مکانیک سیالات پیشرفته

فصل هفتم

جریان‌های پتانسیلی و توابع پتانسیل

۱. مقدمه

در فصل‌های پنجم و هفتم به تحلیل جریان‌های ویسکوز پرداخته شد. در جریان‌های ویسکوز از عبارت‌های اینرسی یا نیروهای شتابی در معادلات حرکت صرف نظر شد و اشاره شد که معمولاً در $Re \ll 1$ می‌توان از نیروهای اینرسی چشم پوشی نمود. لیکن در جریان سیالات دور از مرزهای جامد، اثرات ویسکوزیته قابل اغماض می‌باشد. در فصل ششم در آنالیز ابعادی معادلات ناویر– استوکس توضیح داده شد که در سیالات با عدد رینولدز بالا ($Re \gg 1$)، از فشار مشخصه ρU^2 برای بدون بعد کردن فشار در معادله حرکت استفاده می‌شود. در آن جا معادله بدون بعد ناویر– استوکس به صورت ذیل به دست آمد:

$$\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + \vec{v}^* \cdot \nabla \vec{v}^* = -\nabla \overline{P}^* + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{v}^* \tag{۹–۱}$$

ملاحظه می‌شود که در شرایطی که $Re \gg 1$ باشد، عبارت‌های ویسکوز از معادله بالا حذف می‌شود، به طوری که معادله حرکت به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + \vec{v}^* \cdot \nabla \vec{v}^* &= -\nabla \overline{P}^* \\ \frac{D\vec{v}^*}{Dt^*} &= -\nabla \overline{P}^* \end{aligned} \tag{۹–۲}$$

معادله (۲–۹) برای مجاری باز به صورت واقعی به شکل ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{F} \tag{۹–۳}$$

که $\vec{F}$، بردار نیروهای جرمی یا گرانشی است و به صورت ذیل نشان داده می‌شود:

$$\vec{F} = -\nabla \phi = -\nabla (gh) \tag{۹–۴}$$

که ϕ به عنوان پتانسیل نیروی جرمی[1] شناخته می‌شود.

[1] Body-Force Potential

به جریان سیالاتی که از نیروهای ویسکوز صرفنظر می‌شود سیال غیر لزجی گفته می‌شود. معمولاً به جریان‌های هوا در مجاری اطراف هواپیما، جریان آب در دریاچه‌ها و بنادر، امواج سطحی روی آب، حرکت هوا در گردبادها و غیره، غیر لزجی یا به عبارتی جریان‌های پتانسیلی گفته می‌شود.

بنابراین معادله‌های هیدرودینامیکی برای جریان‌های غیر لزجی به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\right)=-\nabla P-\rho g\nabla h \qquad (۹-۵)$$

$$\nabla.\vec{v}=0$$

پس جریان سیالات غیر لزجی در دو حالت جواب‌های تقریبی مناسبی ارائه می‌دهند. اول این که تقریب غیر لزجی در مجاری دور از مرز جامد نتایج خیلی خوبی ارائه می‌دهدو ثانیاً برای جریان‌های داخل مجاری بسته در ابتدا و انتهای مجاری که هنوز لایه مرزی[۲] توسعه نیافته است، استفاده از تقریب غیر لزجی مناسب می‌باشد. در حوالی مرز جامد که نیروهای ویسکوز حاکم بوده و گرادیان سرعت شدید می‌باشد، تئوری لایه مرزی حاکم می‌باشد که در فصل نه به آن پرداخته خواهد شد. بنابراین جریان سیالات خارج از لایه مرزی در عدد رینولدز خیلی بالا از تئوری جریان سیالات غیر لزجی استفاده می‌شود.

در این جا لازم است که حالت‌های خاص از جریان‌های غیر لزجی مورد بررسی قرار گیرد. زیر مجموعه سیالات غیر لزجی، جریان‌های ایده‌آل[۳] و جریان‌های پتانسیلی[۴] می‌باشند. به جریان‌هایی ایده‌آل گفته می‌شود که غیر تراکمی (دانسیته ثابت) بوده و از معادلات اویلر (معادله (۵-۹)) پیروی نماید.

جریان سیال پتانسیلی به جریان‌هایی اطلاق می‌شود که غیر چرخشی[۵] باشند، به عبارتی جریانی غیر چرخشی است که بردار گردابش صفر باشد. پس می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\text{غیر چرخشی} \rightarrow \qquad \vec{\xi}=0 \quad\Rightarrow\quad \nabla\times\vec{v}=0$$

[2] Boundary Layer
[3] Ideal Fluid Flow
[4] Potential Flow
[5] Irrotational

در فصل چهار به بردار گردابش و مفهوم غیر چرخشی پرداخته شد.

حال زمانی $\nabla \times \vec{v} = 0$ می‌باشد که سرعت به صورت گرادیان یک تابع اسکالر به صورت ذیل تعریف شود:

$$\vec{v} = \nabla\phi \tag{۹-۶}$$

در این جا تابع اسکالر $\phi(t, x, y, z)$ به عنوان تابع سرعت پتانسیل[6] شناخته می‌شود. پس جریان‌های پتانسیلی به جریان-هایی اطلاق می‌شود که غیر چرخشی بوده و از رابطه (۶-۹) پیروی نماید.

۲. معادله برنولی[7]

برای جریان‌های غیر لزجی، با حذف عبارت (نیروهای) ویسکوز معادله اویلر به دست آمد. از طرف دیگر عبارت ویسکوز در دو حالت حذف می‌شود. اول در شرایطی که $\mu=0$ قرار بدهیم و در حالت دوم زمانی که بردار گردابش[8] صفر باشد.

