

مکانیک سیالات پیشرفته

فصل هشتم

کاربرد جریان های پتانسیلی (غیر لزجی)

۱. مقدمه ۳
۲. کاربرد جریان های ساده یکنواخت، چشمه، چاه و گرداب در مختصات دو بعدی ۳
- ۲-۱. جریان پتانسیلی اطراف جسم نیمه ای رنگین ۳
- ۲-۲. جریان چشمه و چاه خطی ۶
- ۲-۳. جریان یکنواخت اطراف جسم بیضوی رنگین ۷
- ۲-۴. دابلت خطی ۸
- ۲-۵. جریان یکنواخت اطراف یک استوانه ثابت ۹
- ۲-۶. جریان یکنواخت اطراف یک استوانه چرخان ۱۲
۳. دابلت کروی ۱۳
۴. جریان آزاد اطراف کره با ترکیب دابلت و جریان یکنواخت در مختصات قطبی ۱۴
۵. کاربرد جریان های پتانسیلی در مکانیک سیالات optional ۱۶
- ۵-۱. درگ و لیفت در جریان یکنواخت اطراف استوانه optional ۱۶
- ۵-۲. نظریه لیفت کوتا-چاو کوسکی optional ۱۷
- ۵-۳. جریان آب در مخازن زیر زمینی optional ۱۸

۶. خلاصه (جمع بندی) ۲۲

۱. مقدمه

همان طور که در فصل های گذشته بیان شد حل کامل معادله ناویر استوکس به صورت تحلیلی هنوز میسر نشده است لذا برای سیستم های مختلف از تقریب استفاده می شود تا با حذف برخی از ترم های معادله حرکت ناویر استوکس، معادله به طور تحلیلی قابل حل باشد. از جمله تقریب هایی که در گذشته بیان شد جریان سیالات با رینولدز پایین بود که در آن از اثر اینرسی در مقابل ویسکوز صرف نظر می شد. در فصل قبل گفته شد که برای جریان سیال دور از مرز جامد، و نیز نقاطی در جریان سیال که اثر ویسکوزیته بسیار پایین است مانند ابتدا و انتهای مجاری که هنوز جریان توسعه یافته نیست و به طور کل در خارج از لایه مرزی، می توان از اثر ویسکوزیته در مقابل اینرسی صرف نظر کرد و گفته شد که به این دسته از سیالات سیالات غیرلزجی گفته می شود که جریان های پتانسیلی نیز در این دسته قرار می گیرند. در فصل قبل جریان پتانسیلی و توابع پتانسیلی ساده به همراه اصل برهنهش معرفی گردید. در این فصل برآنیم تا به برخی کاربردهای جریان های پتانسیلی در مکانیک سیالات اشاره ای داشته باشیم.

۲. کاربرد جریان های ساده یکنواخت، چشمه، چاه و گرداب در مختصات دو بعدی

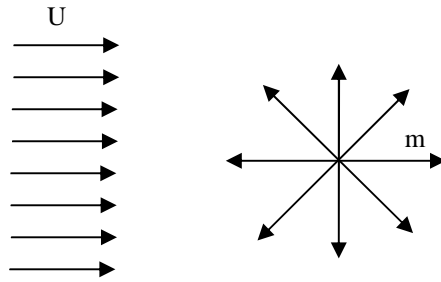
در فصل ۹ اصل برهنهش توابع کمپلکس مورد بررسی قرار گرفت و توضیح داده شد که با جمع و یا ترکیب جریان های ساده پتانسیلی می توان جریان های پیچیده تر پتانسیلی تولید نمود تا بدین وسیله جواب های تحلیلی مناسب با روش آسان تر برای چنین جریان های پتانسیلی به دست آورد. در این بخش به تحلیل جریان های مختلف پتانسیلی مانند جریان پتانسیلی اطراف کره، جریان پتانسیلی اطراف استوانه و غیره پرداخته می شود.

۲-۱. جریان پتانسیلی اطراف جسم نیمه ای رنکین^۱

حرکت یک جریان یکنواخت اطراف یک چشمه خطی را ملاحظه نمایید. با استفاده از اصل برهنهش و استفاده از جدول (۹-۱) می توانیم بنویسیم:

$$F(z) = Uz + \frac{m}{2\pi} \ln z \quad (10-1)$$

¹ Rankine Half Body



شکل ۱-۱۰: حرکت جریان یکنواخت و چشمه به طور مجزا

که معادله (۱۰-۱) تابع کمپلکس را برای جریان جدید که از جریان‌های یکنواخت و چشمه خطی تشکیل شده است، نشان می‌دهد. شکل (۱۰-۱) جریان یکنواخت و چشمه را به طور مجزا نشان می‌دهد. حال با استفاده از نظریه کمپلکس خواهیم داشت:

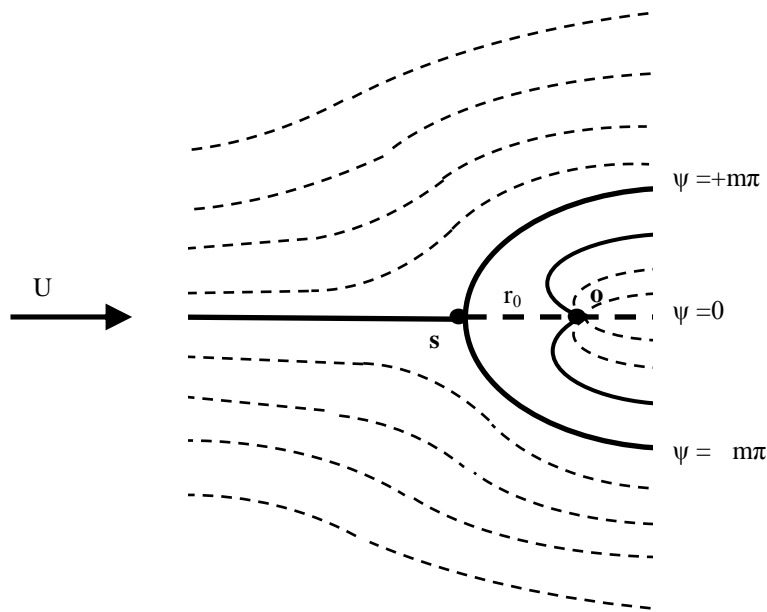
$$\psi = \underbrace{Ur \sin \theta}_{\text{جریان یکنواخت}} + \underbrace{m\theta}_{\text{چشمه}} \quad (10-2)$$

مرفه‌های سرعت در مختصات استوانه‌ای بر حسب ψ به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} (Ur \cos \theta + m) \quad (10-3)$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \sin \theta \quad (10-4)$$

دیاگرام جریان جدید حاصل از جمع دو جریان ساده مذکور در شکل (۱۰-۲) نشان داده شده است.



