

مکانیک سیالات پیشرفته

فصل ششم

جریان سیالات با عدد رینولدز پایین (جریان‌های خزشی)

۱. مقدمه ۲
۲. معادلات استوکس برای سیالات با عدد پایین رینولدز ۲
۳. جریان فشرده‌گی فیلم ۵
۴. حرکت جریان خزشی اطراف کره (جریان استوکس) ۷
۵. مسئله یاتاقان لغزنده، تقریب هیدرودینامیکی روانکاری ۱۹
۶. سیال خزشی در محیط‌های متخلخل. (optional) ۲۳
۷. خلاصه (جمع بندی) ۲۶

۱. مقدمه

در فصل پنجم بیان شد که معادلات ناویر-استوکس برای گروه خاصی از سیالات می‌تواند ساده شود، به طوری که می‌توان با کمک تقریب، جواب‌های قابل قبولی برای این گونه سیالات فراهم نمود. سیالات ویسکوز با عدد رینولدز پایین ($Re \ll 1$) در گروه جریان سیالات خزشی قرار می‌گیرند. در این فصل با آنالیز عددی نشان خواهیم داد که برای سیالات خزشی عبارت‌های اینرسی قابل اغماض بوده، به طوری که بتوان معادلات ساده شده ناویر-استوکس را برای توصیف حرکت جریان‌های سیالات ویسکوز با اطمینان اعمال نمود.

۲. معادلات استوکس ۱ برای سیالات با عدد پایین رینولدز

معادله بدون بعد ناویر-استوکس در فصل ششم نشان داده و توضیح داده شد که برای عبارت فشار از مشخصه فشار به صورت ρU^2 برای سیالات غیر لزجی استفاده می‌شود. در این جا نشان داده می‌شود که برای سیالات با ویسکوزیته بسیار بالا (وقتی که عدد رینولدز آن‌ها خیلی پایین باشد)، می‌توان عبارت اینرسی را با استفاده از معادله بدون بعد ناویر-استوکس حذف نمود. در این حالت فشار را به صورت ذیل بدون بعد می‌نماییم:

$$\bar{P}^* = \frac{P}{\mu U} = \frac{PL}{\mu U} \quad (۸-۱)$$

با همان روشی که قبلاً در فصل ششم توضیح داده شد، خواهیم داشت:

$$\vec{v}^* = \frac{\vec{v}}{U} \quad ; \quad \nabla^* = L\nabla \quad ; \quad \frac{D}{Dt^*} = \left(\frac{L}{U}\right) \frac{D}{Dt} \quad (۸-۲)$$

بنابراین با جاگذاری عبارت‌های بدون بعد در معادله ناویر-استوکس، خواهیم داشت:

$$\text{Re} \frac{Dv^*}{Dt} = -\nabla^* P^* + \nabla^{*2} v^* + \left(\frac{\text{Re}}{\text{Fr}}\right) \frac{\vec{g}}{g} \quad (۸-۳)$$
$$\text{Re} = \frac{\rho v L}{\mu} \quad ; \quad \text{Fr} = \frac{U^2}{gL}$$

¹ Stokes equation

در شرایطی که عدد رینولدز پایین باشد ($Re \ll 1$)، عبارت اینرسی از طرف چپ معادله بالا حذف می‌شود. عبارت گرانشی نیز برای مجاری بسته در عبارت فشار ادغام شده، به طوری که معادله (۸-۳) به شکل ذیل نوشته می‌شود:

$$\nabla \bar{P}^* = \nabla^2 \vec{v}^* \quad (8-4)$$

شکل اندیسی معادله (۸-۴) به صورت ذیل نوشته خواهد شد:

$$\frac{\partial \bar{P}^*}{\partial x_i^*} = \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} \right) \quad (8-5)$$

از طرفی شکل اصلی معادله (۸-۵) به صورت‌های ذیل استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \quad (\text{اندیسی}) \quad (8-6)$$

$$\nabla \bar{P} = \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (\text{برداری})$$

به معادله (۸-۶) معادلات استوکس گفته می‌شود و $\bar{P} = P + \rho gh$ ، همان فشار هیدرو استاتیکی می‌باشد. در این حالت سیال فاقد شتاب خواهد بود. در جریان چنین سیالاتی که عبارت‌های اینرسی برای آن‌ها حذف می‌شوند، "سیالات خزشی" گفته می‌شوند.

حال اگر از دو طرف معادله (۸-۶) دیورژانس گرفته شود، خواهیم داشت:

$$\nabla \cdot \nabla \bar{P} = \mu \nabla \cdot \nabla^2 \vec{v} \quad (8-7)$$

$$\nabla^2 \bar{P} = \mu \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{v}) \quad (8-8)$$

$$\nabla^2 \bar{P} = 0 \quad (8-9)$$

مشاهده می‌شود که در معادله (۸-۸)، عبارت داخل پرانتز به واسطه معادله پیوستگی صفر می‌باشد. پس میدان فشار

$P(x,y,z)$ در سیالات خزشی از معادله لاپلاس پیروی می‌کند که تابعی هارمونیک^۲ است.