در معادله ناویر- استوکس با قرار دادن $\mu=0$ و استفاده از روابط (۳-۹) و (۴-۹) به معادله ذیل می‌رسیم:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla\left(\frac{P}{\rho} + gz\right) \tag{۹-۷}$$

با استفاده از حساب بردارها می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}|\vec{v}|^2\right) - \vec{v} \times \vec{\xi} \tag{۹-۸}$$

که $\vec{\xi}$ بردار گردابش می‌باشد که در فصل چهارم به صورت ذیل تعریف گردید:

$$\vec{\xi} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z} = \nabla \times \vec{v} = 2\vec{\omega} \tag{۹-۹}$$

که $\vec{\omega}$، بردار سرعت زاویه‌ای می‌باشد.

بنابراین با ترکیب معادلات (۷-۹) و (۸-۹) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \vec{\xi} = -\nabla\left(\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2 + gh\right) \tag{۹-۱۰}$$

---

[6] Velocity Potential
[7] Bernoulli Equation
[8] Vorticity Vector

پس معادله (۱۰-۹) برای جریان پایدار[9] به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\nabla\left(\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}|\vec{v}|^2+gh\right)=\vec{v}\times\vec{\xi} \qquad (۹-۱۱)$$

چون $\vec{v}\times\vec{\xi}$ یک بردار می‌باشد که جهت آن عمود بر سطوح دو بردار $\vec{v}$ و $\vec{\xi}$ می‌باشد، پس عبارت داخل پرانتز در طرف چپ معادله (۱۱-۹) نیز یک کمیت اسکالر است که به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}|\vec{v}|^2+gh=c \qquad (۹-۱۲)$$

در این جا مقدار c برای هر صفحه خاص ثابت می‌باشد. در صورتی که c برای تمام صفحات ثابت باشد به معادله (۱۲-۹) معادله معروف برنولی اطلاق می‌شود که برای سیالات ایده‌آل بدون اصطکاک استفاده می‌شود.

برای جریان‌های غیرچرخشی گذرای[10] ناپایدار، "معادله ناپایدار برنولی" به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-\nabla\left(\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}|\vec{v}|^2+gh\right) \qquad (۹-۱۳)$$

۳. جریان پتانسیلی

برای جریان‌های پتانسیلی لازم نیست که معادله اویلر مستقیماً حل گردد. در این گونه جریان‌ها چون بردار گردابش صفر می‌باشد، پس می توان تابع سرعت پتانسیلی را به صورت ذیل تعریف نمود، به طوری که با مشتق گیری از این تابع مؤلفه-های سرعت در جریان پتانسیلی به دست می‌آید:

$$\begin{gathered}\vec{\xi}=2\vec{\omega}=\nabla\times\vec{v}=0\\ \vec{v}=\nabla\phi\;:\quad v_x=\frac{\partial\phi}{\partial x}\;;\quad v_y=\frac{\partial\phi}{\partial y}\;;\quad v_z=\frac{\partial\phi}{\partial z}\end{gathered} \qquad (۹-۱۴)$$

حال جریان پتانسیلی برای یک مجرای دو بعدی که مؤلفه‌های سرعت آن v_x و v_y می‌باشد، در نظر بگیرید. در این جریان، تابع جریان به صورت $\psi=\psi(x,y)$ تعریف می‌شود. بنابراین مؤلفه‌های سرعت به دو صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad (۹-۱۵)$$

[9] Steady Flow
[10] Transmit

$$v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

با جاگذاری مؤلفه‌های سرعت از معادلات (۱۵–۹) در معادله پیوستگی خواهیم داشت:

$$\nabla^2\psi = 0 \tag{۹–۱۶}$$

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{۹–۱۷}$$

که به معادلات (۱۶–۹) و (۱۷–۹) روابط لاپلاسی و به روابط (۱۵–۹) معادلات کوشی–ریمان[11] اطلاق می‌شود. حال دیفرانسیل کل دو تابع ϕ و ψ را می‌نویسیم:

$$d\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dy \tag{۹–۱۸}$$

$$d\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dy \tag{۹–۱۹}$$

معادلات (۱۸–۹) و (۱۹–۹) بر حسب مؤلفه‌های سرعت نوشته می‌شود. همچنین فرض می‌شود که ϕ و ψ مقادیر ثابتی باشند.

$$d\psi = -v_y dx + v_x dy = 0 \tag{۹–۲۰}$$

$$d\phi = v_x dx + v_y dy = 0 \tag{۹–۲۱}$$

با جابجایی عبارت‌ها در روابط (۲۰–۹) و (۲۱–۹) خواهیم داشت:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\psi = \frac{v_y}{v_x} \tag{۹–۲۲}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\phi = -\frac{v_x}{v_y} \tag{۹–۲۳}$$

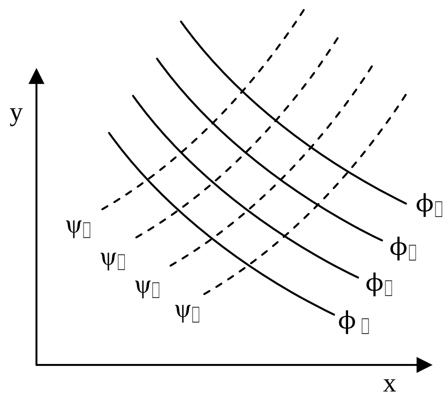
حال ملاحظه می شود که روابط (۲۲–۹) و (۲۳–۹) ضریب زوایای مماس بر منحنی‌های جریان ψ و سرعت پتانسیلی ϕ را نشان می دهند. از طرفی ملاحظه می گردد که حاصلضرب روابط مذکور برابر ۱- می‌گردد ($\nabla\phi.\nabla\psi=-1$). به عبارتی می توان نتیجه گرفت که اگر حاصلضرب ضریب زاویه دو خط مماس ۱- باشد، پس دو منحنی ψ و ϕ ثابت بر هم عمودند. شکل (۱–۹) خطوط جریان و سرعت های پتانسیلی عمود بر هم را نشان می دهد.

