

مکانیک سیالات پیشرفته

فصل 4

حل معادلات ناویر-استوکس برای سیالات ویسکوز

۱. مقدمه ۳
۲. ساده سازی و حل معادلات ناویر-استوکس ۳
۳. روش‌های ساده سازی معادلات ناویر-استوکس ۴
- ۳-۱. حل معادلات کامل برای سیالات ویسکوز ۴
- ۳-۲. حل تقریبی معادلات ناویر-استوکس ۵
- ۳-۳. حل عددی معادله ناویر استوکس ۶
۴. روش حل کامل سیالات ویسکوز ۷
۵. انواع جریان ویسکوز ۹
- ۵-۱. جریان فشاری پویزله ۹
- ۵-۲. جریان برشی کوئت ۹
۶. حرکت سیال نیوتنی در جریان برشی (جریان کوئت) ۱۰
۷. حرکت سیال نیوتنی ما بین دو صفحه مسطح موازی یا در یک داکت ۱۲
۸. حرکت سیال نیوتنی بین دو صفحه موازی با استفاده از موازنه مومنتوم ۱۶
۹. حرکت سیال نیوتنی در قالب دو استوانه متمرکز ۱۸
۱۰. حرکت سیالات نیوتنی در جریان‌های دو بعدی ۲۱

۱. مقدمه

در فصل قبل معادلات حرکت و پیوستگی در مختصات دکارتی، استوانه ای و کروی حاصل شدند. هم چنین معادلات ناویر-استوکس برای سیالات نیوتنی و غیرتراکمی به دست آمدند. تمام آزمایش ها نشان می دهد که معادلات ناویر-استوکس معادلات بنیادی حاکم بر حرکت سیالات نیوتنی می باشند. متأسفانه حل تحلیلی معادلات ناویر-استوکس برای بسیاری از مواقع مشکل و یا غیرممکن است. لیکن خوشبختانه با فرض های ساده شونده برای بسیاری از جریانات می توان معادلات ناویر-استوکس را اعمال نمود. در این فصل به چگونگی اعمال این معادلات در حل حرکت سیالات ویسکوز پرداخته خواهد شد.

معادله ناویر-استوکس یک معادله غیرخطی دیفرانسیلی جزیی می باشد که تاکنون حل تحلیلی برای آن پیشنهاد نشده است. بنابراین برای اعمال این معادله بر سیالات واقعی نیاز به حل تحلیلی کامل این معادله می باشد که متأسفانه وجود ندارد. پس با ساده سازی این معادله و حذف بعضی از عبارت های آن برای سیالات خاص می توان این معادله را با استفاده از روش تحلیلی و حل معادلات عادی دیفرانسیلی جواب های مناسب برای آن به دست آورد. لیکن نمی توان ثابت کرد که جواب هایی که به دست می آید، منحصر به فرد می باشد. چون هیچ گونه نظریه ای وجود ندارد که بتوان جواب به دست آمده را با آن ارزیابی نمود. با روش خاص و بدون بعد کردن معادله ناویراستوکس نشان خواهیم داد که چگونه معادلات ناویر-استوکس قابل ساده شدن بوده و می توان جواب های مناسبی برای بعضی از حرکت سیالات مانند سیالات خزشی، لایه مرزی و سیالات پتانسیلی به دست آورد.

۲. ساده سازی و حل معادلات ناویر - استوکس

معادلات ناویر استوکس در شکل برداری آن به صورت ذیل به دست آمد:

$$\underbrace{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt}}_{\text{عبارت اینرسی}} = \underbrace{-\nabla P}_{\text{عبارت فشار}} + \underbrace{\rho \vec{g}}_{\text{عبارت گرانشی}} + \underbrace{\mu \nabla^2 \vec{v}}_{\text{عبارت ویسکوز}} \quad (۶-۱)$$

همان گونه که ملاحظه می شود معادله ناویر-استوکس یک معادله غیرخطی دیفرانسیلی جزئی^۱ می باشد که تاکنون حل تحلیلی برای آن پیشنهاد نشده است. بنابراین برای اعمال این معادله بر سیالات واقعی نیاز به حل تحلیلی کامل این معادله می باشد که متأسفانه وجود ندارد. پس با ساده سازی این معادله و حذف بعضی از عبارت های آن برای سیالات خاص می توان این معادله را با استفاده از روش تحلیلی و حل معادلات عادی دیفرانسیلی جواب های مناسب برای آن به دست آورد. لیکن نمی توان ثابت کرد که جواب هایی که به دست می آید، منحصر به فرد می باشد. چون هیچ گونه نظریه ای وجود ندارد که بتوان جواب به دست آمده را با آن ارزیابی نمود. با روش خاص و بدون بعد کردن معادله ناویراستوکس نشان خواهیم داد که چگونه معادلات ناویر-استوکس قابل ساده شدن بوده و می توان جواب های مناسبی برای بعضی از حرکت سیالات مانند سیالات خزشی، لایه مرزی و سیالات پتانسیلی به دست آورد.

۳. روش های ساده سازی معادلات ناویر-استوکس

روش های حل معادلات ناویر استوکس را به سه گروه ذیل می توان تقسیم کرد:

(۱) حل کامل^۲

(۲) حل تقریبی^۳

(۳) حل عددی^۴

۳-۱. حل معادلات کامل برای سیالات ویسکوز

معادلات ناویر-استوکس دارای چهار عبارت اینرسی، ویسکوز، فشار و گرانشی می باشد. با ساده سازی و حذف عبارت اینرسی می توان معادلات را ساده نمود به طوری که با استفاده از حساب دیفرانسیل جواب های تحلیلی مناسب برای بسیاری از جریان سیالات ویسکوز در مجاری مختلف به دست آورد. در این جا فرض های ساده سازی به صورت های ذیل اعمال می شود.

^۱Non-Linear Partial Differential Equation

^۲ Exact Solution

^۳ Approximation Solution

^۴ Numerical Solution

الف) فرض اغماض اثرات انتهایی^۵

با این فرض که تغییرات در انتهای جریان سیال در بعضی از شکل های هندسی مانند لوله، کانال قابل اغماض می باشد. بنابراین از عبارت های جابجایی در عبارت اینرسی در معادله ناویر استوکس صرف نظر می شود. به عنوان مثال در حرکت سیال در یک لوله که در جهت z جریان دارد، از ترم $(\partial/\partial z)$ صرف نظر می شود. این ساده سازی زمانی اعمال می شود که جریان کاملاً توسعه یافته باشد. این فرض در مثالی در قسمت بعدی این فصل به آن پرداخته خواهد شد.