شکل ۱۰-۲: جریان پتانسیل اطراف چشم نیمه ای رنگین

همان گونه که شکل (۱۰-۲) نشان می دهد، جریان یکنواخت، چشمه را در یک جسم نیمه ای محبوس می نماید. اندازه جسم نیمه ای بستگی به شدت جریان یعنی سرعت U و قدرت چشمه یعنی m دارد.

مطابق شکل مذکور، نقطه S به عنوان نقطه سکون شناخته می شود که مؤلفه های سرعت یعنی $v_r = v_\theta = 0$ می باشند. از طرفی خط مرزی یا خط جریان مرزی از نقطه سکون می گذرد. پس برای به دست آوردن نقطه سکون خواهیم داشت:

$$v_\theta = 0 \quad ; \quad U \sin \theta = 0 \quad ; \quad \theta = 0, \pi \quad (10-5)$$

$$v_r = 0 \quad ; \quad Ur \cos \theta + m = 0 \quad (10-6)$$

نقطه سکون در $\theta = \pi$ قرار دارد. پس معادله (۱۰-۶) برای به دست آوردن فاصله ما بین چشمه و نقطه سکون استفاده می شود. پس با جاگذاری $\theta = \pi$ در معادله (۱۰-۶) خواهیم داشت:

$$r_0 = \frac{m}{U} \quad (10-7)$$

از طرفی برای به دست آوردن خط جریان مرزی که از نقطه S می گذرد، خواهیم داشت:

$$\psi = Ur \sin \theta + m\theta = U \left(\frac{m}{U} \right) \sin \pi + m\pi \quad ; \quad \psi = m\pi \quad (10-8)$$

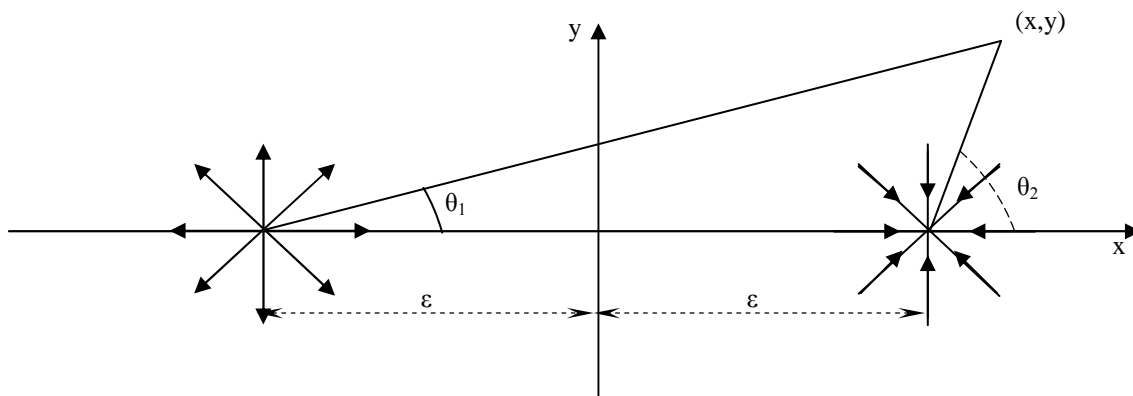
پس معادله (۱۰-۸) خط جریان مرزی بالایی جسم نیمه‌ای رنگین را نشان می‌دهد. فاصله هر نقطه از مرز جسم تا چشمه از رابطه ذیل به دست می‌آید:

$$r = \frac{m(\pi - \theta)}{U \sin \theta} \quad (10-9)$$

۲-۲. جریان چشمه و چاه خطی

چشمه و چاه را با قدرت m در نقطه‌های $(-\varepsilon, 0)$ و $(\varepsilon, 0)$ مطابق شکل (۱۰-۳) ملاحظه نمایید. در این جا با استفاده از اصل برهم‌نش و جدول (۹-۱) برای مجموع جریان‌های چشمه و چاه خواهیم داشت:

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z)$$



شکل ۱۰-۳: چشمه و چاه

بنابراین تابع کمپلکس برای جریان جدید به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$F(z) = m \ln(z + \varepsilon) - m \ln(z - \varepsilon) \quad (10-10)$$

$$F(z) = m \ln \frac{z + \varepsilon}{z - \varepsilon} \quad (10-11)$$

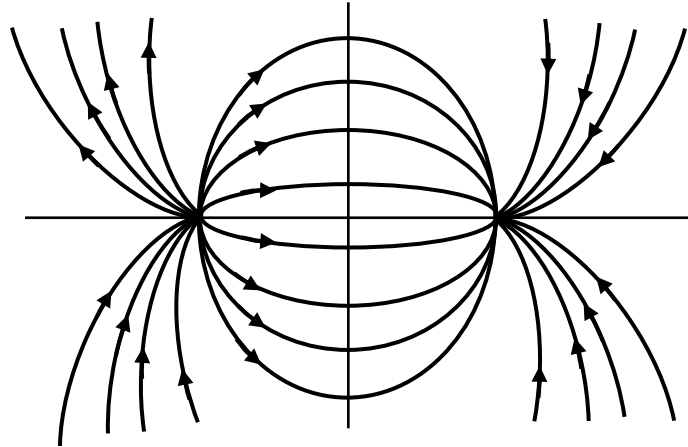
پس تابع جریان برای جریان پتانسیلی جدید به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\psi = \psi_{\text{Source}} + \psi_{\text{Sink}} = m\theta_1 - m\theta_2 = m(\theta_1 - \theta_2) \quad (10-12)$$

مطابق شکل (۱۰-۳) زاویه‌های θ_1 و θ_2 نسبت به نقطه (x, y) تعیین شده‌اند. با استفاده از روابط مثلثاتی می‌توانیم بنویسیم:

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{y}{x + \varepsilon} \quad ; \quad \theta_2 = \tan^{-1} \frac{y}{x - \varepsilon} \quad (10-13)$$

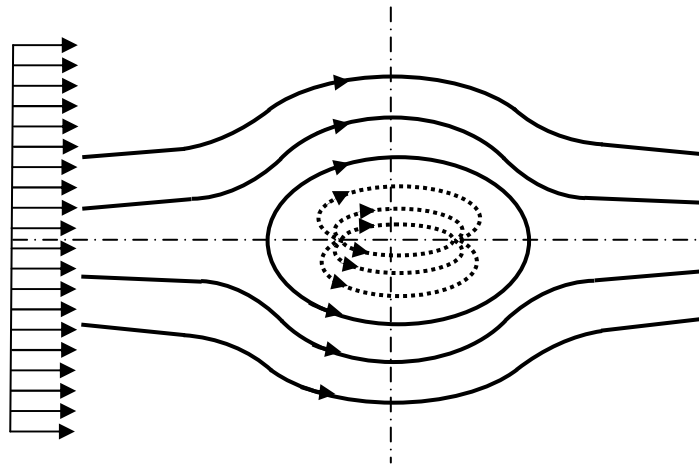
شکل (۱۰-۴) جریان چشمه و چاه خطی را نشان می‌دهد.