[11] Cauchy-Riemann

جریان پتانسیلی در مختصات استوانه ای به صورت ذیل ارائه می شود. برای یک جریان دو بعدی در مختصات استوانه ای اگر $v_z=0$ فرض شود، مولفه های سرعت بر حسب تابع سرعت پتانسیلی $\phi\ (r,\theta)$ و تابع جریان $\psi(r,\theta)$ به صورت ذیل نوشته می شود:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \tag{۹–۲۴}$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{۹–۲۵}$$



شکل ۱-۹: خطوط جریان و سرعت پتانسیلی عمود بر هم در جریان دو بعدی

معادله پیوستگی و شرایط غیرچرخشی بودن به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \tag{۹–۲۶}$$

$$\vec{\xi}(r,\theta) = \nabla \times \vec{v}(r,\theta) = 0 \tag{۹–۲۷}$$

$$\xi_z = \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} = 0 \tag{۹–۲۸}$$

پس با جایگذاری روابط (۲۴-۹) و (۲۵-۹) در معادلات (۲۶-۹) و (۲۸-۹) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \tag{۹–۲۹}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \tag{۹–۳۰}$$

برای جریان پتانسیلی که $v_\theta = 0$ باشد، مولفه های سرعت بر حسب $\psi(r,z)$ و $\phi(r,z)$ به صورت ذیل نوشته می شود:

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad (۹-۳۱)$$

$$v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad (۹-۳۲)$$

همچنین معادله پیوستگی و شرایط غیرچرخشی به صورت ذیل حاصل می شود:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (۹-۳۳)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \qquad (۹-۳۴)$$

بنابراین برای به دست آوردن مولفه های سرعت در جریان پتانسیلی لازم است که معادلات لاپلاس را در دستگاه مختصات مربوط با استفاده از روش های عددی یا آنالوگ های مکانیکی و یا از برهم نهش توابع اولیه حل نمود.

برای به دست آوردن P=P(x,y) ، با داشتن مولفه های سرعت، از معادله برنولی استفاده می شود. پس راه حل عمومی برای جریان های پتانسیلی به صورت ذیل خلاصه می شود:

معادله پیوستگی $\xleftarrow{\text{استفاده از تابع پتانسیلی}}$ معادله لاپلاس $\leftarrow$ مولفه های سرعت

معادله مومنتوم اویلر $\xleftarrow{\vec{\xi}=0}$ معادله برنولی $\leftarrow$ توزیع فشار

شرایطی مرزی در جریان های پتانسیلی برای حل معادلات لاپلاس مقداری متفاوت با سیالات ویسکوز می باشد. اصل عدم لغزش[12]در مرزهای جامد برای این گونه سیالات برای مرزهای جامد و مرزهای جامد متحرک به صورت ذیل استفاده می شود. برای سیالات ویسکوز تمام مؤلفه های مماسی و عمودی در مرز جامد ساکن برابر صفر در نظر گرفته می شود. لیکن برای سیالات غیر ویسکوز فقط مولفه های عمودی سرعت بر مرزهای جامد صفر می شود. لیکن مؤلفه های مماسی وجود خواهد داشت. چون گرادیان سرعت در مرز جامد وجود ندارد. پس می توان نوشت:

[12] No slip condition

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$ (برای مرز جامد ساکن) (۹-۳۵)

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = U \cdot \vec{n}$$ (برای مرز جامد متحرک با سرعت U) (۹-۳۶)

که بردار $\vec{n}$ برداری عمودی بر سطح مرز جامد می باشد و U بردار سرعت جسم می باشد. برای جریان‌های آزاد که مولفه سرعت به صورت $v_x = V^\infty$ باشد، شرایط مرزی به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = V^\infty$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = v_y = 0 \qquad (۹\text{-}۳۷)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = v_z = 0$$

۴. تابع پتانسیل کمپلکس[13] و سرعت کمپلکس[14]

در قسمت قبل اشاره شد که برای جریان های پتانسیلی دو بعدی می توان دو تابع اسکالر $\psi(x,y)$ و $\phi(x,y)$ را تعریف نمود به گونه ای که معادله لاپلاس برای هر دو تابع از معادله پیوستگی به دست آید. در نظریه تابع کمپلکس ثابت شده است که اگر دو معادله لاپلاسی برای دو تابع اسکالر عددی وجود داشته باشد، می توان یک تابع پتانسیل کمپلکس تعریف کرد که دو تابع اسکالر به صورت ذیل بخش های واقعی و موهومی تابع پتانسیل مذکور را تشکیل دهند:

$$F(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y) \qquad (۹\text{-}۳۸)$$

$\phi(x,y)$: بخش واقعی تابع F

$\psi(x,y)$: بخش موهومی تابع F

که z متغیر کمپلکس بوده و به صورت ذیل تعریف می شود:

$$z = x + iy$$ مختصات دکارتی (۹-۳۹)

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$ مختصات قطبی (۹-۴۰)

که در این جا $i=\sqrt{-i}$ عدد کمپلکس می باشد.

[13] Complex Potential Function
[14] Complex velocity

حال اگر $F(z)$ یک تابع تحلیلی[۱۵] باشد، آنگاه ϕ و ψ به طور خودکار معادلات کوشی-ریمان (معادلات ۱۵-۹) را ارضا خواهد نمود. پس با داشتن چنین تابعی برای $F(z)$، قسمت واقعی تابع مذکور برای ϕ و قسمت موهومی تابع مذکور برای ψ در نظر گرفته می شود. به این ترتیب نظریه متغیرهای کمپلکس معادلات $\nabla^2\psi=0$ و $\nabla^2\phi=0$ را تضمین خواهد نمود. تابع ثابت ψ میدان جریان حرکت سیال پتانسیلی را توصیف می نماید. بنابراین با این روش می توان مؤلفه های سرعت را از توابع ψ یا ϕ به دست آورد.