ب) فرض تقارن^۶

در حرکت سیال در شکل های هندسی متقارن مانند لوله، کره و یا استوانه، جریان متقارن بوده به طوری که می توان از تغییرات در جهت θ صرف نمود. یعنی فرض می کنیم که $\partial/\partial\theta=0$.

ج) فرض حالت پایداری^۷

در سیالات آرام^۸ چون شرایط مرزی ثابت بوده و زمان در آنها دخالت ندارد. می توان جریان را پایدار فرض نمود و از عبارت $\partial/\partial t=0$ صرف نظر نمود. در سیالات متلاطم^۹ فرض های تقارن و پایداری قابل اعمال کردن نمی باشد.

۲-۳. حل تقریبی معادلات ناویر - استوکس

شکل عمومی سرعت برای حرکت سیالات در مجاری با شکل های هندسی مختلف بستگی به خواص فیزیکی مانند ویسکوزیته، دانسیته و یا سرعت جریان ندارد. در فصل شش اثرات این متغیرها در گروه های بدون بعد نشان داده خواهد شد. معمولاً اثرات ویسکوزیته و سرعت جریان را در عدد بدون بعد رینولدز^{۱۰} نشان می دهند. حرکت سیالات در بازه وسیعی از عدد رینولدز قرار دارد. لیکن دو محدوده در مکانیک سیالات مورد توجه خاص قرار دارد که تقریب ها در دو حالت ذیل مورد استفاده قرار می گیرد.

⁵No End Effect
⁶Axial Symmetry
⁷Steady State
⁸Laminar Flow
⁹Turbulent Flow
¹⁰Reynolds

الف) تقریب جریان خزشی^{۱۱}

در این تقریب جریان سیال بسیار کند و آرام بوده به طوری که عدد رینولدز کوچک تر از یک می باشد ($Re < 1$). در اینجا عبارت اینرسی از معادله ناویر استوکس حذف می شود. جریان‌هایی مانند جریان حرکت مواد مذاب پلی مرها، جریان محلول‌های سوسپانسیون‌ها، حرکت در مخازن یا محیط‌های متخلخل در این گروه قرار دارند. برای سیالات خزشی نیوتنی معادلات حرکت به صورت ذیل استفاده می شود:

$$-\nabla P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{v} \approx 0 \quad \left(Re = \frac{\rho \langle v \rangle D}{\mu} \ll 1 \right) \quad (6-2)$$

ب) تقریب جریان غیر لزجی^{۱۲}

در شرایطی که سرعت جریان بسیار بزرگ تر از یک می باشد، ($Re \gg 1$) در این حالت عبارت ویسکوز قابل اغماض خواهد بود. به عبارتی در حرکت سیالاتی مانند جریان پتانسیلی^{۱۳} نیروهای اینرسی حاکم بوده و از نیروهای ویسکوز صرف نظر می شود. جریان‌هایی مانند دینامیک گازها در لوله‌ها، حرکت پرنده‌ها مانند هواپیما و حرکت موشک را می توان مثال‌هایی از جریان غیرلزجی (پتانسیلی) نام برد. در این حالت معادله حرکت ناویر-استوکس به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla P + \rho \vec{g} \quad (Re \gg 1) \quad (6-3)$$

این معادله اوایلر^{۱۴} نامیده می شود. با انتگرال گیری از این معادله، معادله برنولی^{۱۵} به دست می آید. در فصل‌های بعدی تقریب‌های مذکور با استفاده از معادله بدون بعد ناویر-استوکس توضیح داده خواهد شد.

۳-۳. حل عددی معادله ناویر استوکس

در شرایطی که نتوان از فرضیات ساده شونده و یا تقریب‌های خزشی و غیرلزجی استفاده کرد، لازم است معادلات ناویر-استوکس را به طور کامل حل نمود. در این حالت همان گونه که قبلاً اشاره شد، نمی توان از روش‌های تحلیلی

¹¹Creeping Flow Approximation

¹²Inviscid Flow Approximation

¹³Potential Flow

¹⁴Euler

¹⁵Bernoulli

استفاده نمود. بنابراین لازم است از روش های آنالیز عددی بهره برد. در دینامیک سیالات محاسباتی^{۱۶} روش های مختلفی برای حل معادلات ناویر-استوکس پیشنهاد شده است مانند روش تفاضل محدود^{۱۷}، المان محدود^{۱۸} و ... در این خصوص نرم افزارهای پیشرفته مانند FLUENT و COMSOL تهیه و به بازار عرضه شده است. با استفاده از این نرم افزارها سیالات پیچیده مانند حرکت مواد مذاب پلی مرها، پیش گویی هوا و غیره قابل حل می باشد. در این نوشتار به علت محدودیت به روش های عددی پرداخته نخواهد شد.

۴. روش حل کامل سیالات ویسکوز

روش عمومی برای حل کامل معادله ناویر-استوکس با استفاده از فرض های ساده شونده به صورت زیر است.

(۱) ابتدا لازم است که فرضیات منطقی مانند جریان غیرتراکمی پایدار^{۱۹} و نیوتنی بودن سیال انجام شود. فرض هایی مانند پایداری، تقارن و اغماض اثرات انتهایی نیز ابتدا لازم است اعمال گردد.

(۲) اثرات نیروهای گرانشی^{۲۰} در حرکت سیال مهم می باشد. معمولاً سیال در مجاری بسته که دارای مرزهای جامد باشند، نیروهای گرانشی در عبارت فشار ادغام می شوند. نقش نیروهای گرانشی در مجاری بسته مانند لوله ها، کانال ها و غیره به عنوان ارتفاع استاتیکی^{۲۱} به صورت ρgh عمل می نماید. در این حالت، ارتفاع استاتیکی به صورت زیر، به فشار دینامیکی اضافه می شود:

$$\bar{P} = P + \rho gh$$

که به \bar{P} فشار هیدرو دینامیکی^{۲۲} می گویند. پس در این حالت معادله ناویر-استوکس به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla \bar{P} + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (۴-۶)$$

¹⁶ Computational Fluid Dynamics (CFD)

¹⁷ Finite Difference

¹⁸ Finite Element Method (FEM)

¹⁹ Steady Incompressible Flow

²⁰ Gravity Forces

²¹ Static Head

²² Hydrodynamic Pressure

۳) لازم است معادلات ساده شده ناور-استوکس و پیوستگی در دستگاه مختصاتی متناسب بامجاری و شکل هندسی سیال نوشته شوند. در ساده سازی، عبارت هایی که با فرضیات در نظر گرفته شدند، حذف شده و یا مساوی صفر قرار داده می شوند. در این حالت معادلات ناور-استوکس به صورت چند عبارت به دست خواهند آمد. این معادلات به صورت معادلات دیفرانسیل عادی بوده که با استفاده از روش تحلیلی قابل حل می باشند.