شکل ۱۰-۴: چشمه و چاه خطی (جریان پتانسیل مغناطیسی)

۲-۳. جریان یکنواخت اطراف جسم بیضوی رنکین^۲

حال جریان چشمه و چاه خطی را با جریان یکنواخت مطابق شکل (۱۰-۵) ملاحظه نمایید.



شکل ۱۰-۵: جریان یکنواخت اطراف جسم با سطح مقطع بیضوی (چشمه و چاه خطی)

در این جا مطابق اصل بر همنهش خواهیم داشت:

$$F(z) = Uz + m \ln \frac{z + \varepsilon}{z - \varepsilon} \quad (10-14)$$

همچنین تابع جریان به صورت ذیل نوشته می‌شود:

² The Rankine Oval Body

$$\psi = Ur \sin \theta + m(\theta_1 - \theta_2) \quad (10-15)$$

۲-۴. دابلت خطی^۳

اگر در بخش قبل چشمه و چاه در یک نقطه منطبق شوند، خواهیم داشت:

$$F(z) = m \ln \frac{z + \varepsilon}{z - \varepsilon} = m \ln \frac{1 + \frac{\varepsilon}{z}}{1 - \frac{\varepsilon}{z}} \quad (10-16)$$

در این جا اگر $\varepsilon \rightarrow 0$ ، جریان جدید دابلت نامیده می‌شود. در این جا $\varepsilon/|z|$ عدد خیلی کوچکی است یا به عبارتی

$(\varepsilon/z) \rightarrow 0$ می‌باشد. حال اگر معادله (۱۰-۱۶) را بسط دهیم، خواهیم داشت:

$$F(z) = m \ln \left[\left(1 + \frac{\varepsilon}{z}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{z} + O\left(\frac{\varepsilon^2}{z^2}\right)\right) \right] \quad (10-17)$$

$$F(z) = m \ln \left[1 + \frac{2\varepsilon}{z} + O\left(\frac{\varepsilon^2}{z^2}\right) + \dots \right]$$

که 0 نماینگر عبارتهای با درجات بالاتر می‌باشد. با استفاده از بسط $\ln(1+x) = x - x^2/2 + \dots$ می‌توانیم بنویسیم:

$$F(z) \cong m \left(\frac{2\varepsilon}{z}\right) \quad (10-18)$$

زمانی که $(\varepsilon/z) \rightarrow 0$ و $m \rightarrow \infty$ پس $\lim_{m \rightarrow \infty} (m\varepsilon) = \mu$ می‌باشد، لذا معادله (۱۰-۱۸) به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$F(z) = \frac{\mu}{z} \quad (10-19)$$

که عدد دو در μ ادغام شده است. بنابراین معادله (۱۰-۱۹) را تابع کمپلکس دابلت می‌گویند و μ قدرت دابلت نامیده

می‌شود. رابطه (۱۰-۱۹) را به صورت ذیل می‌نویسیم:

$$F(z) = \frac{\mu}{x + iy} = \mu \frac{x}{x^2 + y^2} - i\mu \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (10-20)$$

ملاحظه می‌شود که از قسمت موهومی تابع (۱۰-۱۴) تابع ψ و قسمت حقیقی تابع ϕ حاصل می‌شود.

$$\psi = -\mu \frac{y}{x^2 + y^2} \quad ; \quad \phi = \mu \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (10-21)$$

حال اگر ثابت $\mu = 1$ باشد، پس تابع یا معادله خط جریان از رابطه (۱۰-۲۱) حاصل می‌شود.

³ Linear Doublet

$$x^2 + \left(y + \frac{\mu}{2\psi}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{2\psi}\right)^2 \quad (10-22)$$

معادله (10-22) رابطه برای دایره‌ای می‌باشد که ψ آن ثابت بوده و مرکز دایره در نقطه $x=0$ و $y=-\mu/2\psi$ قرار دارد.

همچنین شعاع دایره برابر $\mu/2\psi$ می‌باشد. حال سرعت پتانسیلی از تابع $F(z)$ به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$W(z) = -\frac{\mu}{z^2} = -\frac{\mu}{r^2} e^{-2i\theta} = -\frac{\mu}{r^2} (\cos \theta - i \sin \theta) e^{-i\theta} \quad (10-23)$$

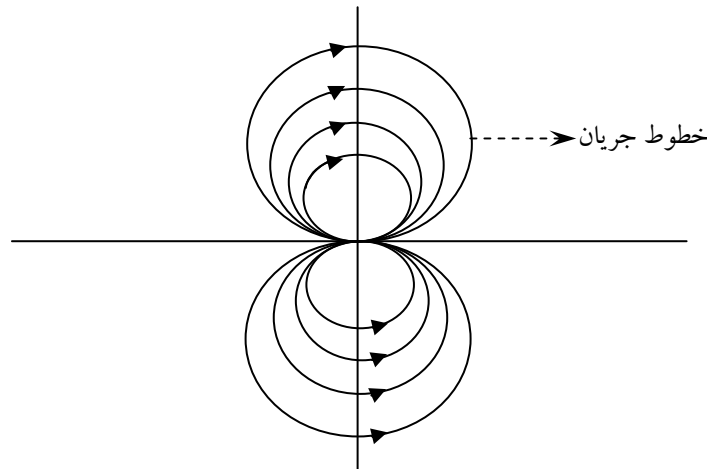
بنابراین مؤلفه‌های سرعت به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$v_r = -\frac{\mu}{r^2} \cos \theta \quad ; \quad v_\theta = -\frac{\mu}{r^2} \sin \theta \quad (10-24)$$

پس ψ و ϕ بر حسب مختصات قطبی به صورت ذیل به دست می‌آید.

$$\psi = -\frac{\mu \sin \theta}{r} \quad ; \quad \phi = \frac{\mu \cos \theta}{r} \quad (10-25)$$

شکل (10-6) دیاگرام یک دابلت را نشان می‌دهد.