نقص این روش این است که ابتدا باید توابع کمپلکس را از قبل تعیین نمایید، و سپس تست نمایید که جواب های به دست آمده برای مولفه های سرعت با واقعیت فیزیکی جریان منطبق می باشد. نقص دوم این است که برای جریان های سه بعدی روش نظریه کمپلکس را نمی توان اعمال نمود. به هر حال از مزایای این روش عدم استفاده از حساب دیفرانسیل برای حل معادلات حرکت می باشد. پس می توان روش مذکور را به صورت ذیل خلاصه نمود:

$$\text{تابع کمپلکس} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \xrightarrow{\text{قسمت موهومی}} \psi(x,y) \\ \xrightarrow{\text{قسمت واقعی}} \phi(x,y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{مولفه های سرعت} \xrightarrow{\text{معادله برنولی}} \text{تابع توزیع فشار}$$

سرعت کمپلکس با مشتق‌گیری از تابع کمپلکس $F(z)$ حاصل می‌شود. در نظریه کمپلکس ثابت می‌شود که مشتق dF/dz تابعی نقطه‌ای است که مقدارش مستقل از جهت مشتق‌گیری این تابع می باشد. بنابراین می توان نتیجه گرفت که :

$$w(z) = \frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{۹-۴۱}$$

که رابطه (۴۱-۹) سرعت کمپلکس نامیده می شود. بنابراین با استفاده از روابط (۱۵-۹) خواهیم داشت :

$$w(z) = v_x + iv_y \tag{۹-۴۲}$$

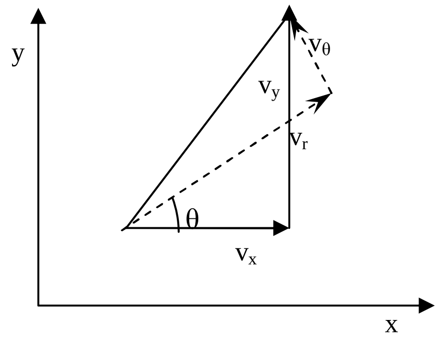
سرعت کمپلکس مزدوج[۱۶] نیز به صورت ذیل نوشته می شود :

$$\overline{w}(z) = v_x - iv_y \tag{۹-۴۳}$$

که خواهیم داشت :

[15] Analytical
[16] Conjugate

$$w\bar{w} = (v_x - iv_y)(v_x + iv_y) = {v_x}^2 + {v_y}^2 = |v|^2 \quad (۹-۴۴)$$



شکل ۲-۹: مولفه های سرعت در دو دستگاه مختصات دکارتی و قطبی

مؤلفه های سرعت در دستگاه مختصات قطبی مطابق شکل (۲-۹)، به صورت ذیل به دست می آیند:

$$v_x = v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta \quad (۹-۴۵)$$

$$v_y = v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta \quad (۹-۴۶)$$

پس سرعت کمپلکس در مختصات قطبی (استوانه ای) با جایگذاری معادلات (۹-۴۵) و (۹-۴۶) در معادله (۹-۴۲) به صورت ذیل نوشته می شوند:

$$\begin{gathered} w(z) = v_x - iv_y = (v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta) - i(v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta) \\ w(z) = v_r(\cos\theta - i\sin\theta) - iv_\theta(\cos\theta - i\sin\theta) \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \\ w(z) = (v_r - iv_\theta)e^{-i\theta} \end{gathered} \quad (۹-۴۷)$$

۵. نظریه کمپلکس[17] و اصل برهمنهش[18]

در نظریه کمپلکس بیان می نماید که اگر چند تابع کمپلکس به صورت های $F_1(z)$، $F_2(z)$ و .... داشته باشیم، که هر کدام از توابع مذکور یک جریان پتانسیلی را توصیف نمایند، پس مجموع توابع مذکور یک تابع جدید کمپلکس را تشکیل می دهد به طوری که تابع جدید یک جریان پتانسیلی خاص را توصیف نماید.

$$\left.\begin{matrix} F_1(z) \longrightarrow \phi_1, \psi_1 \\ F_2(z) \longrightarrow \phi_2, \psi_2 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{پس}} F(z) = F_1(z) + F_2(z) \Rightarrow \phi\,,\psi$$

[17] Complex Theory
[18] Principle of Superposition

به عبارتی دیگر می توان نتیجه گیری نمود که:

$$\left.\begin{array}{r} F_1(z) \longrightarrow \nabla^2\phi_1 = 0,\ \ \nabla^2\psi_1 = 0 \\ F_2(z) \longrightarrow \nabla^2\phi_2 = 0, \nabla^2\psi_2 = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow F(z) \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \nabla^2(\phi) = 0;\ \ (\phi = \phi_1 + \phi_2) \\ \nabla^2(\psi) = 0;\ \ (\psi = \psi_1 + \psi_2) \end{array}\right.$$

بنابراین با داشتن توابع کمپلکس برای جریان های ساده پتانسیلی می توان با جمع جریان های مذکور تابع جدیدی برای ϕ و ψ به دست آورد که جریان های بسیار پیچیده پتانسیلی را توصیف نماید. در بخش های بعد ابتدا به جریان های ساده پرداخته می شود و سپس معادلات سرعت و فشار برای جریان های پتانسیلی پیچیده حاصل می شود.

۶. توابع پتانسیلی کمپلکس برای جریان های ساده پتانسیلی

در این جا جریان های ساده پتانسیلی در سه دسته جریان های یکنواخت[19]، جریان چشمه و چاه[20]، و جریان گرداب[21] مورد بررسی قرار می دهیم.