۴) با انتگرال گیری از معادلات عادی دیفرانسیلی، روابطی به دست می آیند که دارای ثابت های انتگرالیون خواهند بود. معمولاً فشار به صورت $P=P(x,y,z)$ می باشد که با فرض های ساده شونده برای بعضی جریان ها در مجاری خاص تغییرات فشار به صورت یک بعدی در نظر گرفته خواهد شد.

۵) اعمال شرایط مرزی^{۲۳} برای به دست آوردن ثابت ها لازم می باشد. معمولاً شرایط مرزی برای فشار در نقاط خاص قبلاً ارائه شده است. شرایط مرزی برای سرعت به صورت های مختلف در هر مساله متفاوت می باشد. به عنوان مثال برای حرکت سیال در مجاری بسته مانند کانال ها و لوله ها، سرعت در سطح جامد یعنی در دیواره لوله و یا کانال صفر در نظر گرفته می شود. به این فرض شرط عدم لغزش^{۲۴} در مرز جامد می گویند. در حرکت سیالات آزاد (یکنواخت) در مجاری اطراف اشیای در حال سکون مانند حرکت سیال آزاد اطراف کره یا استوانه معمولاً سرعت سیال در فاصله دور از شیء که همان سرعت سیال آزاد است به عنوان شرط مرزی برای سرعت استفاده می شود. در شرایطی که یک سیال در تماس با یک سیال دیگر باشد، سرعت در سطح تماس دو سیال یکسان خواهند بود.

در سطح مشترک ما بین دو سیال، شرایط مرزی یعنی پیوستگی در تنش برشی مابین دو سیال مهم می باشند. در این حالت تنش برشی در مرز مشترک ما بین دو سیال به صورت شرط مرزی ذیل استفاده می شود:

$$\left[\mu_1 \frac{dv_1}{dy} \right]_{y=y_0} = \left[\mu_2 \frac{dv_2}{dy} \right]_{y=y_0}$$

که μ_1 و μ_2 ویسکوزیته دو سیال، v_1 و v_2 پروفیل سرعت دو سیال خواهند بود. هم چنین y_0 مختصات سطح مشترک می باشد.

²³Boundary Condition (B.C.)

²⁴No-Slip Condition

۵. انواع جریان ویسکوز

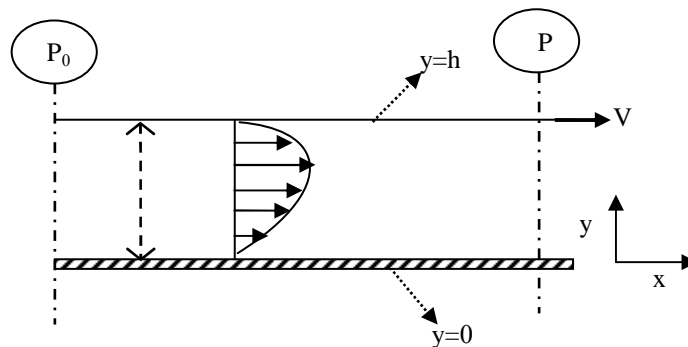
دو دسته از جریان های ویسکوز وجود دارند که به شرح ذیل به آن اشاره می شود.

۵-۱. جریان فشاری پویزله^{۲۵}

در این جریان ها حرکت سیال ناشی از فشار اعمال شده بر سیال بوده به طوری که مرزهای مجاری حرکت سیال ثابت بوده و سیال تحت اختلاف فشار حرکت می کند. مانند جریان حرکت سیال در یک لوله یا کانال.

۵-۲. جریان برشی کوئت^{۲۶}

در جریان های برشی یا درگ^{۲۷}، سیال در مجاری حالت سکون داشته به طوری که مرزهای جامد حرکت می نمایند. در این حالت، حرکت سیال از طریق نیروهای برشی از صفحه جامد شروع شده و به صورت حرکت نفوذی مولکول ها، مومنتوم از لایه ای به لایه دیگر سیال منتقل می شود. به عنوان مثال حرکت جریان برشی ما بین دو صفحه موازی مسطح جامد که یکی متحرک بوده و دیگری در سکون بوده در نظر بگیرید. این مسئله در فصل های قبلی تحت جریان برشی ساده به اندازه کافی به آن پرداخته شد. لیکن مجدداً به طور کامل در اینجا مورد بررسی قرار می گیرد.



شکل ۱-۶: حرکت سیال در یک جریان برشی (کوئت)

²⁵Poiseuille Flow

²⁶Couette Flow

²⁷Drag

۶. حرکت سیال نیوتنی در جریان برشی (جریان کوئت)

مطابق شکل (۶-۱) حرکت سیال نیوتنی بین دو صفحه موازی را در نظر می‌گیریم. توزیع فشار و پروفیل سرعت در این جریان خواسته شده است. برای حل این مسئله و برای به دست آوردن پروفیل سرعت لازم است که مراحل ذیل انجام شود.

(۱) فرضیات اولیه مانند ثابت ρ ، ثابت μ و ثابت T ، ابتدا در نظر گرفته می‌شود.

(۲) معادله پیوستگی در مختصات دکارتی برای این سیال نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (۶-۵)$$

نظر به اینکه سرعت صفحه بالایی فقط در جهت x می‌باشد، بنابراین $v_y = v_z = 0$ خواهد بود. پس خواهیم داشت:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (۶-۶)$$

بنابراین با توجه به اینکه $v_x = v_x(y)$ بوده پس می‌توان نتیجه گرفت که $dv_x/dx = 0$ می‌باشد.

(۳) معادلات ناویر-استوکس در مختصات دکارتی برای این جریان به صورت ذیل نوشته می‌شود.