شکل 10-6: خطوط جریان یک دابلت خطی (چشمه و چاه خطی منطبق بر هم)

5-2. جریان یکنواخت اطراف یک استوانه ثابت⁴

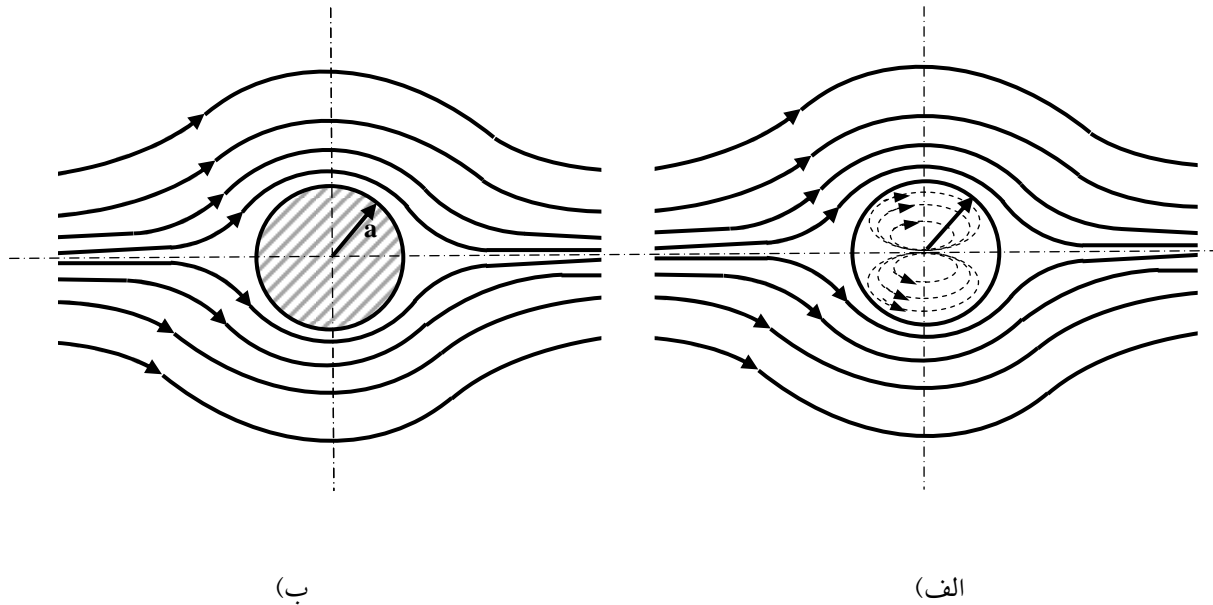
برای توصیف حرکت جریان یکنواخت اطراف یک استوانه از برهم‌نش جریان یکنواخت و یک دابلت خطی استفاده

می‌شود. تابع پتانسیلی کمپلکس این جریان از جمع جریان‌های مذکور به شکل ذیل حاصل می‌شود:

⁴ Flow Around A Circular Cylinder

$$F(z) = \underbrace{Uz}_{\text{جریان یکنواخت}} + \underbrace{\frac{\mu}{z}}_{\text{جریان دابلت}} \quad (10-26)$$

مطابق شکل (۱۰-۷) جریان دابلت در میدان جریان یکنواخت، خودش را به صورت یک استوانه توپر نشان می دهد.



شکل ۱۰-۷: الف) جریان یکنواخت اطراف دابلت. ب) جریان یکنواخت اطراف کره توپر.

در شعاع $r=a$ استوانه از طریق دابلت شکل می گیرد. در این حالت شعاع استوانه بستگی به قدرت دابلت و سرعت جریان آزاد دارد. هر چه قدرت دابلت (μ) بیشتر باشد، شعاع استوانه بزرگتر خواهد بود و بالعکس هر چه سرعت جریان آزاد

بیشتر باشد، قطر استوانه کوچکتر خواهد شد. بنابراین در روی استوانه خواهیم داشت:

$$z = re^{i\theta} = ae^{i\theta} \quad (r = a) \quad (10-27)$$

با جایگذاری معادله (۱۰-۲۷) در معادله (۱۰-۲۶) می توان نوشت:

$$F(z) = Uae^{i\theta} + \frac{\mu}{a}e^{-i\theta} = \left(Ua + \frac{\mu}{a}\right) \cos \theta + i\left(Ua - \frac{\mu}{a}\right) \sin \theta \quad (10-28)$$

بنابراین با استفاده از معادله (۱۰-۲۷) توابع ψ و ϕ به صورت ذیل حاصل می شوند:

$$\psi = \left(Ua - \frac{\mu}{a}\right) \sin \theta \quad (10-29)$$

$$\phi = \left(Ua + \frac{\mu}{a}\right) \cos \theta \quad (10-30)$$

حال مرز استوانه یک خط جریان ثابت فرض می‌شود، پس برای مرز جامد $\psi=0$ فرض می‌نماییم. بنابراین با استفاده از رابطه (۱۰-۳۰) خواهیم داشت:

$$\psi = \left(Ua - \frac{\mu}{a} \right) \sin \theta = 0$$

و در نهایت می‌توان نوشت:

$$\mu = Ua^2 \quad (10-31)$$

پس تابع پتانسیلی کمپلکس برای جریان آزاد اطراف استوانه به شعاع a به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$F(z) = \left(z + \frac{a^2}{z} \right) U \quad (10-32)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۱۰-۳۲) و جاگذاری $z=re^{-i\theta}$ رابطه‌ی ذیل برای سرعت پتانسیلی کمپلکس حاصل می‌شود:

$$w(z) = \left[U \left(\cos \theta - \frac{a^2}{r^2} \cos \theta \right) + i U \left(\sin \theta + \frac{a^2}{r^2} \sin \theta \right) \right] e^{-i\theta} \quad (10-33)$$

بنابراین مؤلفه‌های سرعت به صورت ذیل از معادله (۱۰-۳۳) به دست می‌آیند:

$$v_r = U \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (10-34)$$

$$v_\theta = -U \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

ملاحظه می‌شود در روی استوانه در $r=a$ ، $v_r=0$ و $v_\theta = -2 U \sin \theta$ خواهد بود. در $\theta = 0, \pi$ (نقطه سکون)، هر دو

مؤلفه سرعت صفر می‌شود. تابع جریان نیز با استفاده از معادله (۱۰-۲۹) و (۱۰-۳۱) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\psi(r, \theta) = Ur \sin \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (10-35)$$