۶-۱. جریان یکنواخت

جریان ساده یکنواخت به صورت ذیل توصیف می شود: $v_x=U$ ، $v_y=0$. پس توابع ψ و ϕ را می توان از معادلات دیفرانسیل ساده ذیل به دست آورد:

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = U = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad (۹-۴۸)$$

$$v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (۹-۴۹)$$

با انتگرالگیری از روابط (۴۸-۹) و (۴۹-۹) خواهیم داشت:

$$\psi = Uy + f(x) \qquad ; \qquad \psi = g(y) \qquad (۹-۵۰)$$

بنابراین دو تابع $g(y)$ و $f(x)$ ثابت های انتگرالگیری هستند که از انتگرالگیری مشتق های جزیی به دست آمده اند. با توجه به این که با مشتق گیری توابع مذکور ثابت ها حذف می شوند، مقدارشان اختیاری است، پس فرض می نماییم $f(x)=g(y)=0$ می باشند. پس برای جریان یکنواخت خواهیم داشت:

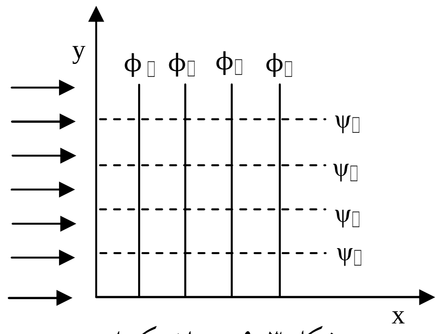
[19] Uniform flow
[20] Source & sink
[21] Vortex

$$\psi = Uy \tag{۹-۵۱}$$

از طرفی چون تابع ϕ عمود بر ψ می باشد، از روابط (۹-۴۸) و (۹-۴۹) می توان نوشت:

$$\phi = Ux \tag{۹-۵۲}$$

شکل (۳-۹) خطوط جریان و پتانسیلی را برای جریان یکنواخت نشان می دهد.



شکل ۳-۹: جریان یکنواخت

حال برای جریان یکنواخت تابع کمپلکس را به شکل ذیل می بنویسیم :

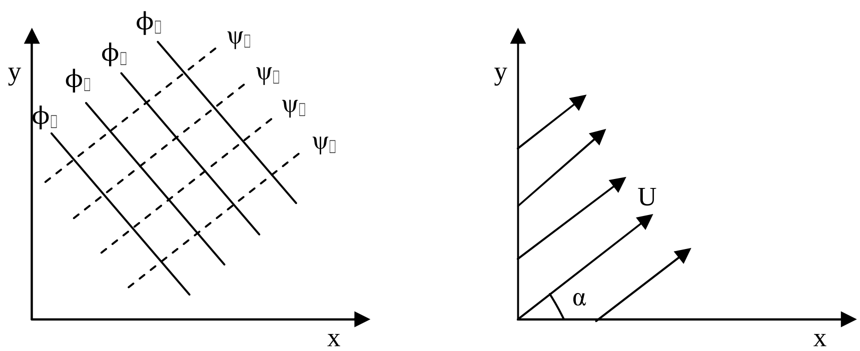
$$F(z) = Cz \quad ; \qquad C = \text{ثابت} \tag{۹-۵۳}$$

$$W(z) = \frac{dF}{dx} = C \tag{۹-۵۴}$$

$$W(z) = v_x - iv_y = U = C \tag{۹-۵۵}$$

چون تابع F برای جریان یکنواخت صادق است، پس تابع F(z)=Uz تابع کمپلکس مناسب برای این جریان می باشد.

حال جریان یکنواخت را در نظر بگیرید که با محور xها زاویه α مطابق شکل (۴-۹)، می سازد:



شکل ۴-۹: جریان پتانسیلی یکنواخت مورب با زاویه α

مشاهده می شود که $v_x = U\cos\alpha$ و $v_y = U\sin\alpha$ می باشد، لذا داریم:

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad \therefore \qquad \psi = U\cos\alpha + f(x) \tag{۹-۵۶}$$

$$v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad \therefore \qquad \psi = -U\sin\alpha + g(x) \tag{۹-۵۷}$$

پس با فرض $f(x)=g(x)=0$ رابطه های ψ و ϕ به دست می آید:

$$\psi = U(y\cos\alpha - x\sin\alpha) \tag{۹-۵۸}$$

$$\phi = U(x\cos\alpha + y\sin\alpha) \tag{۹-۵۹}$$

بنابراین برای جریان یکنواخت مورب با زاویه α ، $F(z)$ به صورت ذیل تعریف می شود:

$$F(z) = Ce^{-i\alpha}z$$
$$w(z) = \frac{dF}{dz} = C(\cos\alpha - i\sin\alpha) = v_x - iv_y = U(\cos\alpha - i\sin\alpha) \tag{۹-۶۰}$$

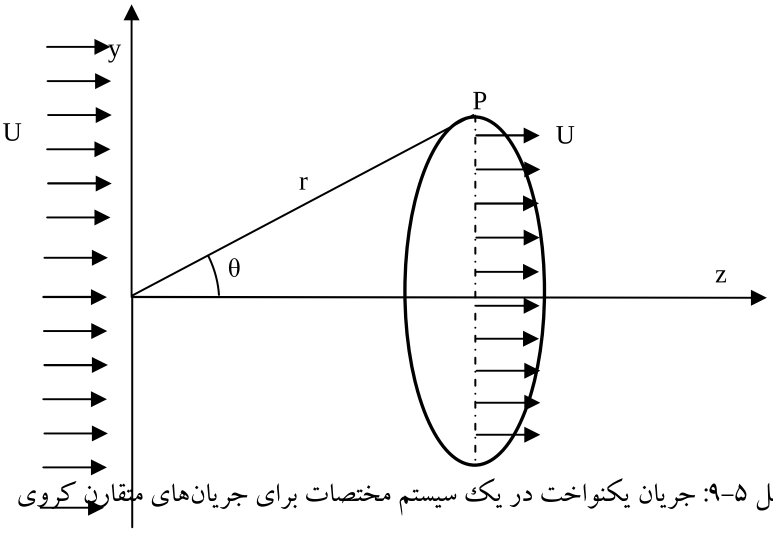
پس $C=U$ می باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$F(z) = Ue^{-i\alpha}z \tag{۹-۶۱}$$

۲-۶. جریان یکنواخت در سیستم سه بعدی[22]

برای جریان های پتانسیل سه بعدی لازم است که جریان یکنواخت برای حالت جریان های متقارن تعریف شود. جریان های یکنواخت اطراف کره مورد توجه می باشد. مختصات قطبی کروی در یک سیستم کروی متقارن مطابق شکل(۵-۹) نشان داده شده است:

[22] Uniform Stream in 3D



شکل ۵-۹: جریان یکنواخت در یک سیستم مختصات برای جریان‌های متقارن کروی

جهت حرکت سیال z می باشد و شعاع دایره $r\sin\theta$ بوده که از نقطه P می گذرد. دبی جریان که از دایره می گذرد به صورت ذیل نوشته می شود:

$$Q = \pi(r\sin\theta)^2 U$$

مولفه های سرعت U بر حسب مختصات قطبی به صورت $v_r = U\cos\theta$ و $v_\theta = -U\sin\theta$ می باشد. چون $U^2 = v_\theta^2 + v_r^2$ می باشد. از طرفی مولفه های سرعت بر حسب ϕ و ψ به صورت ذیل نوشته می شود:

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U\cos\theta \qquad (۹-۶۲)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U\sin\theta \qquad (۹-۶۳)$$

پس باا نتگرالگیری از معادلات (۶۲-۹) و (۶۳-۹) خواهیم داشت:

$$\psi(r,\theta) = \frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta \qquad (۹-۶۴)$$

$$\phi(r,\theta) = Ur\cos\theta \qquad (۹-۶۵)$$

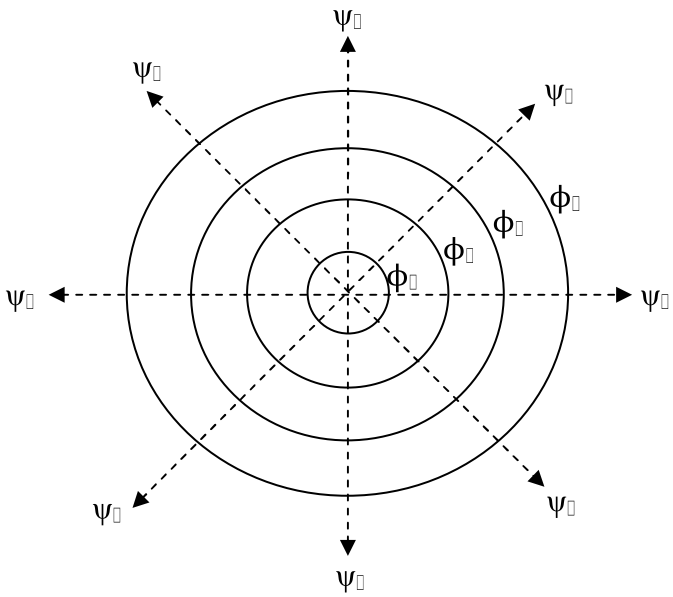
باید توجه داشت که در جریان های سه بعدی تابع کمپلکس تعریف نشده است.

۳-۶. جریان چشمه و چاه نقطه ای در مختصات قطبی کره ای[۲۳]

جریان چشمه جریانی پتانسیلی است که در مرکز هندسی یک کره فرضی قرار دارد و جریان سیال در جهت تمام شعاع های کره فرضی از چشمه جاری است. خطوط جریان و پتانسیل در مختصات قطبی در شکل (۶-۹) نشان داده شده است. قدرت چشمه به صورت m نشان داده شده است و برحسب دبی حجمی سیال به طور عمود بر سطح کره به طرف بیرون جریان دارد. برای به دست آوردن m، کره ای فرضی را در نظر بگیرید که شعاع آن r باشد، پس خواهیم داشت: $4\pi m=v_r(4\pi r^2)$ از این جا سرعت شعاعی جریان به صورت ذیل به دست می آید:

$$v_r = \frac{m}{r^2} \tag{۹-۶۶}$$

چون v_θ برابر صفر است، پس ψ و ϕ در مختصات قطبی کروی به صورت ذیل به دست می آید:



شکل ۶-۹: خطوط جریان و پتانسیل در چشمه نقطه ای در مختصات قطبی

$$v_r = \frac{m}{r^2} = \frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{۹-۶۷}$$

$$v_\theta = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{۹-۶۸}$$

[23] Point Source, Sink in spherical polar coordinate

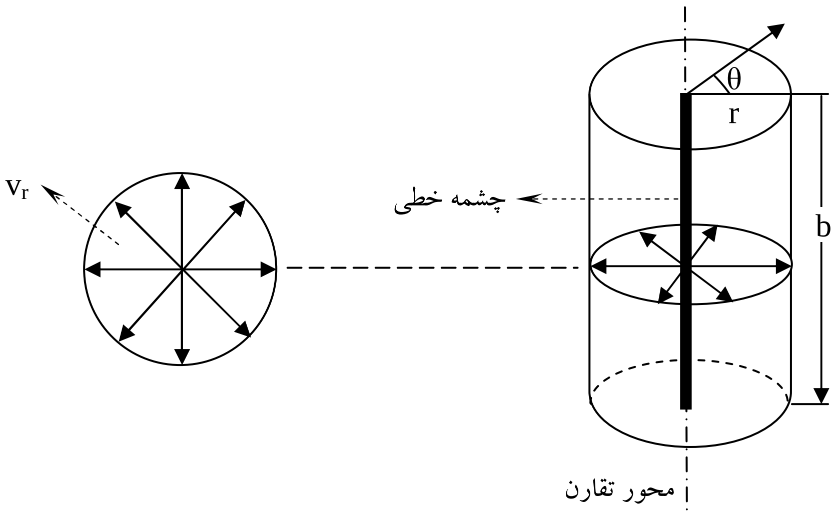
پس با انتگرال گیری از معادلات (۶۷–۹) و (۶۸–۹) خواهیم داشت:

$$\psi = m\cos\theta = \frac{mz}{r}$$
$$\phi = -\frac{m}{r} \qquad (۹–۶۹)$$

۴-۶. جریان پتانسیلی چشمه خطی[۲۴]