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (۶-۷)$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \quad (۶-۸)$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \quad (۶-۹)$$

در اینجا فرض می‌شود که جریان پایدار بوده و از اثرات انتهایی صرف نظر می‌شود، به طوری که $Dv_x/Dt = 0$ می‌باشد.

از طرفی طبق معادلات (۶-۸) و (۶-۹) ملاحظه می‌شود که $P = P(x)$ بوده، پس معادلات مذکور به شکل ذیل نوشته

می‌شوند.

$$-\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \quad (۶-۱۰)$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \frac{d\bar{P}}{dx} \quad (۶-۱۱)$$

۴) حال با دو مرتبه انتگرال گیری از معادله (۶-۱۰) خواهیم داشت:

$$v_x = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{d\bar{P}}{dx} \right) y^2 + c_1 y + c_2 \quad (6-12)$$

که c_1 و c_2 ثابت‌های انتگرال‌سیون هستند. برای پیدا کردن این ثابت‌ها نیاز به شرایط مرزی می‌باشد.

۵) شرایط مرزی در این مسئله به صورت ذیل نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad ; \quad v_x = 0 \\ y = h & \quad ; \quad v_x = V \end{aligned} \quad (6-13)$$

پس با اعمال این شرایط مرزی در معادله (۶-۱۲) پروفیل سرعت به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$v_x = V \left(\frac{y}{h} \right) - \frac{h^2}{2\mu} \frac{d\bar{P}}{dx} \left[\left(\frac{y}{h} \right) - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] \quad (6-14)$$

۶) برای به دست آوردن دبی حجمی برای جریان کوئت بین دو صفحه خواهیم داشت:

$$Q = wh \langle v_x \rangle = \int_0^w \int_0^h v_x dy dz = wh \int_0^1 v_x d\left(\frac{y}{h}\right) \quad (6-15)$$

پس با جا گذاری معادله (۶-۱۴) در معادله (۶-۱۵) و انتگرال گیری می‌توان نوشت:

$$Q = \frac{1}{2} whV - \frac{wh^3}{12\mu} \frac{d\bar{P}}{dx} \quad (6-16)$$

که در اینجا w عرض صفحات بوده و $\langle v_x \rangle$ متوسط سرعت سیال می‌باشند. در شرایطی که فاصله ما بین دو صفحه خیلی

کم و در حدود کمتر از یک اینچ باشد، می‌توان از افت فشار صرف نظر نموده، به طوری که پروفیل سرعت خطی بوده

و به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$v_x = V \left(\frac{y}{h} \right) \quad (6-17)$$

که به این پروفیل خطی در فصل‌های قبل نیز اشاره شده است.

از طرفی دیگر اگر فاصله ما بین دو صفحه زیاد باشد، تغییرات فشار با انتگرال گیری از رابطه (۶-۱۶)، به صورت ذیل به

دست می‌آید:

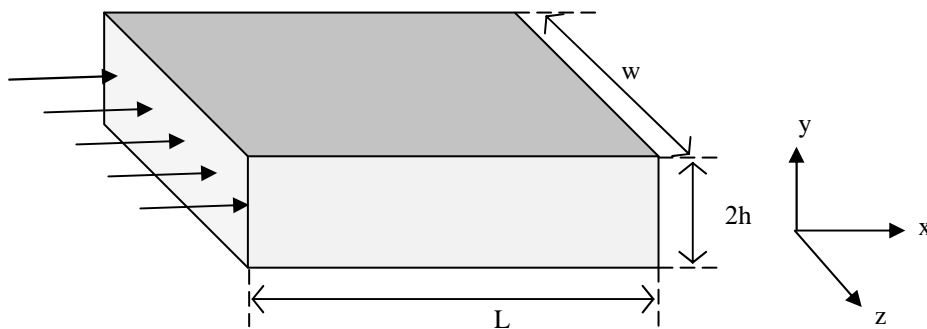
$$\int_{P_0}^P d\bar{P} = \int_0^x \left(\frac{1}{2} whV \frac{12\mu}{wh^3} - \frac{12\mu Q}{wh^3} \right) dx = \int_0^x \left(\frac{6\mu V}{h^2} - \frac{12\mu Q}{wh^3} \right) dx \quad (6-18)$$

$$\bar{P} = \bar{P}_0 + \left(\frac{3\mu V}{h^2} - \frac{6\mu Q}{wh^3} \right) x$$

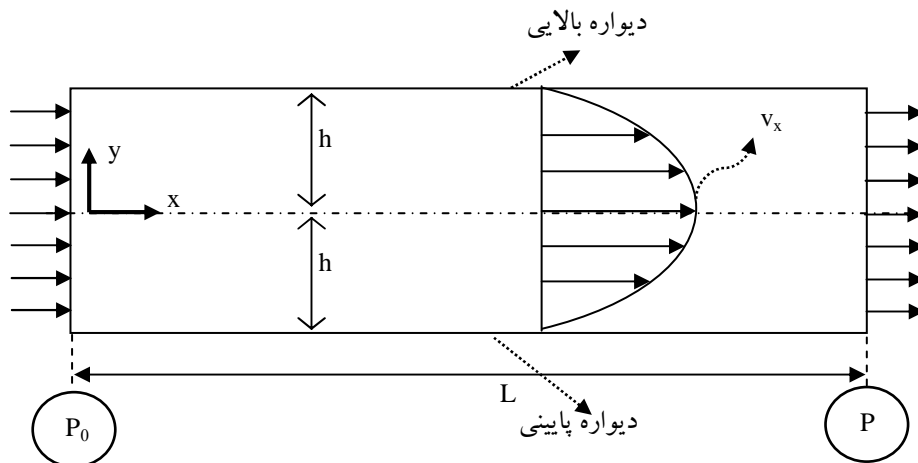
که P_0 فشار در ابتدای صفحه یا فشار اتمسفر می باشد.

۷. حرکت سیال نیوتنی ما بین دو صفحه مسطح موازی یا در یک داکت

حرکت سیال نیوتنی ما بین دو صفحه مسطح موازی را مطابق شکل (۶-۲) در نظر بگیرید.



شکل ۶-۲: جریان در یک کانال با عرض کم ($h/w \ll 1$)



شکل ۶-۳: هندسی سیال در یک داکت

(۱) فرضیات: جریان پایدار می باشد؛ سیال نیوتنی و تراکم ناپذیر است ($\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$).