با استفاده از مؤلفه‌های سرعت، معادله (۱۰-۳۴) و استفاده از معادله برنولی، ضریب فشار به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$PC = \frac{\bar{p} - \bar{p}^\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (10-36)$$

۲-۶. جریان یکنواخت اطراف یک استوانه چرخان

در این قسمت حرکت سیال یکنواخت را اطراف استوانه چرخان را بررسی می‌کنیم. حرکت جریان یکنواخت اطراف استوانه ساکن با برهمهش جریان آزاد و دابلت خطی به دست آمد. حال اگر دابلت را بر یک گرداب قرار بدهیم، جریان آزاد اطراف استوانه چرخان حاصل می‌شود. پس با استفاده از رابطه (۱۰-۳۲) و تابع جریان گرداب خواهیم داشت:

$$F(z) = U \underbrace{\left(z + \frac{a^2}{z}\right)}_{\text{دابلت + جریان آزاد}} + \underbrace{\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z}_{\text{گرداب}} + \underbrace{k}_{\text{ثابت}} \quad (10-37)$$

که $\mu = Ua^2$ قدرت دابلت، a شعاع استوانه و Γ گردابی (قدرت گرداب) می‌باشند. در این جا گرداب منفی استفاده شده است تا لیفث مثبت ایجاد نماید. بعداً در خصوص لیفث بیشتر توضیح داده خواهد شد. از طرفی توجه شود که با اضافه کردن مقدار ثابت k به معادله (۱۰-۳۷)، مقدار ثابت خط جریان در مرز استوانه برابر صفر ($\psi=0$) تنظیم می‌شود. مقدار ثابت k را متعاقباً به دست خواهیم آورد. بنابراین با جاگذاری $z = a e^{-i\theta}$ در مرز جامد استوانه، معادله (۱۰-۳۷) به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$F(z) = 2Ua \cos \theta + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln a - \frac{\Gamma\theta}{2\pi} + k \quad (10-38)$$

با توجه به این که قسمت موهومی معادله (۱۰-۳۸) برابر با ψ است، خواهیم داشت:

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln a \quad (10-39)$$

اگر در $r = a$ (سطح استوانه) ψ را برابر صفر فرض نماییم، بنابراین لازم است که ثابت k به صورت ذیل فرض گردد:

$$k = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln a \quad (10-40)$$

بنابراین تابع پتانسیل کمپلکس، معادله (۱۰-۳۷) در نهایت به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$F(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z}\right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z}{a} \quad (10-41)$$

که تابع جریان ψ به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{a} \quad (10-42)$$

همان طور که ملاحظه می شود، در $r=a$ ، $\psi=0$ خواهد بود. با مشتق گیری از رابطه (10-41) خواهیم داشت:

$$w(z) = \left\{ U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta + i \left[U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \right] \right\} e^{-i\theta} \quad (10-43)$$

بنابراین با استفاده از رابطه (10-43) مؤلفه های سرعت به صورت ذیل حاصل می شوند:

$$v_r = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (10-44)$$

$$v_\theta = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (10-45)$$

ملاحظه می شود در نقطه سکون مؤلفه های سرعت صفر خواهد بود و این زمانی اتفاق می افتد که $\sin \theta_s = -\Gamma/4\pi Ua$

باشد. که زاویه در نقطه سکون می باشد. بر روی مرز استوانه چرخان خواهیم داشت:

$$v_r = 0 \quad , \quad v_\theta = -2U \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (10-46)$$

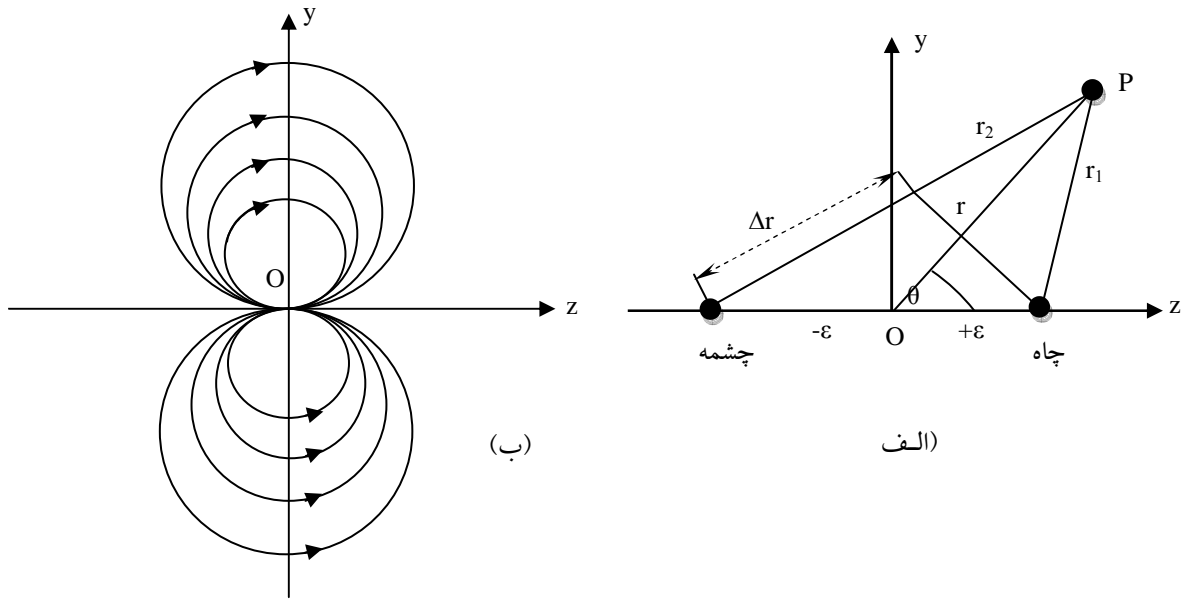
۳. دابلت کروی^۵

یک دابلت، خیلی شبیه دی پل^۶ در الکتریسیته و مغناطیس می باشد. در بخش های قبل دابلت استوانه ای توضیح داده شد.

در این جا از انطباق یک چاه با یک چشمه نقطه ای (در مختصات قطبی) می توان یک دابلت کروی شکل به دست آورد.