در فصل پنجم توضیح داده شد که برای جریان‌های دو بعدی، معادلات استوکس به صورت ذیل نوشته می‌شود:

² Harmonic

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (\lambda-10)$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (\lambda-11)$$

با مشتق گیری ضربدری $\partial/\partial x$ و $\partial/\partial y$ از دو معادله $(\lambda-10)$ و $(\lambda-11)$ ، و سپس کم کردن معادلات مذکور، عبارت فشار حذف شده و معادله دوگانه هارمونیک $\nabla^4 \psi = 0$ به دست می آید که ψ تابع جریان می باشد.

سیالات خزشی حداقل در پنج گروه زیر کاربرد دارند:

- (۱) جریانات آرام کاملاً توسعه یافته^۳: این گونه سیالات که در فصل پنجم به آن‌ها اشاره شد، در یک جهت حرکت می کنند و کاملاً ویسکوز در نظر گرفته می شوند.
 - (۲) جریانات آرام در مجاری باریک اما متغیر^۴: این جریانات ابتدا برای مکانیسم روانکاری سیالات باریک به صورت فیلم^۵ ارائه شد و مربوط به نظریه روانکاری هیدرودینامیکی^۶ می باشد.
 - (۳) جریانات خزشی اطراف اجسام غوطه ور^۷: این مسئله از حل استوکس برای جریان سیال اطراف یک کره شروع گردید. مسائل مشابه آن در منابع و کتاب هاپل و برنر^۸ ارائه شده است.
 - (۴) جریان در محیط های متخلخل^۹: این گونه مسائل در بررسی حرکت آب و نفت در خاک و سنگ های متخلخل، همچنین در حرکت محلول ها در فیلترها و بسترهای کاتالیست، خیلی مهم می باشند.
 - (۵) جریان پلی مری در دستگاه های اکسترودر، قالب ریزی مکشی و غیره: در صنایع پلاستیک و لاستیک، حرکت مواد مذاب پلی مری به صورت خزشی انجام می شود. حرکت سیالات پلاستیک مذاب با ویسکوزیته خیلی بالا در قالب های لوله سازی، قالب های تزریقی و غیره از انواع جریانات با عدد رینولدز پایین می باشند.
- در ادامه با ارائه مثال هایی از جریان های خزشی به بررسی بیشتر این گونه سیالات پرداخته می شود.

³ Fully Developed Laminar Flow

⁴ Laminar Flow Through Narrow Path

⁵ Lubrication

⁶ Hydrodynamic Lubrication Theory

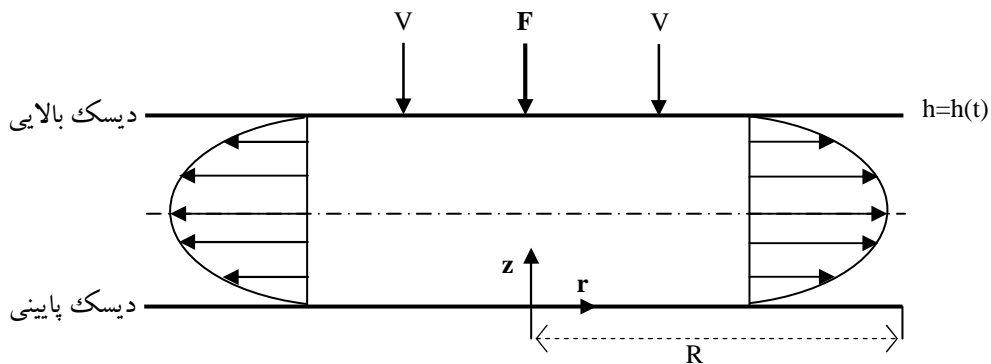
⁷ Creeping Flow About Immersed Bodies

⁸ Happel & Brenner's Book

⁹ Flow Through Porous Media

۳. جریان فشردگی فیلم ۱۰

سیالی با دانسیته ρ و ویسکوزیته بالای μ بین دو دیسک موازی با شعاع R مطابق شکل (۸-۱) قرار دارد. دیسک صفحه پایینی ثابت بوده و دیسک صفحه بالایی با سرعت ثابت v به طرف پایین حرکت می کند. به تدریج که صفحه بالایی پایین تر می آید، فیلم بین دو صفحه، فشرده شده و به صورت شعاعی از اطراف دیسک به طرف بیرون و در جهت r حرکت می نماید. مقدار نیروی F را طوری می خواهیم تنظیم کنیم که سرعت صفحه همواره ثابت بوده و فاصله دو صفحه به مقدار h برسد.



شکل ۸-۱: جریان فشردگی فیلم بین دو دیسک صفحه‌ای موازی

(۱) ابتدا فرض می کنیم که جریان سیال کند بوده، به طوری که نیروهای اینرسی قابل اغماض خواهند بود. هم چنین در

جهت θ سرعت قابل اغماض می باشد ($v_\theta=0$)، سپس فرض می کنیم که تقارن محوری داریم، یعنی $\partial/\partial\theta = 0$.