(۲) اثرات انتهایی قابل اغماض می باشند، یعنی ($\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$) فرض می شود. به عبارتی سیال کاملاً توسعه یافته است و

$v_y = v_z = 0$ خواهد بود؛ یعنی سیال فقط در جهت x حرکت می نماید.

(۳) با توجه به اینکه عرض صفحات خیلی زیاد می باشد، پس از تغییرات در جهت z صرف نظر می شود یعنی ($\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$).

۴) مجرای حرکت سیال بسته خواهد بود و نیروهای گرانشی در جهت y می‌باشند، بنابراین از فشار هیدرودینامیکی به صورت $\bar{P} = P + \rho gh$ استفاده می‌شود.

۵) از شرایط مرزی عدم لغزش در صفحات مرزی استفاده می‌شود. پس:

$$y = \pm h ; v_x = 0$$

۶) معادله پیوستگی به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

چون $v_y = v_z = 0$ می‌باشد، پس ساده شده، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (۶-۱۹)$$

چون $\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$ و $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ پس $v_x = v_x(y)$ ، یعنی سرعت تابعی از y می‌باشد.

۷) معادلات مومنوم که به صورت ناویر-استوکس نوشته می‌شوند به شکل زیر ساده خواهند شد:

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (۶-۲۰)$$

$$0 = \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \quad (۶-۲۱)$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (۶-۲۲)$$

در این جا با توجه به اینکه $\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = 0$ می‌باشد، پس $\bar{P} = \bar{P}(x)$ خواهد بود. بنابراین معادله دیفرانسیلی حرکت سیال

به صورت ذیل نوشته خواهد شد.

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \quad (۶-۲۳)$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \frac{d\bar{P}}{dx} \quad (۶-۲۴)$$

حال با فرض اینکه افت فشار فقط در جهت x می‌باشد، می‌توانیم فرض کنیم که:

$$\frac{d\bar{P}}{dx} = k \quad (\text{ثابت}) \quad (۶-۲۵)$$

پس با انتگرال گیری از رابطه (۶-۲۵) به صورت ذیل خواهیم داشت:

$$\int_{P_0}^P dP = \int_0^L k dx \quad \text{یا} \quad P - P_0 = kL \quad (۶-۲۶)$$

بنابراین افت فشار با استفاده از معادله (۶-۲۶) به صورت ذیل به دست می آید:

$$\frac{d\bar{P}}{dx} = -\frac{\Delta P}{L} = k \quad (۶-۲۷)$$

لذا معادله حرکت (۶-۲۳) به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = -\frac{\Delta P}{L} \quad (۶-۲۸)$$

حال با انتگرال گیری از این معادله، پروفیل سرعت به صورت ذیل به دست می آید:

$$\int d\left(\frac{dv_x}{dy}\right) = \int -\frac{\Delta P}{L\mu} dy + C_1 \quad (۶-۲۹)$$

$$\frac{dv_x}{dy} = -\frac{1}{\mu} \frac{\Delta P}{L} y + C_1 \quad (۶-۳۰)$$

پس با انتگرال گیری مجدد خواهیم داشت:

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\Delta P}{L}\right) y^2 + C_1 y + C_2 \quad (۶-۳۱)$$

که C_1 و C_2 دو ثابت انتگرالیون می باشند و با استفاده از شرایط مرزی به دست می آیند.

۸) شرایط مرزی برای به دست آوردن ثابت های انتگرالیون به صورت ذیل ارائه می شوند:

$$y = 0 \quad : \quad \frac{dv_x}{dy} = 0 \quad (۶-۳۲)$$

$$y = h \quad : \quad v_x = 0$$

ملاحظه می شود که در مرکز وسط ما بین دو صفحه تنش برشی صفر می باشد، یعنی $(\tau = \mu \frac{dv_x}{dy} = 0)$ و در صفحات

تنش برشی ماکزیمم می باشد، به طوری که سرعت سیال در آن صفر در نظر گرفته می شود. بنابراین با استفاده از شرایط

مرزی خواهیم داشت:

$$C_1 = 0 \quad ; \quad C_2 = +\frac{h^2}{2\mu} \left(\frac{\Delta P}{L}\right) \quad (۶-۳۳)$$

پس شکل نهایی پروفیل سرعت به صورت ذیل به دست خواهد آمد:

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) (h^2 - y^2) \quad (6-34)$$

که $\Delta P = P_0 - P$ می‌باشد.

(۹) شار جریان حجمی در کانال

برای به دست آوردن دبی حجمی سیال بر واحد عرض کانال از طریق ذیل عمل می‌گردد:

$$dQ = v_x dy \quad (6-35)$$

$$Q = \int_0^Q dQ = \int_{-h}^h v_x dy = \int_{-h}^h \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) (h^2 - y^2) dy$$

$$Q = \frac{2h^3}{3\mu} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) \quad (6-36)$$

سرعت متوسط نیز از رابطه ذیل به دست می‌آید:

$$\langle v_x \rangle = \frac{Q}{\text{مساحت مقطع}^{28} \text{ سطح}} = \frac{Q}{2h} = \frac{h^2}{3\mu} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) \quad (6-37)$$

(۱۰) توزیع تنش برشی در کانال

توزیع تنش برشی از رابطه ذیل به دست می‌آید:

$$\tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (6-38)$$

که با مشتق‌گیری از پروفیل سرعت (رابطه ۶-۳۱) خواهیم داشت:

$$\tau_{yx} = -y \left(\frac{\Delta P}{L} \right) \quad (6-39)$$

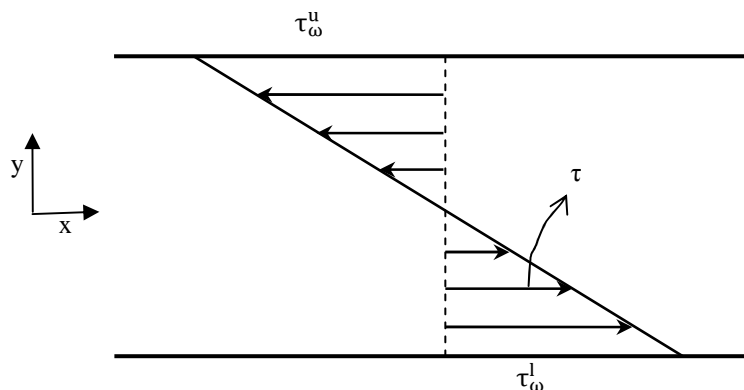
حال اگر با استفاده از معادله (۶-۳۹) تنش برشی در روی دیواره‌های بالا و پایین را بنویسیم (یعنی در $y = \pm h$)

$$\tau_{\omega}^u = -h \left(\frac{\Delta P}{L} \right) \quad ; \quad y = h \quad (6-40)$$

$$\tau_{\omega}^l = +h \left(\frac{\Delta P}{L} \right) \quad ; \quad y = -h \quad (6-41)$$