جریان چشمه خطی به صورت جریان شعاعی از یک منبع سیال خطی به صورت متقارن از سطح جانبی یک استوانه فرضی در نظر گرفته می شود. شکل (۷–۹) سطح مقطع و یک چشمه خطی را نشان می دهد. مطابق شکل، محور z از یک لوله بسیار باریک که در تمام اطراف آن در طول لوله دارای سوراخ های بسیاری است تشکیل شده است، دبی حجمی جریان برابر با حجم سیالی است که بر واحد زمان از سطح جانبی استوانه در شعاع r عبور می کند:

$$Q = v_r(2\pi rb) = \text{ثابت}$$



ب– سطح مقطع استوانه در r　　　　　　الف– چشمه خطی

شکل ۷–۹: چشمه خطی

که b طول استوانه و v_r سرعت شعاعی چشمه خطی می باشد. همان گونه که ملاحظه می شود دبی همواره ثابت بوده و هرچه سیال از محور چشمه دور می شود سرعت آن کاهش می یابد. بنابراین سرعت شعاعی چشمه به صورت ذیل نوشته می شود:

[24] Line Source

$$v_r = \frac{m}{r} \qquad ; \qquad m = rv_r \tag{۹-۷۰}$$

لذا خواهیم داشت:

$$Q = 2\pi mb \qquad ; \qquad m = \frac{Q}{2\pi b} \tag{۹-۷۱}$$

بنابراین مؤلفه های سرعت برحسب ϕ و ψ به صورت ذیل نوشته می شود:

$$v_r = \frac{m}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \tag{۹-۷۲}$$

$$v_\theta = 0 = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \tag{۹-۷۳}$$

با انتگرالگیری معادلات (۷۲-۹) و (۷۳-۹) توابع جریان و پتانسیلی به صورت ذیل به دست می آید:

$$\phi = m\ln r \qquad ; \qquad \psi = m\theta \tag{۹-۷۴}$$

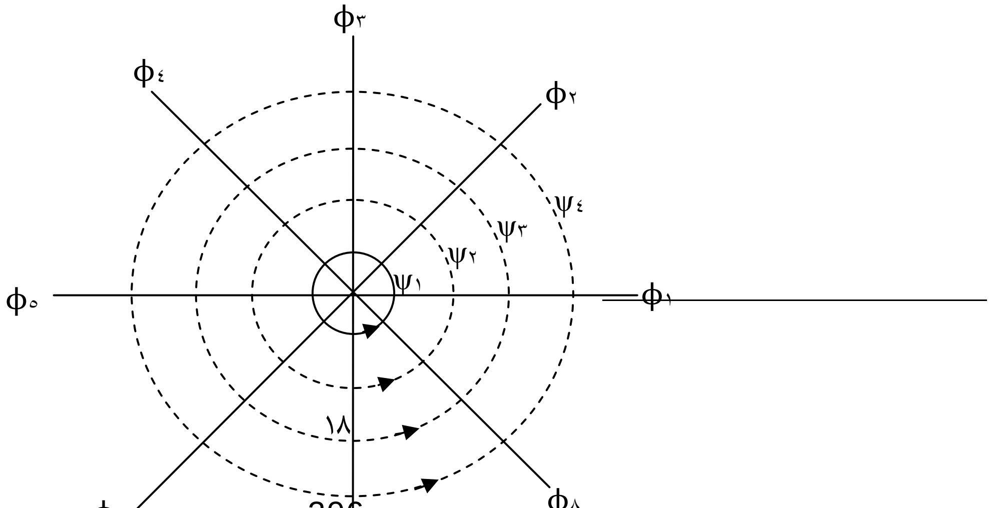
به همین ترتیب توابع کمپلکس برای چشمه خطی به صورت ذیل نوشته می شود:

$$F(z) = m\ln z \qquad (z = 0 \text{ چشمه خطی در}) \tag{۹-۷۵}$$

$$F(z) = m\ln(z - z_0) \qquad (z = z_0 \text{ چشمه خطی در}) \tag{۹-۷۶}$$

۵-۶. گرداب خطی[۲۵]

گرداب خطی جریان پتانسیل غیر چرخشی است که جریان غیر ویسکوز حول محور z به صورت دایره‌ای می‌چرخد و بر خلاف جریان چشمه خطی، سرعت جریان در جهت شعاع‌های استوانه صفر می‌باشد. شکل (۸-۹) دیاگرام یک گرداب خطی را همراه با خطوط جریان و پتانسیلی نشان می‌دهد.



[25] Line Vortex

شکل ۸-۹: گرداب آزاد

در این جا $v_r=0$ بوده، لیکن $v_\theta=c/r$ فرض می‌شود. به عبارتی هر چه از محور z دور می‌شویم سرعت چرخشی کاهش پیدا می‌نماید. پس توابع ψ و ϕ به صورت ذیل به دست می‌آیند:

$$v_r = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \tag{۹-۷۷}$$

$$v_\theta = \frac{c}{r} = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \tag{۹-۷۸}$$

پس با انتگرال گیری از روابط (۷۶-۹) و (۷۷-۹) خواهیم داشت:

$$\psi = -c \ln r \qquad ; \qquad \phi = C\theta \tag{۹-۷۹}$$

از طرفی تابع کمپلکس برای گرداب خطی به شکل ذیل ارائه می‌شود:

$$F(z) = -ic \ln z \tag{۹-۸۰}$$

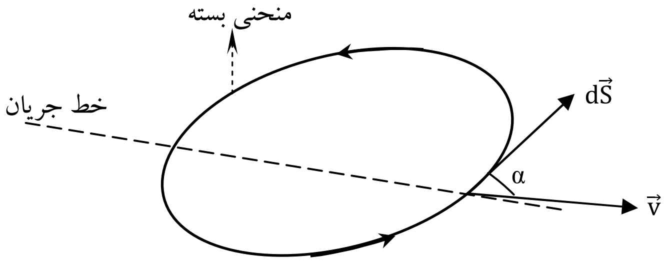
که علامت منفی به عنوان گرداب مثبت یعنی عکس حرکت عقربه‌های ساعت تلقی می‌شود. سرعت پتانسیلی نیز به شکل ذیل حاصل می‌شود:

$$\begin{gathered} w(z) = \frac{dF}{dz} = -i\frac{c}{z} = -i\frac{c}{r}e^{-i\theta} \\ w(z) = (v_r - iv_\theta)e^{-i\theta} \end{gathered} \tag{۹-۸۱}$$