(۲) به علت کم بودن فاصله بین دو صفحه، جهت جریان در جهت r خواهد بود. همچنین فرض می کنیم که فاصله بین دو

صفحه تابعی از زمان باشد، یعنی $h=h(t)$.

(۳) قانون بقای جرم به صورت ذیل نوشته می شود:

$$Q = \pi r^2 v = 2\pi r \int_0^h v_r dz \quad (۸-۱۲)$$

که Q دبی حجمی می باشد. در این جا چون سیال تراکم ناپذیر است، ρ از دو طرف معادله بالا حذف شده است.

¹⁰ Squeeze Film Flow

۴) معادله ناویر- استوکس در مختصات استوانه‌ای برای سیال خزشی برای مؤلفه r به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} (rv_r) \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \quad (۸-۱۳)$$

ملاحظه می‌شود که فشار در جهت r افت پیدا کرده و از فشار P در $r=0$ به فشار $P=0$ در $r=R$ می‌رسد. با توجه به این

که سرعت نسبت به r تغییر نمی‌کند، پس $\partial v_r / \partial r = 0$. در نتیجه معادله حرکت به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \quad (۸-۱۴)$$

با استفاده از معادلات ناویر- استوکس در جهت z و θ ، داریم:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

۵) با استفاده از شرایط مرزی بر روی هر دو صفحه دیسک خواهیم داشت:

$$z = 0 \quad ; \quad v_r = 0 \quad (۸-۱۵)$$

$$z = h \quad ; \quad v_r = 0$$

همان گونه که ملاحظه می‌شود در این جا از اصل عدم لغزش در مرز جامد استفاده شد. بنابراین با استفاده از شرایط

مرزی (۸-۱۵) و با انتگرال گیری از معادله (۸-۱۴)، پروفیل سرعت به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$v_r = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) (zh - z^2) \quad (۸-۱۶)$$

۶) محاسبه افت فشار یا توزیع فشار با استفاده از معادلات (۸-۱۲) و (۸-۱۶) به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$\pi r^2 V = 2\pi r \int_0^h -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) (zh - z^2) dz \quad (۸-۱۷)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{6\mu V r}{h^3} \quad (۸-۱۸)$$

با انتگرال گیری از معادله (۸-۱۸) و استفاده از شرایط مرزی $P=0$ در $r=R$ ، خواهیم داشت:

$$P = \frac{3\mu V (R^2 - r^2)}{h^3} \quad (۸-۱۹)$$

ملاحظه می‌شود که در $r=0$ ، فشار در مرکز دیسک‌ها بیشینه خواهد بود.

(۷) محاسبه نیروی کل وارده بر دیسک بالایی برای نگه داشتن سرعت ثابت v ، به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} dF &= PdA \\ dA &= r dr d\theta \\ F &= \int_0^{2\pi} \int_0^R Pr dr d\theta = 2\pi \int_0^R \frac{3\mu v (R^2 - r^2)}{h^3} r dr \end{aligned} \quad (۸-۲۰)$$

که نیروی اعمال شده کل عبارت است از:

$$F = \frac{3\pi\mu VR^4}{2h^3} \quad (۸-۲۱)$$

از طرفی سرعت دیسک بالایی به صورت $v = -dh/dt$ بیان می‌شود که علامت منفی به واسطه حرکت صفحه بالایی در

خلاف جهت محور z است. پس با استفاده از معادله (۸-۲۱) خواهیم داشت:

$$V = \frac{2Fh^3}{3\pi\mu R^4} \quad (۸-۲۲)$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{2Fh^3}{3\pi\mu R^4} \quad (۸-۲۳)$$

با انتگرال گیری از معادله (۸-۲۳) و استفاده از شرط مرزی $h=H$ در $t=0$ ، خواهیم داشت:

$$h = \left(\frac{1}{H^2} + \frac{4Ft}{3\pi\mu R^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (۸-۲۴)$$

معادله (۸-۲۴) به عنوان معادله استفان^{۱۱} شناخته شده که فاصله بین دو صفحه را بر حسب زمان نشان می‌دهد.

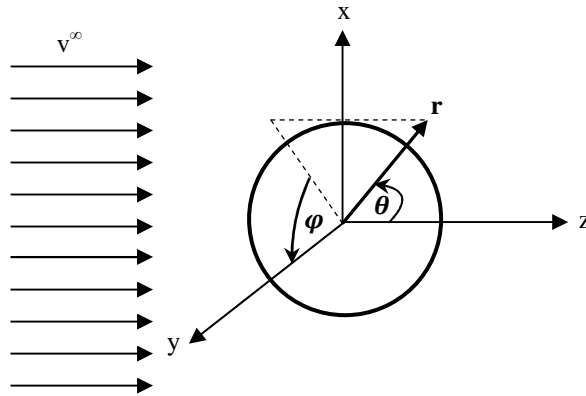
۴. حرکت جریان خزشی اطراف کره (جریان استوکس)

حرکت سیالی ویسکوز با ویسکوزیته μ و دانسیته ρ را در اطراف یک کره توپر مطابق شکل (۸-۲) در نظر بگیرید.