که بالانویس‌های u و l به معنی بالایی و پایینی می‌باشند. شکل (۶-۴) توزیع تنش را بین دو صفحه موازی نشان می‌دهد:

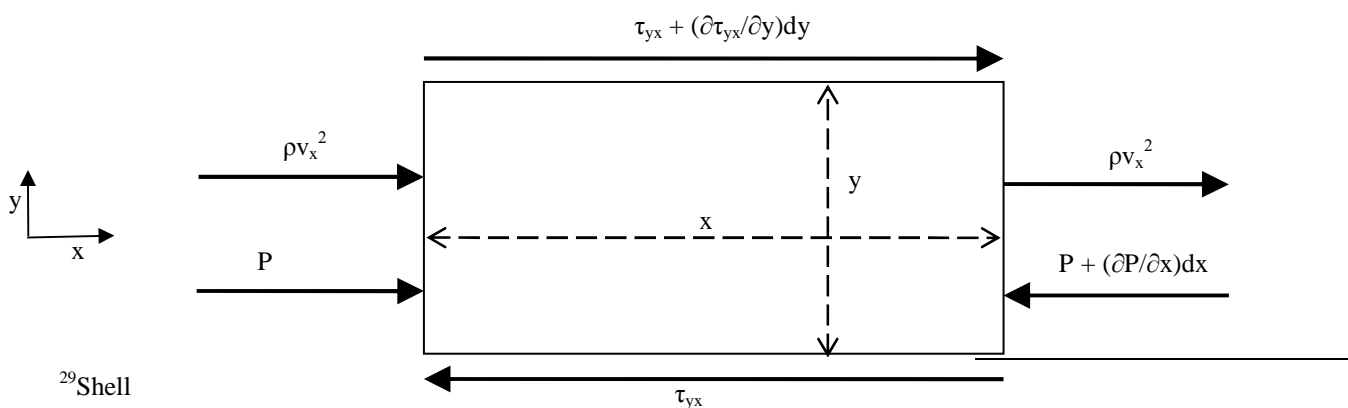
²⁸ Cross Sectional Area



شکل ۴-۶: توزیع تنش برشی در حرکت فشاری بین دو صفحه موازی

۸. حرکت سیال نیوتنی بین دو صفحه موازی با استفاده از موازنه مومنتوم

دو روش عمومی برای تحلیل حرکت سیالات توسعه داده شده است. روش اول که ساده تر است از معادلات حاکم ناویر-استوکس استفاده می شود. در روش دوم از موازنه مومنتوم روی یک المان حجم استفاده می شود. در قسمت قبل از روش اول استفاده گردید، در این قسمت از روش موازنه مومنتوم استفاده می شود. مطابق شکل (۵-۶) اگر یک المان^{۲۹} المان^{۲۹} دیفرانسیلی را در توده سیال بین دو صفحه در نظر بگیرید، طول و عرض المان dx و dy بوده و عمق آن dz می باشد.



²⁹Shell

شکل ۵-۶: موازنه مومنتوم بر روی المان سیال

(۱) ابتدا برآیند موازنه مومنتوم جابجایی را در جهت X می نویسیم که خواهد بود:

$$\Delta F_I = [\rho v_x^2 dy dz]_{in} - [\rho v_x^2 dy dz]_{out} \quad \text{برآیند مومنتوم جابجایی}$$

ملاحظه می شود که واحد ρv^2 ، مومنتوم خطی یا نیروی لختی بر واحد سطح می باشد، پس ضرب آن در مساحت سطح المان ($dydz$) کل مومنتوم ورودی و خروجی برآیند نیروهای لختی از المان به دست خواهد آمد.

(۲) موازنه نیروهای فشاری در المان به صورت زیر است:

$$\Delta F_P = [P dy dz]_{in} - \left[\left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dy dz \right]_{out} \quad \text{برآیند نیروهای فشار}$$

(۳) موازنه تنش برشی مطابق شکل بر روی المان به صورت ذیل نشان داده می شود:

$$\Delta F_\tau = \left[\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz \right]_{in} - [\tau_{xy} dx dz]_{out} \quad \text{برآیند نیروهای تنش برشی}$$

ملاحظه می شود که واحد تنش برشی نیرو بر واحد سطح است که با ضرب آن در مساحت المان ($dx dz$) مقدار کل نیروی برشی در ورودی و خروجی المان به دست می آید.

(۴) موازنه نیروهای کل بر المان به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\Delta F_I + \Delta F_P + \Delta F_\tau = 0 \quad (۶-۴۲)$$

با جایگذاری عبارت های بالا در معادله (۶-۴۲) و تقسیم آن بر حجم المان ($dx dy dz$) خواهیم داشت:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (۶-۴۳)$$

³⁰Net Convective Momentum

³¹Net Pressure Force

³²Net Shear Force

باید توجه داشت که چون سیال پایدار است، بنابراین $\Delta F_1 = 0$ می شود. با جایگذاری $\tau_{yx} = \mu(\partial v_x / \partial y)$ در معادله (۴۳) -