⁵ Spherical Doublet

⁶ Dipole



شکل ۸-۱۰: الف) چشمه و چاه نقطه ای ب) خطوط جریان دابلت نقطه ای در مختصات قطبی

در فصل قبل گفته شد که، توابع پتانسیلی برای چشمه و چاه نقطه‌ای با قدرت یکسان به صورت ذیل نوشته می‌شوند:

$$\phi = \phi_{\text{Source}} + \phi_{\text{Sink}} = -\frac{m}{r_1} + \frac{m}{r_2} \quad (10-47)$$

$$\phi = m \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} = m \frac{\Delta r}{r^2} = \frac{m(2\epsilon \cos \theta)}{r^2} \quad (10-48)$$

$$\psi = \Psi_{\text{Source}} + \Psi_{\text{Sink}} = \frac{mz_1}{r_1} - \frac{mz_2}{r_2} \quad (10-49)$$

با فرض این که $\epsilon \rightarrow 0$ و $m \rightarrow \infty$ ، پس حد $2am = \mu$ ، بنابراین ψ و ϕ به صورت ذیل حاصل می‌شوند. که μ ، قدرت دابلت

نقطه‌ای می‌باشد. همچنین توابع جریان و پتانسیالی به صورت ذیل به دست می‌آیند:

$$\phi = -\frac{\mu \cos \theta}{r^2} \quad (10-50)$$

$$\psi = \frac{\mu \sin^2 \theta}{r} \quad (10-51)$$

۴. جریان آزاد اطراف کره با ترکیب دابلت و جریان یکنواخت در مختصات قطبی

در این جا از بر همنهش یک جریان یکنواخت و یک دابلت در مختصات کروی به توصیف جریان آزاد اطراف یک کره توپر می‌رسیم. به این ترتیب توابع ψ و ϕ را برای جریان یکنواخت در مختصات قطبی می‌نویسیم.

$$\phi = Uz = Ur \cos \theta \quad ; \quad \psi = -\frac{1}{2} Ur^2 \sin^2 \theta \quad (10-52)$$

حال اگر قدرت دابلت را به صورت $\mu = -Ua^3/2$ فرض نماییم، به طوری که چشمه طرف چپ چاه قرار دارد، با استفاده از نتایج بخش قبلی (معادلات (10-50) و (10-51)) در خصوص ϕ و ψ خواهیم داشت:

$$\phi = -\frac{1}{2} \frac{Ua^3 \cos \theta}{r^2} \quad ; \quad \psi = \frac{1}{2} \frac{Ua^3 \sin^2 \theta}{r} \quad (10-53)$$

با ترکیب جریان یکنواخت و دابلت برای جریان جدید خواهیم داشت:

$$\phi = U\left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right) \cos \theta \quad (10-54)$$

$$\psi = -\frac{1}{2} Ur^2 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \sin^2 \theta \quad (10-55)$$

معادلات (10-54) و (10-55)، جریان یکنواخت اطراف کره را توصیف می‌نمایند. به دلایل ذیل این مسئله اثبات می‌شود:

(۱) در $\psi=0$ یا $\theta=0$ یا π ، یا برای $r=a$ نیز خط جریان صفر می‌باشد. بنابراین کره با شعاع $r=a$ را می‌توان به عنوان مرز جامد در نظر گرفت.

(۲) هر دوی ψ و ϕ معادلات متقارن جریان پتانسیلی (معادلات (9-28) و (9-29) در فصل قبل) را ارضا می‌نماید.

(۳) در شرایطی که $r \rightarrow \infty$ باشد، یعنی در فاصله بسیار دور از کره، معادلات (10-54) و (10-55)، جریان یکنواخت سرعت را پیش بینی می‌نمایند.

(۴) در سطح کره، معادلات سرعت، $v_r=0$ و $v_\theta \neq 0$ را پیش بینی می‌کنند.

مؤلفه‌های سرعت در میدان حرکت با به دست آوردن از ψ و ϕ ، به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$v_r = U \left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^3 \right] \cos \theta \quad (10-56)$$

$$v_{\theta} = -U \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] \sin \theta \quad (10-57)$$

و با استفاده از معادله برنولی، فشار به صورت ذیل به دست می آید:

$$P(a, \theta) = P^{\infty} + \frac{1}{2} \rho U^2 \left(1 - \frac{a}{4} \sin \theta \right) \quad (10-58)$$

۵. کاربرد جریان‌های پتانسیلی در مکانیک سیالات

جریان‌های پتانسیلی دارای کاربرد وسیع در بسیاری از جریانات واقعی در صنعت و طبیعت دارد. جریان‌های غیرلزجی به عنوان جریان بیرونی لایه مرزی در حل بسیاری از جریانات سیال اطراف اجسام غوطه‌ور مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین در حرکت آب‌های زیرزمینی و در بازیافت نفت خام با استفاده از تزریق آب می‌توان از تئوری سیالات پتانسیلی برای شبیه‌سازی و مدل‌سازی بهره برد. در این جا ابتدا به بحث درگ و لیفت در حرکت سیال یکنواخت اطراف استوانه می‌پردازیم. سپس کاربرد آن را در جریان آب‌های زیر زمینی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۵-۱. درگ و لیفت در جریان یکنواخت اطراف استوانه

در حرکت جریان‌های پتانسیلی اطراف اجسام جامد، همیشه درگ صفر می‌شود. چون فرض شده است که نیروهای ویسکوز قابل اغماض است. از طرفی همان‌طور که جریان اطراف استوانه و کره نشان داده شد، کاملاً متقارن می‌باشد. به عبارتی مؤلفه‌های سرعت در جلو^۷ و عقب اجسام متقارن یا به عبارتی جریانهای بالادستی و پایین دستی یکسان هستند. در حقیقت هیچ نیروی هیدرودینامیکی بر استوانه در اثر حرکت سیال یکنواخت ایجاد نمی‌شود. به علت اغماض ویسکوزیته، حتی فشار نیز در دو طرف کره و استوانه متقارن است. در نهایت هر دوی درگ و لیفت در جریان پتانسیلی اطراف استوانه و کره در سکون صفر می‌باشد.

اما در واقعیت درگ اطراف کره و استوانه صفر نیست. هر چند ویسکوزیته ممکن است ناچیز باشد، لیکن به علت وجود لایه مرزی در مرز جامد و ایجاد گرادیان سرعت، نیروهای ویسکوز موجود می‌باشد. علت دیگر، سیال اطراف کره و یا استوانه در واقعیت متقارن نیست، چون در عقب (جریان پایین دستی) این گونه اجسام، جداسازی لایه مرزی داریم که

⁷ Upstream

منجر به از بین رفتن تقارن و اختلاف فشار می‌شود. پس در واقعیت نیروی درگ وجود دارد. لیکن تئوری سیالات غیرلزجی ناقص بوده و نمی‌تواند رفتار واقعی را در مرز اجسام جامد پیش بینی نماید. این حالت خاص را "تناقض دالمبرت"^۸ اطلاق می‌شود.

