gL} \quad (7-13)$$

حال با استفاده از تعاریف (7-11) و (7-13) برای اعداد رینولدز و فرود، می توان معادله ناویر-استوکس بدون بعد را به صورت ذیل نوشت:

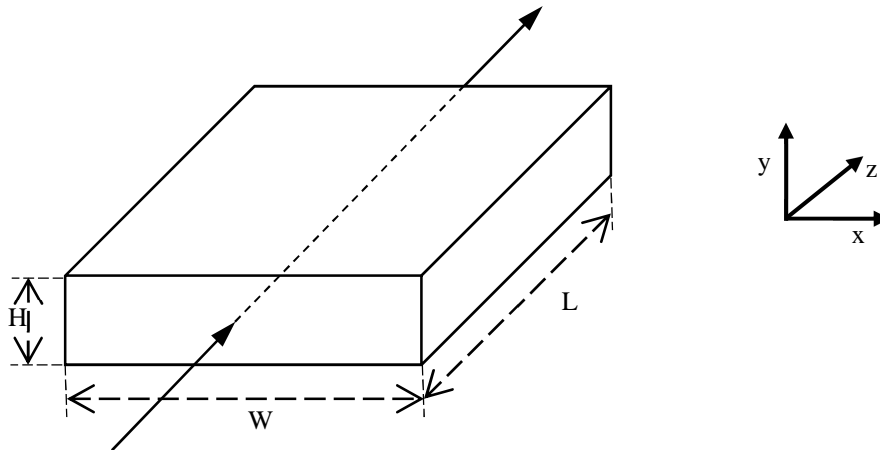
$$\frac{Dv_i^*}{Dt^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} - \frac{1}{Fr} \frac{\partial h^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} \right] \quad (\text{شکل بدون بعد اندیسی معادله ناویر-استوکس}) \quad (7-14)$$

$$\frac{Dv_i^*}{Dt^*} = -\nabla P^* - \frac{1}{Fr} \nabla h^* + \frac{1}{Re} \nabla^2 v^* \quad (\text{شکل برداری بدون بعد معادله ناویر-استوکس})$$

بنابراین از معادله (7-14) استنباط می شود که در حرکت سیالات که نیروهای ویسکوز و گرانشی حاکم هستند، همیشه دو گروه بدون بعد رینولدز و فرود به عنوان مشخصه های حرکت سیال مورد توجه خواهد بود.

۳. معادلات بدون بعد حرکت سیالات ویسکوز در مجاری بسته

حرکت سیال ویسکوز را در یک کانال^{۱۲} که عرض آن کم است، در نظر بگیرید. در این جا داکت یا کانال مستطیلی شکل بوده و جریان به صورت آرام و پایدار می باشد.



شکل ۷-۲: حرکت سیال در یک داکت

در این مثال متغیرهای طولی به صورت L ، W و H می باشند و متغیرهای سیال ρ و μ هستند. چون سیال در مجاری بسته حرکت می کند، نیروی گرانشی به صورت ρgh به فشار اضافه شده است به طوری که برای این جریان، معادله ناویر-استوکس به صورت بدون بعد ذیل نوشته می شود:

¹² Duct

$$\frac{Dv_i^*}{Dt^*} = -\frac{\partial \bar{P}^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} \right] \quad (\text{شکل بدون بعد اندیسی}) \quad (7-15)$$

$$\frac{Dv_i^*}{Dt^*} = -\nabla \bar{P}^* + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{v} \quad (\text{شکل بدون بعد برداری})$$

که $\bar{P} = P + \rho gh$ ، فشار هیدرواستاتیکی بوده و به صورت $P^* = \bar{P} / \rho U^2$ بدون بعد شده است. در این جا عدد رینولدز

به صورت ذیل تعریف می شود:

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle D_H}{\mu} \quad (7-16)$$

که $\langle v \rangle$ ، سرعت متوسط در داکت بوده و D_H ، قطر هیدرولیکی می باشد و به صورت ذیل تعریف می شود:

$$D_H = 2R_H = 2 \frac{\text{مساحت سطح مقطع عمود بر جریان}}{\text{محیط تر شده توسط سیال}} \quad (7-17)$$

چون ابعاد داکت در این جا مهم است، بنابراین مؤلفه های سرعت بدون بعد و فشار بدون بعد به صورت ذیل به گروه های