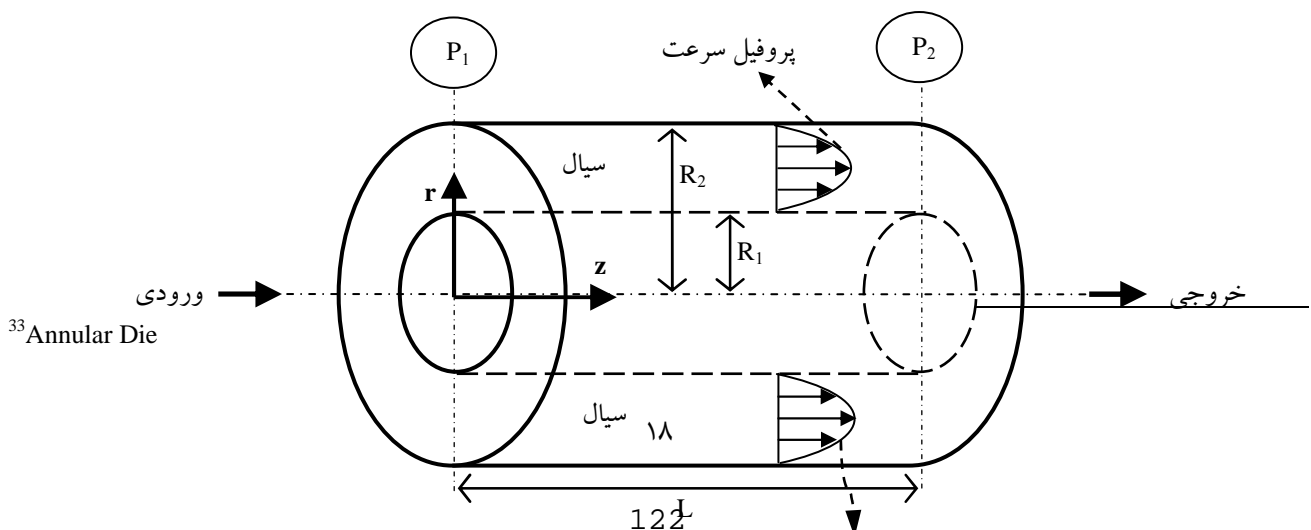
(۶)، معادله دیفرانسیلی سرعت به دست می آید که این معادله قبلا از طریق معادلات ناویر-استوکس به دست آمد:

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = -\frac{\Delta P}{L} \quad (۶-۴۴)$$

۹. حرکت سیال نیوتنی در قالب دو استوانه متمرکز

برای ارائه مثالی برای حرکت سیالات نیوتنی در مختصات استوانه ای، حرکت سیالی را در میان دو استوانه متمرکز، که یکی درون دیگری قرار دارد، مورد بررسی قرار می دهیم. این شکل هندسی کاربرد وسیعی در صنایع پلاستیک به ویژه فرآیند شکل دهی پلی مرها دارد.

شکل (۶-۶) قالبی را که از دو استوانه متمرکز تشکیل شده است، نشان می دهد. مطابق شکل، شعاع های استوانه های داخل و خارج به ترتیب R_1 و R_2 و طول قالب L می باشد. مراحل به دست آوردن پروفیل سرعت و دبی حجمی به صورت ذیل است:



شکل ۶-۶: حرکت سیال نیوتنی بین دو استوانه هم مرکز

(۱) سیال غیر تراکمی هم دما و نیوتنی فرض می‌شود. با توجه به این که شکل هندسی سیال استوانه است، پس از مختصات استوانه ای (r, θ, z) برای آنالیز حرکت سیال استفاده می‌شود.

(۲) با توجه به این که حرکت سیال یک بعدی در جهت z است، بنابراین $v_r = v_\theta = 0$ خواهد بود.

(۳) معادله پیوستگی در مختصات استوانه ای برای سیال مذکور نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (6-45)$$

که بعد از ساده‌سازی معادله پیوستگی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (6-46)$$

که رابطه (۶-۴۶) همان فرض اغماض از اثرات انتهایی است. بنابراین با توجه به این که سرعت مستقل از z و θ می‌باشد، پس $v_r = v_r(r)$ خواهد بود.

(۴) از فرض تقارن محوری، $\partial/\partial\theta = 0$ ، استفاده می‌کنیم و معادله ناویر-استوکس را در دستگاه مختصات استوانه‌ای در جهت z به صورت ذیل نوشته و ساده می‌نماییم:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad (6-47)$$

با استفاده از فرض حالت پایداری، $(\partial/\partial t = 0)$ و این که $v_r = v_\theta = 0$ و $\partial/\partial z = 0$ ؛ بیشتر عبارات‌های معادله (۶-۴۷)

حذف شده و معادله ساده شده به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$-\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] = 0 \quad (6-48)$$

معادلات ناویر-استوکس در جهت‌های r و θ ساده شده و بیش تر عبارات‌های آن حذف خواهند شد و تنها عبارات‌های ذیل باقی می‌مانند:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{P}}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} &= 0\end{aligned}\quad (6-49)$$

بنابراین در این حالت $\bar{P} = \bar{P}(z)$ خواهد بود. پس عبارت فشار به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$-\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = -\frac{d\bar{P}}{dz} = \frac{\bar{P}_2 - \bar{P}_1}{L} \quad (6-50)$$

با دو مرتبه انتگرال‌گیری از رابطه (6-50) معادله پروفیل سرعت به صورت ذیل به دست خواهد آمد:

$$v_z = -\frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \right) r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (6-51)$$

که C_1 و C_2 ثابت‌های انتگرال‌سیون هستند و با استفاده از شرایط مرزی به دست می‌آیند.

(5) شرایط مرزی در این سیال به صورت ذیل تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned}r = R_1 &: v_z = 0 \\ r = R_2 &: v_z = 0\end{aligned}\quad (6-52)$$

با اعمال شرایط مرزی در معادله (6-51)، ثابت‌های C_1 و C_2 و شکل نهایی پروفیل سرعت به دست می‌آیند:

$$C_1 = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \right) \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \left(R_2/R_1 \right)} \quad (6-53)$$

$$C_2 = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \right) R_2^2 - C_1 \ln R_2$$

بنابراین با جایگذاری C_1 و C_2 در معادله (6-51) خواهیم داشت:

$$v_z = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \right) \left[\frac{\ln \left(r/R_2 \right)}{\ln \left(R_2/R_1 \right)} (R_2^2 - R_1^2) + (R_2^2 - r^2) \right] \quad (6-54)$$

شکل (6-6) پروفیل سرعت را نشان می‌دهد.