ملاحظه می‌شود که جریان آزاد دارای سرعت v^∞ می‌باشد. چون مجرای حرکت سیال اطراف کره می‌باشد، بنابراین

معادلات ناویر-استوکس در مختصات کروی نوشته خواهد شد.

^{۱۱} Stefan Equation



شکل ۸-۲: حرکت سیال خزشی اطراف کره توپر

(۱) معادله پیوستگی در مختصات کروی نوشته می شود:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) = 0 \quad (۸-۲۵)$$

ملاحظه می شود که فرض تقارن محوری $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ استفاده شده است و $v_\phi = 0$ می باشد.

(۲) معادله مومنوم (ناویر-استوکس) در جهت های r و θ نوشته شده و ساده می شوند:

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 v_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right] \quad (۸-۲۶)$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (۸-۲۷)$$

در این جا با توجه به این که حل دو معادله بالا بسیار پیچیده می باشد و از طرفی جریان خزشی فرض شده است، بنابراین

از عبارت های اینرسی صرف نظر می شود. از طرفی با استفاده از تابع جریان در مختصات کروی یعنی $\psi = \psi(r, \theta)$ و با

مشتق گیری ضربداری از معادلات (۸-۲۶) و (۸-۲۷) نسبت به θ و r ، بعد از ساده سازی به معادله ذیل می رسیم:

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad \text{Re} \ll 1 \quad (۸-۲۸)$$

که در مختصات کروی معادله (۸-۲۸) به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \psi = 0 \quad (۸-۲۹)$$

از طرفی مؤلفه‌های سرعت در مختصات کروی بر حسب ψ به صورت ذیل نشان داده می‌شوند:

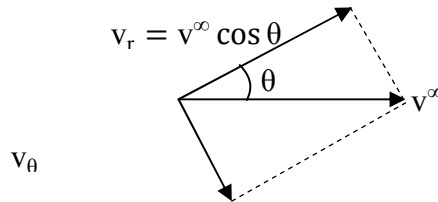
$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (۸-۳۰)$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (۸-۳۱)$$

۳) چهار شرط مرزی برای حل معادله (۸-۲۹) نیاز می‌باشد که به صورت ذیل ارائه می‌شوند:

شرایط مرزی در فاصله بی نهایت: در سرعت آزاد سیال در مختصات دکارتی به صورت $v_x=v_y=0$ ، $v_z=v^\infty$ می‌باشد.

لیکن در مختصات کروی مؤلفه v_z به دو مؤلفه v_θ^∞ و v_r^∞ به صورت ذیل تجزیه می‌شود:



$$\text{شرط مرزی ۱: } r = r_\infty : v_r = v^\infty \cos \theta \quad (۸-۳۲)$$

$$\text{شرط مرزی ۲: } r = r_\infty : v_\theta = -v^\infty \sin \theta \quad (۸-۳۳)$$

دو شرط مرزی در سطح کوه: با استفاده از شرط عدم لغزش در مرز جامد سرعت برابر صفر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\text{شرط مرزی ۳: } r = R : v_r = 0 = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (۸-۳۴)$$

$$\text{شرط مرزی ۴: } r = R : v_\theta = 0 = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (۸-۳۵)$$

۴) با استفاده از معادلات (۸-۳۰) و (۸-۳۱) و اعمال شرایط مرزی در $r \rightarrow \infty$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = v^\infty \cos \theta \quad (۸-۳۶)$$

$$-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -v^\infty \sin \theta \quad (۸-۳۷)$$

پس خواهیم داشت:

$$d\psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) d\theta + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) dr \quad (۸-۳۸)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = r^2 v^\infty \cos \theta \sin \theta \quad (8-39)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = r v^\infty \sin^2 \theta \quad (8-40)$$

با جایگذاری معادلات (8-39) و (8-40) در معادله (8-38) و انتگرال گیری از این معادله خواهیم داشت:

$$\psi = \frac{r^2}{2} v^\infty \sin^2 \theta + \text{constant} \quad (8-41)$$

ثابت اختیاری در معادله (8-41) را برابر صفر قرار می دهیم. چون با اختیار کردن هر عددی، با مشتق گیری برای به دست

آوردن مؤلفه های سرعت، مشتق عدد ثابت برابر صفر خواهد شد. لذا تابع جریان در $r \rightarrow \infty$ به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\psi^\infty = \frac{r^2}{2} v^\infty \sin^2 \theta \quad (8-42)$$

از شکل تابع جریان در $r \rightarrow \infty$ ، معادله (8-42)، می توان تابع جریان را به صورت شکل اولیه ذیل ارائه داد:

$$\psi = f(r) \sin^2 \theta \quad (8-43)$$

که معادله (8-43) نمایان گر ضرب دو تابع $f(r)$ و $\sin^2 \theta$ بوده، به عبارتی جداسازی متغیرها در این جا انجام شده است.