بدون بعد وابسته می باشد:

$$v_i^* = f\left(x^*, y^*, z^*, \frac{W}{H}, Re\right) \quad (7-18)$$

$$\bar{P}^* = f\left(x^*, y^*, z^*, \frac{W}{H}, Re\right)$$

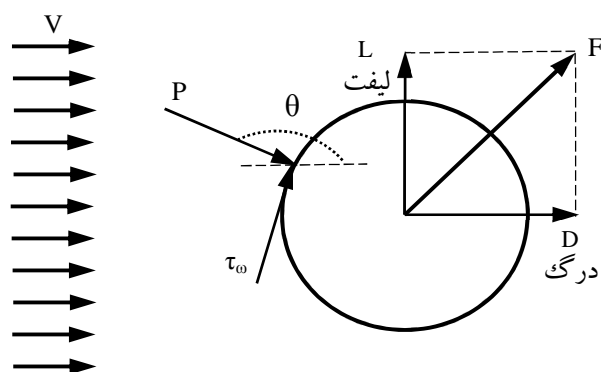
۵. درگ^{۱۶} و لیفت^{۱۷}: (Optional)

حرکت سیال بر اجسام غوطه‌ور^{۱۸} یا حرکت اجسام غوطه‌ور در سیال همیشه با مقاومت فشاری و اصطکاک همراه است. در حرکت سیال بر روی یک شیء صلب، معمولاً نیرویی دینامیکی از سوی سیال بر مرزهای شیء وارد می‌شود. مطابق شکل (۷-۳)، حرکت جریانی یکنواخت را بر روی یک شیء صلب ملاحظه کنید.

¹⁶ Drag

¹⁷ Lift

¹⁸ Immersed



شکل ۳-۷: نیروی دینامیکی، نیروی درگ و لیفت

همان طور که نشان داده شده است، نیروی دینامیکی \vec{F} دارای دو مؤلفه می‌باشد که مؤلفه نیروی موازی جریان آزاد را نیروی درگ (D) و مؤلفه نیروی عمود بر جریان آزاد را لیفت (L) گویند. جریان آزاد با V نشان داده شده است. حال سؤالی قابل طرح است که ماهیت نیروی دینامیکی چیست؟ به عبارتی سیال در حال حرکت به واسطه داشتن ویسکوزیته و فشار، دو نوع نیروی برشی و فشاری بر مرز جسم جامد وارد می‌کند. مطابق شکل بالا نیروی برشی ناشی از تنش‌های ویسکوز (τ_w) در دیواره بوده و نیروی فشاری ناشی از فشار سیال بر سطح شیء می‌باشد. پس می‌توان توضیح داد که:

نیروهای برشی → تنش برشی → ویسکوزیته و گرادیان سرعت در مرز شیء

نیروهای فشار → فشار سیال → حرکت دینامیکی سیال

پس درگ ناشی از دو اثر تنش برشی و نیروی فشار به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$D = D_f + D_p \quad (۷-۲۵)$$

که D_f درگ اصطکاکی و D_p درگ فشار است. چون درگ باید در کل سطح شیء محاسبه شود، پس خواهیم داشت:

$$D_f = \int_S \tau_w \sin \Phi \, dS \quad (۷-۲۶)$$

$$D_p = - \int_S P \cos \Phi \, dS$$

که S مساحت کل سطح شیء است که با استفاده از هندسه عمومی به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$dS = R^2 \sin \Phi \, d\theta \, d\Phi \quad (7-27)$$

زاویه بین خط عمودی بر المان سطح و جهت جریان Φ :

زاویه بین شعاع در هر نقطه از مرز شیء و محور Z : θ

درگ اصطکاکی^{۱۹} به عنوان درگ اصطکاک پوسته‌ای^{۲۰} یا مقاومت سطحی^{۲۱} نیز نامیده می‌شود. درگ فشار به عنوان درگ شکلی^{۲۲} یا درگ فرمی^{۲۳} نیز معرفی شده است. ضریب درگ^{۲۴} به صورت روابط ذیل تعریف می‌شود:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} \quad (7-28)$$