۶) دبی حجمی سیال با استفاده از المان حجمی استوانه‌ای با شعاع‌های داخلی r و خارجی $r+dr$ به صورت

$$dQ = v_z 2\pi r dr$$

نوشته می‌شود که با انتگرال‌گیری دبی حجمی کل به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$Q = \int_0^Q dQ = \int_{R_1}^{R_2} v_z 2\pi r dr \quad (6-55)$$

با جایگذاری پروفیل سرعت یعنی معادله (۶-۵۴) در معادله بالا و انتگرال‌گیری، دبی حجمی کل به دست می‌آید:

$$Q = \frac{\pi(R_2^2 - R_1^2)}{8\mu} \left(-\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \right) \left[R_2^2 + R_1^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \left(R_2/R_1 \right)} \right] \quad (6-56)$$

توجه شود که در انتگرال‌گیری از انتگرال غیر معین ذیل استفاده می‌شود:

$$\int r \ln r dr = \frac{r^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4} \quad (6-57)$$

از طرفی در شرایطی که $R_1 \rightarrow 0$ میل کند، قالب به شکل یک لوله با شعاع $R = R_2$ در خواهد آمد که دبی آن به

شکل ذیل نوشته می‌شود:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(-\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \right) \quad (6-58)$$

که معادله (۶-۵۸) به قانون هیگن-پویزله^{۳۴} معروف است.

۱۰. حرکت سیالات نیوتنی در جریان‌های دو بعدی^{۳۵}

حرکت سیالات تراکم ناپذیر و نیوتنی در کانال‌ها که فاصله ما بین دو صفحه آن کم نباشد، در مختصات دکارتی به

صورت دو بعدی می‌باشد. هم چنین حرکت سیالات اطراف کره و استوانه در مختصات استوانه‌ای و یا کروی، به صورت

دو بعدی تحلیل می‌شود.

در این قسمت حرکت سیال را در کانالی به صورت دو بعدی در مختصات دکارتی مورد آنالیز قرار می‌دهیم. در این جا

مؤلفه‌های سرعت به صورت $v_x = v_x(t, x, y)$ ، $v_y = v_y(t, x, y)$ و فشار $\bar{P} = \bar{P}(t, x, y)$ خواهد بود. فرض نماییم

³⁴Hagen-Poiseuille Law

³⁵Two-Dimensional Flow

که سیال حالت پایدار دارد و $v_z = 0$ می‌باشد. بنابراین معادلات پیوستگی و ناویر-استوکس را به صورت ذیل می‌نویسیم:

نویسیم:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (6-59)$$

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (6-60)$$

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (6-61)$$

ملاحظه می‌شود که در این جا سه مجهول و سه معادله داریم. از طرفی حل این گونه معادلات به روش تحلیلی مشکل و یا

غیر ممکن می‌نماید. لیکن همان گونه که قبلا در فصل دوم اشاره شد می‌توان با استفاده از توابع جریان، دو معادله ناویر-

استوکس را تبدیل به یک معادله نموده و آن را با استفاده از روش عددی حل نمود. در این جا اگر از دو طرف معادله

((6-60) و (6-61) به ترتیب به صورت $\frac{\partial}{\partial x}$ و $\frac{\partial}{\partial y}$ یعنی ضربدری^{۳۶} مشتق بگیریم و سپس دو معادله را از هم کم کنیم،

عبارت‌های فشار به صورت ذیل حذف خواهند شد:

$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (6-62)$$

در این جا معادله ای که از جمع دو معادله مذکور حاصل می‌شود بعد از ساده‌سازی به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial \xi_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial \xi_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial \xi_z}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial y^2} \right] \quad (6-63)$$

که در این معادله ξ_z گردایش^{۳۷} حول محور z می‌باشد. در فصل چهارم، به صورت ذیل تعریف گردید:

$$\xi_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (6-64)$$

از طرفی با استفاده از تعریف تابع جریان لاگرانژی خواهیم داشت:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (6-65)$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

³⁶Cross Differentiation
³⁷Vorticity

پس با جایگذاری روابط (۶-۶۵) در (۶-۶۴) می توان نوشت:

$$\xi_z = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\nabla^2 \psi \quad (6-66)$$

بنابراین با جایگذاری رابطه (۶-۶۶) در معادله (۶-۶۳) به معادله دیفرانسیلی درجه چهارم ذیل می رسیم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi = \frac{\mu}{\rho} \nabla^4 \psi \quad (6-67)$$

معادله (۶-۶۷) یک معادله غیرخطی اسکالر دیفرانسیل جزئی از درجه چهارم است. در حالت پایدار، از عبارات طرف

چپ معادله صرف نظر می شود و معادله به صورت ذیل ساده می شود:

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad (6-68)$$

برای حل معادله (۶-۶۸) نیاز به چهار شرط مرزی داریم. معادله مذکور در مختصات استوانه‌ای و کروی نیز موجود است

و در کتاب پدیده‌های انتقال برد و همکاران^{۳۸} ارائه شده است.

معادله (۶-۶۸) را می توان به شکل دیفرانسیلی زیر نیز نوشت:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0 \quad (6-69)$$

³⁸ Transport Phenomena ; Bird, Stewart, Lightfoot

۱۱. خلاصه (جمع بندی)

روش های حل معادلات ناویر- استوکس را به سه گروه ذیل می توان تقسیم کرد: حل کامل، حل تقریبی، حل عددی. در روش حل کامل می توان از فرضیاتی چون اغماض اثر انتهایی، تقارن و حالت پایداری استفاده کرد. در روش حل تقریبی از تقریب هایی چون تقریب جریان خزشی و تقریب جریان غیرلزجی استفاده کرد. معمولاً برای حرکت سیال در مجاری های بسته که دارای مرزهای جامد باشند، نیروهای گرانشی در عبارت فشار ادغام می شوند. در شرایطی که نتوان از فرضیات ساده شونده و یا تقریب های خزشی و غیر لزجی استفاده کرد، لازم است معادلات ناویر-استوکس را به طور کامل حل نمود. معمولاً شرایط مرزی برای حل معادلات حرکت با توجه به هندسه و شرایط حرکت سیال تعیین می شود. دو روش عمومی برای تحلیل حرکت سیالات توسعه داده شد. روش اول استفاده از معادلات حاکم ناویر-استوکس است، روش دوم استفاده از موازنه مومنتوم روی یک المان حجمی. حرکت سیالات تراکم ناپذیر و نیوتنی در کانال ها که فاصله ما بین دو صفحه آن کم نباشد، در مختصات دکارتی به صورت دو بعدی می باشد. حرکت سیالات تراکم ناپذیر و نیوتنی در کانال ها که فاصله ما بین دو صفحه آن کم نباشد، در مختصات دکارتی به صورت دو بعدی می باشد. حرکت سیالات اطراف کره و استوانه در مختصات استوانه ای و یا کروی، به صورت دو بعدی تحلیل می شود.