حال جواب اولیه معادله (8-43) را در معادله تابع جریان، معادله (8-29)، جایگزین نموده و به صورت ذیل مشتق گیری

می کنیم:

$$\left[\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 f(r) \sin^2 \theta = 0 \quad (8-44)$$

بعد از اعمال مشتق گیری از معادله (8-44) و جداسازی عبارت های مشتق نسبت به r ، خواهیم داشت:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right] \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right] f(r) = 0 \quad (8-45)$$

همان گونه که ملاحظه می شود معادله (8-45) یک معادله همگن دیفرانسیل خطی است که دارای جواب عمومی

$f(r) = Cr^n$ می باشد. معادله (8-45) نیز به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\left[\frac{d^4}{dr^4} - \frac{4}{r^4} - \frac{4}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} \right] Cr^n = 0 \quad (8-46)$$

با مشتق گیری از معادله (8-46) و قرار دادن ضریب معادله برابر با صفر خواهیم داشت:

$$[(n-2)(n-3)-2][n(n-1)-2]=0 \quad (8-47)$$

معادله (8-47) چهار جواب به شرح ذیل دارد:

$$n = -1, 1, 2, 4$$

پس جواب تابع $f(r)$ به صورت ذیل نوشته می شود:

$$f(r) = \frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4 \quad (8-48)$$

همان گونه که ملاحظه می شود معادله (8-48) دارای چهار ثابت می باشد که باید تعیین گردد. پس با اعمال شرایط مرزی

در $r \rightarrow \infty$ خواهیم داشت:

$$\psi^\infty = f(r) \sin^2 \theta = \left(\frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4 \right) \sin^2 \theta = \frac{r^2}{2} v^\infty \sin^2 \theta \quad (8-49)$$

از مقایسه دو طرف معادله (8-49) ملاحظه می شود که $D=0$ بوده و $C = \frac{1}{2} v^\infty$ می باشد، پس خواهیم داشت:

$$\psi = \left(\frac{A}{r} + Br + \frac{1}{2} v^\infty r^2 \right) \sin^2 \theta \quad (8-50)$$

از طرفی با اعمال شرایط مرزی ۳ و ۴ (روابط (8-34) و (8-35)) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{2}{r^2} f(r) \cos \theta = 0 \quad (8-51)$$

$$-\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{\sin \theta}{r} = 0 \quad (8-52)$$

که $f(r) = A/r + Br + 1/2 v^\infty r^2$ می باشد، پس با جایگذاری $f(r)|_{r=R}$ در معادلات (8-51) و (8-52) خواهیم داشت:

$$\frac{A}{R^3} + \frac{B}{R} + \frac{v^\infty}{2} = 0 \quad (8-53)$$

$$-\frac{A}{R^3} + \frac{B}{R} + v^\infty = 0 \quad (8-54)$$

با حل همزمان معادلات (8-53) و (8-54) ثابت های A و B به دست می آیند.

$$A = \frac{r^\infty}{4} R^3 \quad ; \quad B = -\frac{3r^\infty}{4} R \quad (8-55)$$

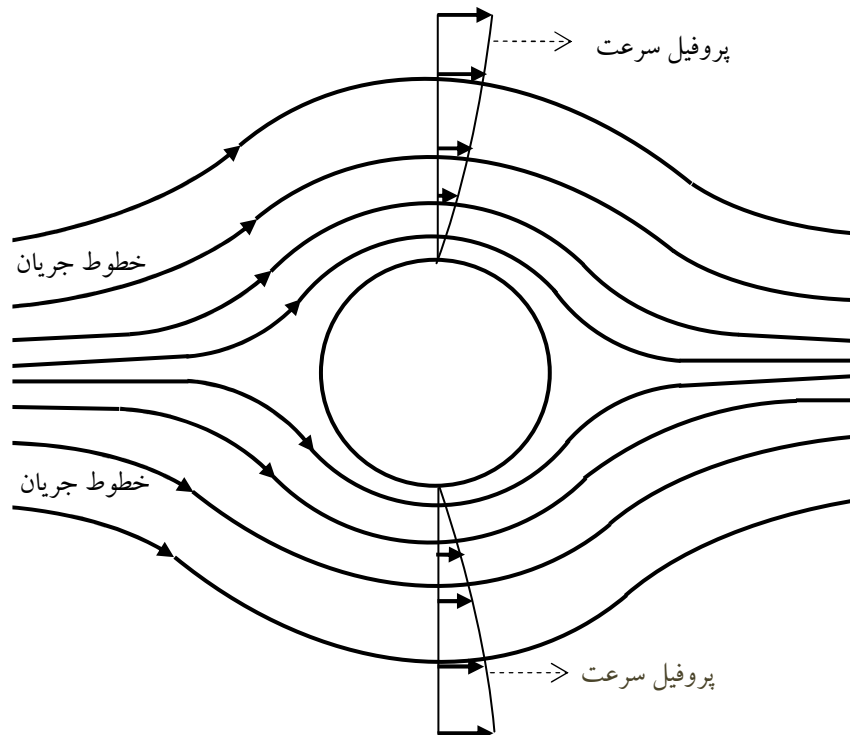
بنابراین در نهایت تابع جریان برای سیال ویسکوز اطراف کره به شکل ذیل حاصل می شود:

$$\psi = \frac{1}{2}v^\infty \left(\frac{R^3}{2r} - \frac{3R}{2}r + r^2 \right) \sin^2 \theta \quad (8-56)$$