که A مساحت سطح تصویر شیء بر صفحه عمود بر جریان می‌باشد. به عنوان مثال برای یک کره، A ، مساحت دایره‌ای است که از تصویر کره بر روی سطح عمود بر جریان به دست می‌آید. متعاقباً ضرایب درگ اصطکاکی و درگ فشار به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$C_f = \frac{D_f}{\frac{1}{2} \rho U^2 A_f} \quad (7-29)$$

$$C_D = \frac{D_p}{\frac{1}{2} \rho U^2 A_p}$$

که A_f و A_p ، به شکل شیء بستگی دارند. معمولاً A_f مساحت واقعی سطح شیء و یا به عبارتی مساحت سطح تر شده^{۲۵} می‌باشد. لیکن A_p ، مساحت تصویر شیء در صفحه عمود بر حرکت سیال می‌باشد. پس خواهیم داشت:

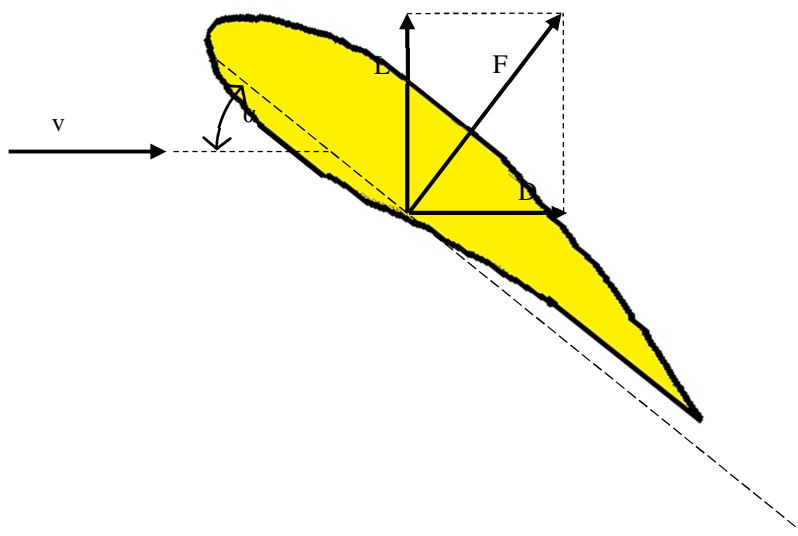
$$C_D = C_f + C_p \quad (7-30)$$

ضریب لیفت را معمولاً تفکیک نمی‌کنند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} \quad (7-31)$$

¹⁹ Frictional
²⁰ Skin-Frictional
²¹ Surface Resistance
²² Shape
²³ Form Drag
²⁴ Drag Coefficient
²⁵ Wetted

که A مساحت مشخصه^{۲۶} است و در این جا بزرگترین مساحت تصویر شیء بر صفحه عمود بر جهت جریان می باشد. به عنوان مثال حرکت یک جریان آزاد مانند باد با سرعت U را بر روی یک ایرفویل^{۲۷} مطابق شکل (۷-۴) ملاحظه نمایید. در این شکل نیروی درگ (D)، موازی جریان آزاد (U) و نیروی لیفت (L)، عمود بر جریان آزاد خواهد بود. در این حالت نشان داده شده است که نیروی های درگ و لیفت با تغییر زاویه آلفا زیاد یا کم می شوند.



شکل ۴-۶: حرکت جریان آزاد بر سطح مقطع یک ایرفویل

نسبت نیروی اینرسی به نیروی ویسکوز قبلاً به عنوان عدد رینولدز معرفی شد، بنابراین معادله (۷-۴۱) را می توان به صورت ذیل نوشت:

$$(Re)_m = (Re)_p \quad (۷-۴۲)$$

²⁶ Characteristic Area

²⁷ Airfoil

$$We = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی کشش سطحی}} = \frac{\rho L^2 v^2}{\gamma L} \quad (7-48)$$

که We به عنوان عدد وبر^{۴۲} شناخته می‌شود. γ ، کشش سطحی بر واحد طول می‌باشد. بنابراین عدد وبر به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$We = \frac{\rho L v^2}{\gamma} \quad (7-49)$$

در حالتی که تشابه دینامیکی برای مدل و نمونه برقرار باشد، لازم است که:

$$(We)_m = (We)_p \quad (7-50)$$

به عنوان نتیجه گیری لازم است توضیح داده شود که شبیه سازی در مکانیک سیالات بستگی به عوامل متعددی دارد. زمانی مدل ساده و نمونه شبیه سازی را می‌توان مقیاس سازی نمود که هر سه اصل شبیه سازی یعنی هندسی، سینماتیکی و دینامیکی برقرار باشند و برای شبیه سازی دینامیکی برابری گروه های بدون بعد برای مدل ساده و نمونه شبیه ساز لازم می‌باشد.

⁴² Weber