۲-۵. نظریه لیفت کوتا-چاو کوسکی^۹

برای جریان سیالات پتانسیلی یکنواخت اطراف یک استوانه چرخان همیشه یک نیروی دینامیکی یا لیفت عمود بر استوانه در جهت جریان پایین دستی وجود دارد. به این پدیده اثر مگنوت^{۱۰} می‌گویند. در این جا مؤلفه‌های سرعت در سطح استوانه چرخان به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$v_r = 0 \quad ; \quad v_\theta = -2U^\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (10-59)$$

با استفاده از معادله برنولی توزیع فشار به صورت ذیل حاصل خواهد می‌شود:

$$P_s - P_\infty = \frac{1}{2} \rho U^{\infty 2} (1 - 4 \sin^2 \theta + 4\beta \sin \theta - \beta^2) \quad (10-60)$$

$$\beta = \frac{\Gamma}{2\pi a U}$$

حال برای محاسبه لیفت از انتگرال نیروی فشار اطراف استوانه استفاده می‌شود:

$$L = - \int_0^{2\pi} (P_s - P_\infty) \sin \theta \, b a \, d\theta \quad (10-61)$$

که b طول استوانه و P_∞ فشار جریان آزاد می‌باشد. حال با جایگذاری رابطه (۱۰-۶۰) در (۱۰-۶۱) خواهیم داشت:

$$L = -\rho b U^\infty \Gamma \quad (10-149)$$

ملاحظه می‌شود که در اثر چرخش استوانه با مقدار گردابی Γ ، لیفت که مستقل از شعاع استوانه بوده عمود بر جریان آزاد و عکس چرخش استوانه به وجود می‌آید.

⁸ d,Alembert Paradox

⁹ Kutta-Joukowski Lift Theorem

¹⁰ Magnus Effect

۳-۵. جریان آب در مخازن زیر زمینی

از کاربردهای مهم جریان پتانسیلی مکانیک سیالات مطالعه جریان نفت خام در مخازن متخلخل از میان منافذ می باشد.

برای افزایش و ازدیاد برداشت نفت از مخازن چند مرحله پیشنهاد شده است:

مرحله اول (بازیافت اولیه^{۱۱}): در این مرحله نفت در چاه به طور خود کار تحت فشار مخزن خارج می شود یا تولید تا آن جا که ممکن است از طریق پمپ انجام می گیرد.

مرحله دوم (بازیافت ثانویه^{۱۲}): در این مرحله نفت به منافذ موجود در سنگ های متخلخل چسبیده است. برای جدا کردن نفت از محیط آب تزریق می شود. با تزریق آب دریا و یا رودخانه نفت را جابجا کرده به طوری که نفت به چاه های تولید منتقل می شود. اگر آب تزریقی با سرعت انجام شود، پدیده انگشتی^{۱۳} اتفاق می افتد و به جای نفت، آب از چاه های تزریق تولید می شود.

مرحله سوم (بازیافت ثالثیه^{۱۴}): در این مرحله از مواد شیمیایی مانند فعال سطحی^{۱۵} برای کاهش فشار موئینگی^{۱۶} میان آب و نفت استفاده می شود. و جریان را برای انتقال نفت باقیمانده در مخازن افزایش می دهد.

از کاربردهای دیگر جریان پتانسیلی تزریق آب برای تصفیه در مخازن زیر زمینی می باشد. برای مثال به علت دور ریز بعضی از مواد سمی همراه با آب به مخازن زیرزمینی لازم است که آب زیر زمینی تصفیه شود. مطابق شکل (۹-۱۰)، برای تصفیه آب از روش تابش نور ماورای بنفش استفاده می شود. در مخزن دو چاه A و B حفر می شود. از طریق چاه B آب به مخزن تزریق شده و از طریق چاه A که در فاصله L از چاه B قرار دارد، آب خارج می شود. آب خارج شده در معرض تصفیه از طریق نور قرار گرفته و مجدداً به چاه برگشت داده می شود و این عمل تکرار می شود تا مواد سمی در آب از بین برود.

¹¹ Primary Recovery

¹² Secondary Recovery

¹³ Finger

¹⁴ Tertiary Recovery

¹⁵ surfactant

¹⁶ Capillary

برای آنالیز جریان در مخزن زیرزمینی، چاه خطی A به عنوان چاه و چاه خطی B به عنوان چشمه خطی در نظر گرفته می شود. هدف در این جا پیدا کردن افت فشار $P_B - P_A$ بین دو چاه می باشد. این افت فشار بر حسب دبی (Q) شعاع چاه (a)، فاصله (L)، ضریب عبوری (κ) و ویسکوزیته (μ) به دست می آید.

برای چشمه خطی و چاه خطی سرعت v_r به صورت ذیل نوشته می شود:

$$v_{r,A} = \frac{Q}{2\pi r_A} \quad (\text{چاه خطی}) \quad (10-62)$$

$$v_{r,B} = \frac{Q}{2\pi r_B} \quad (\text{چشمه خطی})$$

حال طبق قانون داریسی برای سرعت های مذکور داریم:

$$v_{r,A} = -\frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial P_A}{\partial r_A} \quad (10-63)$$

$$v_{r,B} = -\frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial P_B}{\partial r_B}$$

پس با ترکیب معادلات (10-62) و (10-63) فشار چاه های A و B با انتگرالگیری به دست می آید:

$$P_A = \frac{\mu Q}{2\pi\kappa} \ln r_A + f(z) \quad (10-64)$$

$$P_B = -\frac{\mu Q}{2\pi\kappa} \ln r_B + f(z) \quad (10-65)$$

چون مشتق های جزئی در معادلات می باشد، بنابراین ثابت $f(z)$ تنها تابعی از فاصله عمودی z می باشد، به عبارتی دیگر،

فشار با ارتفاع از سطح زمین تغییر می کند. حال به عنوان شرط مرزی اگر $f(z_0) = P_0$ ، پس خواهیم داشت:

$$P = P_A + P_B = \frac{\mu Q}{2\pi\kappa} \ln \frac{r_A}{r_B} + P_0 \quad (10-66)$$

که P اثر فشار هردو چاه را نشان می دهد و P_0 به ارتفاع از سطح چاه بستگی دارد. حال معادله (10-66) در شعاع هر