۵) مؤلفه‌های سرعت $v_r(r, \theta)$ و $v_\theta(r, \theta)$ با استفاده از معادلات (8-30) و (8-31) و (8-56) به دست می‌آیند.

$$v_r = v^\infty \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \theta \quad (8-57)$$

$$v_\theta = v^\infty \left[-1 + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin \theta \quad (8-58)$$



شکل ۸-۳: خطوط جریان و پروفیل سرعت اطراف کره

برای نمایش گرافیکی لازم است خطوط جریان و پروفیل سرعت در (r, θ) داده شده و با استفاده از معادلات (8-56) تا

(8-58) مقادیر ψ و v_r و v_θ را محاسبه نمود. شکل (8-۳) تغییرات متغیرها را نشان می‌دهد.

در شرایطی که سیال در حال سکون باشد و کره صلب در درون سیال حرکت نماید، لازم است که مؤلفه v^∞ را از

معادلات جریان و مؤلفه‌های سرعت v_r و v_θ کم نماییم.

$$v_r^0 = v^\infty \left[-\frac{3}{2} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \theta \quad (8-59)$$

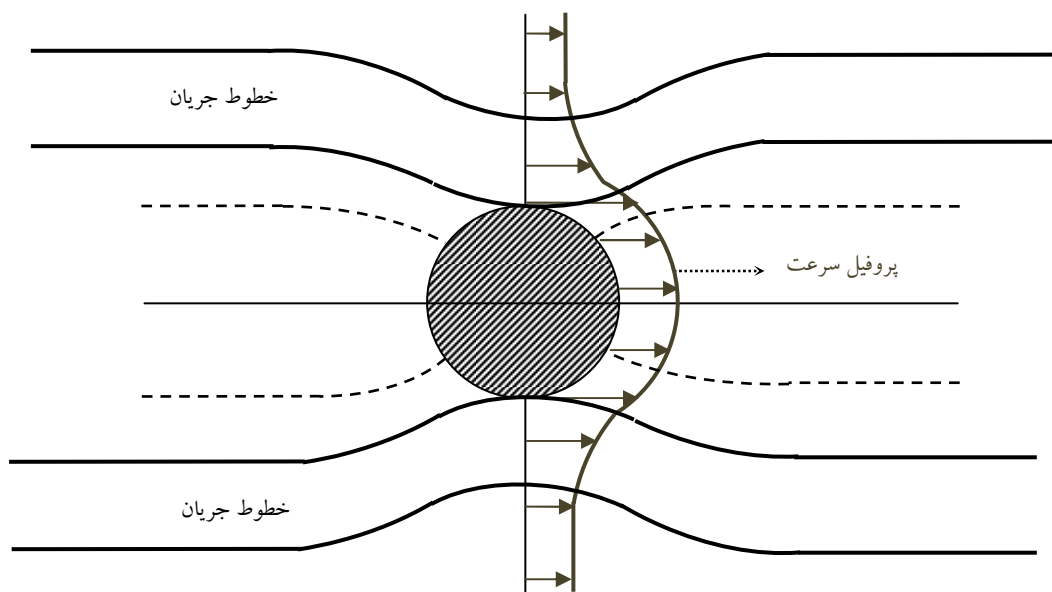
$$v_{\theta}^0 = v_{\infty} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin \theta \quad (8-60)$$

که در این جا v^{∞} سرعت ثابت کره در اطراف سیال ساکن خواهد بود و v_r^0 و v_{θ}^0 مؤلفه‌های پروفیل سرعت سیال

اطراف کره متحرک هستند. تابع جریان سیال اطراف کره متحرک نیز به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\psi^0(r, \theta) = \frac{1}{2} v_{\infty} \left(\frac{R^3}{2r} - \frac{3R}{2} r \right) \sin^2 \theta \quad (8-61)$$

شکل (8-4) تابع جریان و پروفیل سرعت را برای کره صلب متحرک در جریان ویسکوز ساکن نشان می‌دهد.



شکل 8-4: خطوط جریان و پروفیل سرعت برای حرکت کره صلب در یک سیال ساکن

6) حال لازم است توزیع میدان فشار $P=P(r, \theta)$ را برای حرکت سیال آزاد اطراف کره ثابت به دست آوریم. تابع فشار

از انتگرال گیری رابطه زیر به دست می‌آید:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right) dr + \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right) d\theta \quad (8-62)$$

با جاگذاری مؤلفه‌های سرعت (8-59) و (8-60) در معادلات ساده شده ناور-استوکس یعنی معادلات (8-26) و (8-27)-

8) و صرف نظر از عبارت‌های اینرسی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2v_r \cot \theta}{r^2} \right] \quad (8-63)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r \sin^2 \theta} \right] \quad (8-64)$$

پس مشتق‌های جزئی فشار به صورت ذیل به دست می‌آیند:

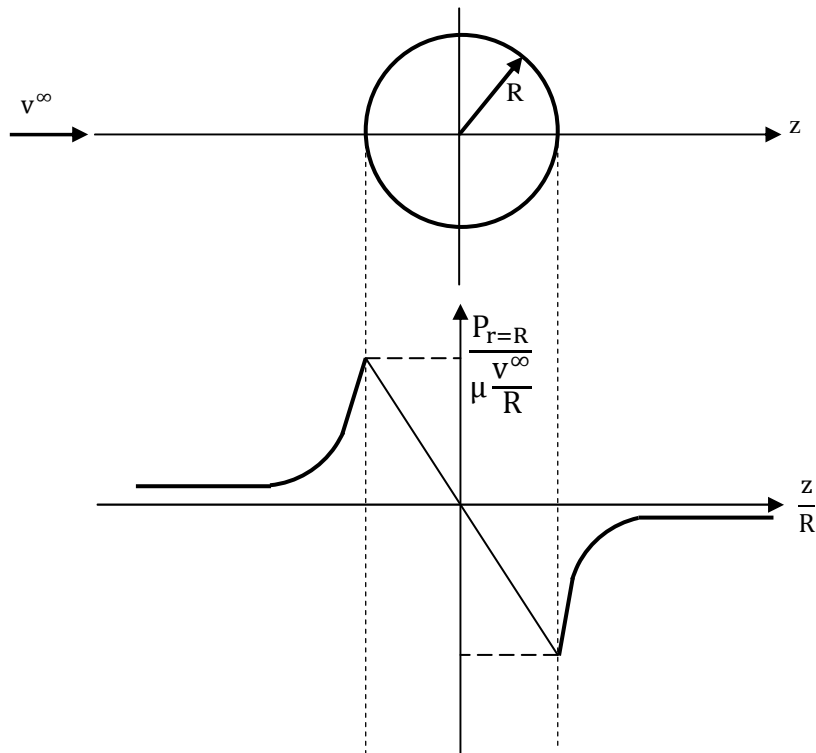
$$\frac{\partial P}{\partial r} = \left(\frac{3\mu R v^\infty}{r^3} \right) \cos \theta \quad (8-65)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \left(\frac{3\mu R v^\infty}{2r^2} \right) \sin \theta \quad (8-66)$$

بنابراین با جایگذاری روابط (8-65) و (8-66) در معادله (8-62) و انتگرال‌گیری از آن، تابع توزیع فشار حاصل می‌شود:

$$P = P_\infty - \left(\frac{3\mu R v^\infty}{2r^2} \right) \cos \theta \quad (8-67)$$

توجه شود که در $r \rightarrow \infty$ ، $P = P_\infty$ می‌باشد. شکل (8-5) توزیع فشار را در اطراف کره صلب نشان می‌دهد.



شکل 8-5: توزیع فشار در سطح کره برای سیال خزشی اطراف کره صلب

از طرفی فشار در سطح کره ($r=R$) عبارتست از $P_\infty=0$ ، لذا خواهیم داشت:

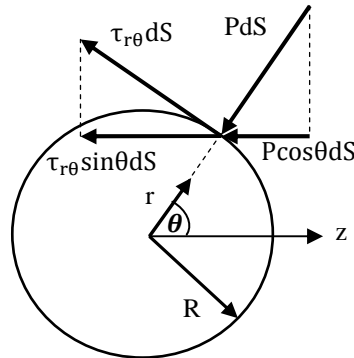
$$P|_{r=R} = -\frac{3}{2} \frac{\mu R v^\infty}{r^2} \cos \theta \quad (8-68)$$

مقدار بیشینه فشار در $\theta=\pi$ و مقدار کمینه آن در $\theta=0$ به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$P_{\max}|_{r=R} = \frac{3}{2} \frac{\mu v^\infty}{R} \quad (8-69)$$

$$P_{\min}|_{r=R} = -\frac{3\mu v^{\infty}}{2R} \quad (8-70)$$

(۷) مرحله آخر پیدا نمودن درگ اصطکاکی و درگ فشار در سطح کره می‌باشد. در این جا مطابق شکل (۸-۶) نشان داده می‌شود که مولفه‌های درگ اصطکاکی و فشار ناشی از مولفه‌های نیروهای تنش برشی و فشاری می‌باشند.



شکل ۸-۶: نیروهای تنش برشی و فشار روی سطح کره

همان طور که در فصل ششم اشاره شد، درگ فشار، مقاومت در مقابل فشار اعمال شده از سوی سیال روی کره می‌باشد. مطابق شکل (۸-۶) خواهیم داشت:

$$dD_P = -P \cos \theta dS \quad (8-71)$$

پس با انتگرالگیری از معادله (۸-۷۱) در سطح کل کره خواهیم داشت:

$$D_P = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} P|_{r=R} \cos \theta \underbrace{R^2 \sin \theta}_{dS} d\theta d\phi \quad (8-72)$$