از معادلات (۸۱-۹) می‌توان مؤلفه‌های سرعت را که قبلاً در بالا ارائه شده بود نشان داد. حال چگونه مقدار ثابت C را می‌توان محاسبه کرد؟ در این جا لازم است "گردابی[۲۶]" تعریف شود. در یک میدان جریان پتانسیل، گردابی در داخل یک منحنی بسته مطابق شکل (۹-۹) به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\Gamma = \oint_c \vec{v} \cdot d\vec{s} \tag{۹-۸۲}$$

که Γ یک انتگرال خطی بردار سرعت بوده که به صورت موضعی همواره به منحنی بسته مطابق شکل (۹-۹) وابسته می باشد



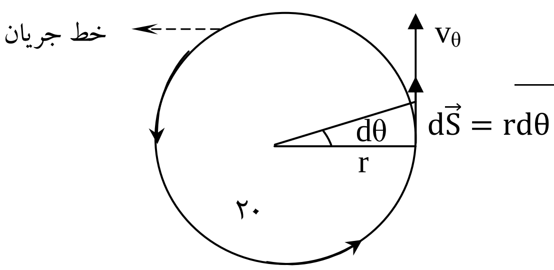
شکل ۹-۹: بردار سرعت در منحنی بسته

باید توجه داشت که گردابی از طریق تئوری استوکس به گردابش طبق رابطه‌ی ذیل مربوط می‌شود:

$$\Gamma = \int_c \vec{v}.d\vec{s} = \iint_{Area} \left(\underbrace{\nabla \times \vec{v}}_{\xi}\right).dA \tag{۹-۸۳}$$

البته گردابی همیشه در مرکز گرداب تعریف می‌شود، به طوری که فقط در مرکز $\xi \neq 0$ می‌باشد. مطابق شکل(۹-۹)، $d\vec{s}$ یک المان طولی از منحنی بسته می‌باشد. حال گردابی را برای یک جریان گرداب خطی مطابق شکل (۱۰-۹) به صورت ذیل می‌نویسیم:

[26] Circulation



شکل ۱۰-۹: بردار سرعت در حرکت گردابی آزاد بر روی منحنی بسته

$$\Gamma = \oint_c \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta \tag{۹-۸۴}$$

پس گردابی با جایگذاری $v_\theta=c/r$ در معادله (۸۴-۹) حاصل می‌شود.

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} c d\theta = 2\pi c \qquad ; \qquad c = \frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{۹-۸۵}$$

بنابراین سرعت گرداب به صورت $v_\theta=\Gamma/2\pi r$ و همچنین تابع کمپلکس به صورت ذیل برای گرداب خطی به دست می-آید. "Γ" را قدرت گرداب نیز می‌گویند.

$$F_z = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln(z-z_0) \qquad (\text{گرداب در } z=z_0) \tag{۹-۸۶}$$

جدول (۱-۹) خلاصه توابع کمپلکس را برای جریان‌های ساده نشان می‌دهد.

جدول (۱-۹) خلاصه توابع کمپلکس را برای جریان‌های ساده

جریان پتانسیلی	F(z)	ψ	ϕ
جریان یکنواخت ساده دو بعدی	Uz	Uy	Ux
جریان یکنواخت با زاویه α دو بعدی	$Ue^{-i\alpha}z$	$U(y\cos\alpha - x\sin\alpha)$	$U(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$
جریان چشمه و چاه خطی	$\pm m\ln(z-z_0)$	$m\theta$	$m\ln r$
جریان گرداب خطی	$\pm i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln(z-z_0)$	$-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$	$\frac{\Gamma}{2\pi}\theta$

۷. خلاصه (جمع بندی)

در جریان سیالات دور از مرزهای جامد، اثرات ویسکوزیته قابل اغماض می‌باشد. به جریان سیالاتی که از نیروهای ویسکوز صرفنظر می‌شود سیال غیر لزجی گفته می‌شود. در حوالی مرز جامد که نیروهای ویسکوز حاکم بوده و گرادیان سرعت شدید می‌باشد، تئوری لایه مرزی حاکم می‌باشد. به جریان‌هایی ایده‌آل گفته می‌شود که غیر تراکمی (دانسیته ثابت) بوده و از معادلات اویلر پیروی نماید. جریان سیال پتانسیلی به جریان‌هایی اطلاق می‌شود که غیر چرخشی باشند. دو منحنی تابع جریان ψ و تابع پتانسیل ϕ در مقادیر ثابت بر هم عمودند. برای جریان‌های پتانسیلی دو بعدی می توان دو تابع اسکالر ψ و ϕ را تعریف نمود به گونه‌ای که معادله لاپلاس برای هر دو تابع از معادله پیوستگی به دست آید. در نظریه تابع کمپلکس ثابت شده است که اگر دو معادله لاپلاسی برای دو تابع اسکالر عددی وجود داشته باشد، می توان یک تابع پتانسیل کمپلکس تعریف کرد که توابع اسکالر ψ و ϕ به ترتیب بخش های موهومی و واقعی تابع پتانسیل مذکور باشند. جریان چشمه نقطه ای جریانی پتانسیلی است که در مرکز هندسی یک کره فرضی قرار دارد و جریان سیال در جهت تمام شعاع های کره فرضی از چشمه جاری است. جریان چشمه خطی به صورت جریان شعاعی از یک منبع سیال خطی به صورت متقارن از سطح جانبی یک استوانه فرضی در نظر گرفته می شود. گرداب خطی جریان پتانسیل غیر چرخشی است که جریان غیر ویسکوز حول محور z به صورت دایره‌ای می‌چرخد و بر خلاف جریان چشمه خطی، سرعت جریان در جهت شعاع‌های استوانه صفر می‌باشد.