کدام از چاه ها اعمال می گردد. شعاع هر یک از چاه ها برابر a فرض می شود، پس نقاط مختصات برای چشمه و چاه

مطابق شکل (10-9) به صورت ذیل نشان داده می شود:

$$\text{چاه A : } r_A = a \quad ; \quad r_B = L$$

$$\text{چاه B : } r_B = a \quad ; \quad r_A = L$$

پس با اعمال معادله (۱۰-۶۶) در شعاع خارجی هر چاه، به طوری که فشار در شعاع خارجی هر چاه بستگی به فشار چاه مربوط و چاه دیگر دارد. پس خواهیم داشت:

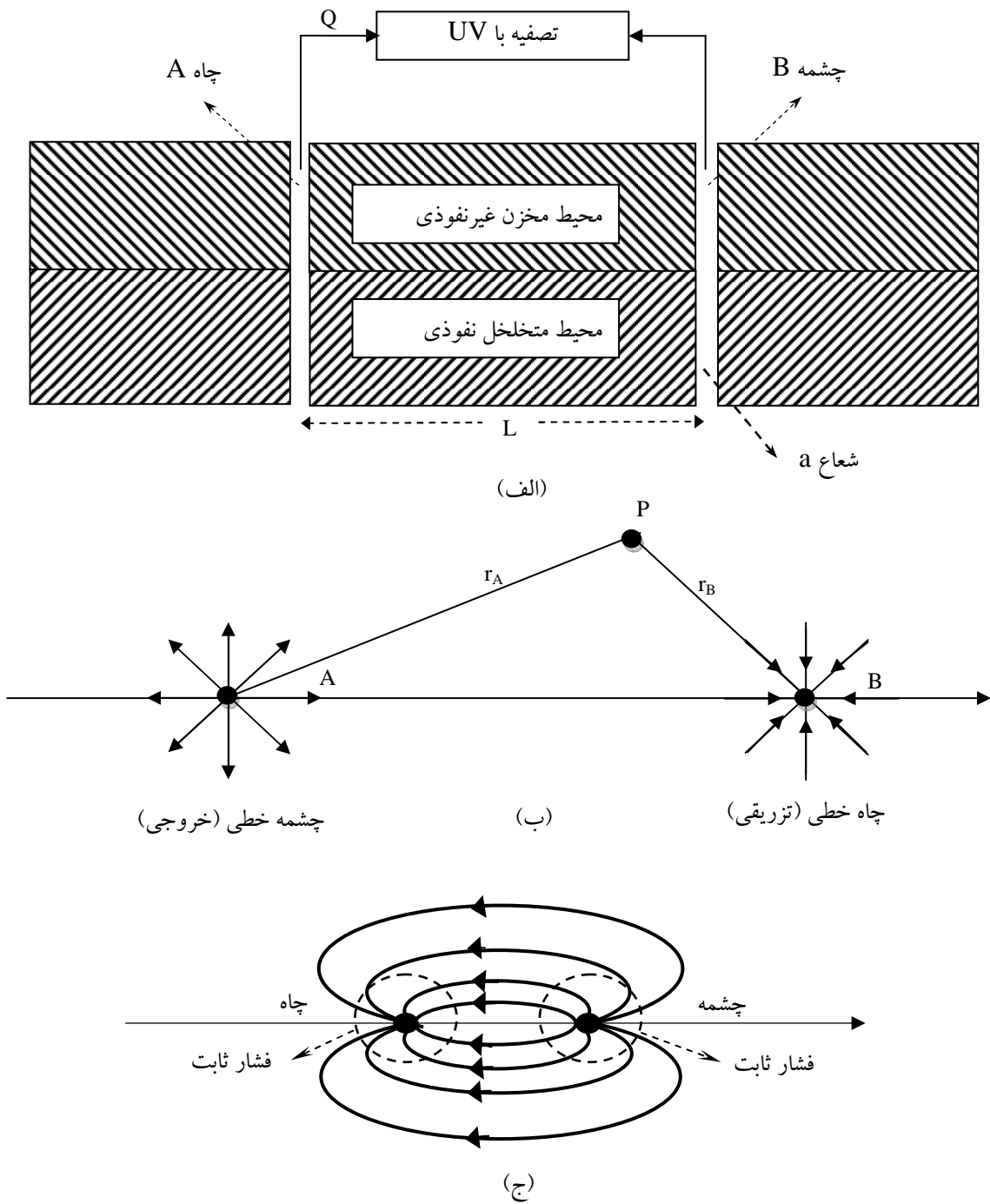
$$P_B = P_0 + \frac{\mu Q}{2\pi\kappa} \ln \frac{L}{a} \quad (10-67)$$

$$P_A = P_0 + \frac{\mu Q}{2\pi\kappa} \ln \frac{a}{L}$$

پس فشار لازم، تفاوت بین دو فشار خواهد بود:

$$P_B - P_A = \frac{\mu Q}{2\pi\kappa} \ln \left(\frac{L}{a}\right)^2 = \frac{\mu Q}{\pi\kappa} \ln \frac{L}{a} \quad (10-68)$$

شکل (۱۰-۹) نقاط ایزوبار (هم فشار) را در حوالی چاه نشان می دهد که تقریباً دایره شکل است.



شکل ۹-۱۰: جریان آب در مخزن زیرزمینی

۶. خلاصه (جمع بندی)

حرکت جریان یکنواخت اطراف استوانه ساکن با برهمنesh جریان آزاد و دابلت خطی به دست می آید. از انطباق یک چاه با یک چشمه نقطه‌ای (در مختصات قطبی) یک دابلت کروی شکل به دست می آید. از برهمنesh یک جریان یکنواخت و یک دابلت در مختصات کروی توصیفی برای جریان آزاد اطراف یک کره توپر حاصل می شود. جریان‌های غیرلزجی به عنوان جریان بیرونی لایه مرزی در حل بسیاری از جریانات سیال اطراف اجسام غوطه‌ور مورد استفاده قرار می گیرد. برای جریان سیالات پتانسیلی یکنواخت اطراف یک استوانه چرخان همیشه یک نیروی دینامیکی یا لیفت عمود بر استوانه در جهت جریان پایین دستی وجود دارد. در حرکت آب‌های زیرزمینی و در باز یافت نفت خام با استفاده از تزریق آب می توان از تئوری سیالات پتانسیلی برای شبیه سازی و مدل سازی بهره برد. به این پدیده اثر مگنوت می - گویند. از کاربردهای مهم جریان پتانسیلی مکانیک سیالات مطالعه جریان نفت خام در مخازن متخلخل از میان منافذ می باشد.