با داشتن $P|_{r=R} = -(3/2)(\mu v^{\infty}/R) \cos \theta$ و جاگذاری در معادله (۸-۷۲)، درگ فشاری به دست خواهد آمد:

$$D_P = 2\pi \mu R v^{\infty} \quad (8-73)$$

درگ اصطکاکی مقاومت در برابر نیروهای ویسکوز می‌باشد که از تنش برشی حاصل می‌شود:

$$\tau_{r\theta} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_{\theta}}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (8-74)$$

با استفاده از معادلات مولفه‌های سرعت یعنی معادلات (۸-۵۷) و (۸-۵۸) و با مشتق‌گیری از معادلات مذکور و

جاگذاری در معادله (۸-۷۴) خواهیم داشت:

$$\tau_{r\theta}|_{r=R} = -\frac{3\mu v^\infty}{2R} \sin\theta \quad (8-75)$$

که $\tau_{r\theta}$ تنش برشی در دیواره کره صلب را نشان می‌دهد. با توجه به شکل (8-6) درگ اصطکاکی به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$dD_F = -\tau_{r\theta} \sin\theta dS \quad (8-76)$$

که با جایگذاری (8-75) در (8-76) خواهیم داشت:

$$D_F = -\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tau_{r\theta}|_{r=R} R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \quad (8-77)$$

پس با جایگذاری (8-75) در (8-77) درگ اصطکاکی به دست می‌آید:

$$D_F = 4\pi\mu R v^\infty \quad (8-78)$$

پس درگ کل از جمع هر دو درگ به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$D = D_p + D_F = 2\pi\mu R v^\infty + 4\pi\mu R v^\infty \quad (8-79)$$

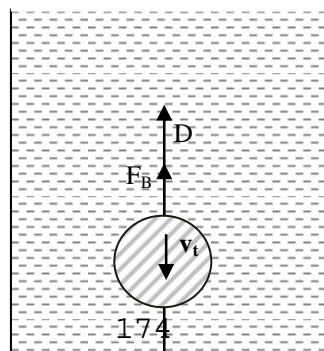
که خواهیم داشت:

$$D = 6\pi\mu R v^\infty \quad \text{Re} \leq 0.5 \quad (8-80)$$

که معادله (8-80) به عنوان قانون استوکس¹² شناخته می‌شود. قانون استوکس برای اندازه گیری ویسکوزیته با استفاده از آزمایش سقوط آزاد کره جامد به کار گرفته می‌شود. برای مثال کره‌ای صلب با شعاع R در سیالی با ویسکوزیته μ و دانسیته ρ سقوط می‌کند. زمانی که سرعت کره به مقدار ثابت v_t می‌رسد، (شکل (8-7)) ملاحظه می‌شود که برآیند نیروهای حاکم بر حرکت کره را می‌توان به صورت ذیل نوشت:

$$W = D + F_B \quad (8-81)$$

که F_B نیروی شناوری¹³ و W نیروی وزن کره می‌باشد، پس با جایگذاری عبارات متناظر خواهیم داشت:



¹² Stoke's Law
¹³ Buoyant

شکل ۷-۸: سقوط کره صلب در سیال ساکن

$$\underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_s g}_W = \underbrace{6\pi\mu R v_t}_D + \underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g}_{F_B} \quad (۸-۸۲)$$

با داشتن سرعت حدی^{۱۴} و خواص سیال و اندازه کره، ویسکوزیته سیال به صورت ذیل به دست می آید:

$$\mu = \frac{2R^2 g}{9v_t} \quad (۸-۸۳)$$

ملاحظه می شود که برای $Re \leq 0.5$ درگ از رابطه (۸-۸۰) به دست می آید. برای مقادیر بالاتر عدد رینولدز نمی توان

از عبارت های اینرسی صرف نظر کرد. اسین^{۱۵} معادلات ذیل را برای این حالت پیشنهاد داد:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (۸-۸۴)$$

$$\rho \vec{v}^{\infty} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} \quad (۸-۸۵)$$

ملاحظه می شود که به جای $\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ در عبارت اینرسی، $\rho \vec{v}^{\infty} \cdot \nabla \vec{v}$ جایگزین شده است. در حقیقت این عبارت اینرسی

را خطی نموده است. با این ساده سازی، معادلات مجددا در مختصات کروی حل گردید و در نهایت معادله زیر برای

درگ حاصل شد:

$$D = 6\pi\mu R v^{\infty} \left(1 + \frac{3}{16} Re\right) \quad (۸-۸۶)$$

¹⁴ Terminal Velocity (v_t)

¹⁵ Oseen

باید توجه داشت که معادله (۸-۸۶) نیز محدود می‌باشد و برای اعداد رینولدز خیلی بالا پاسخ صحیح ارائه نمی‌دهد.

ضریب درگ صحیح سیال آزاد اطراف کره صلب، در تمامی مقادیر عدد رینولدز، رابطه ذیل ارائه شده است:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho(v^\infty)^2 A} = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho(v^\infty)^2 \pi R^2} \quad (8-87)$$

که برای حالت $Re < 0.5$ و اعداد رینولدز متوسط، با جاگذاری $D=6\pi\mu Rv^\infty$ در معادله (۸-۸۶) و (۸-۷۷) خواهیم داشت:

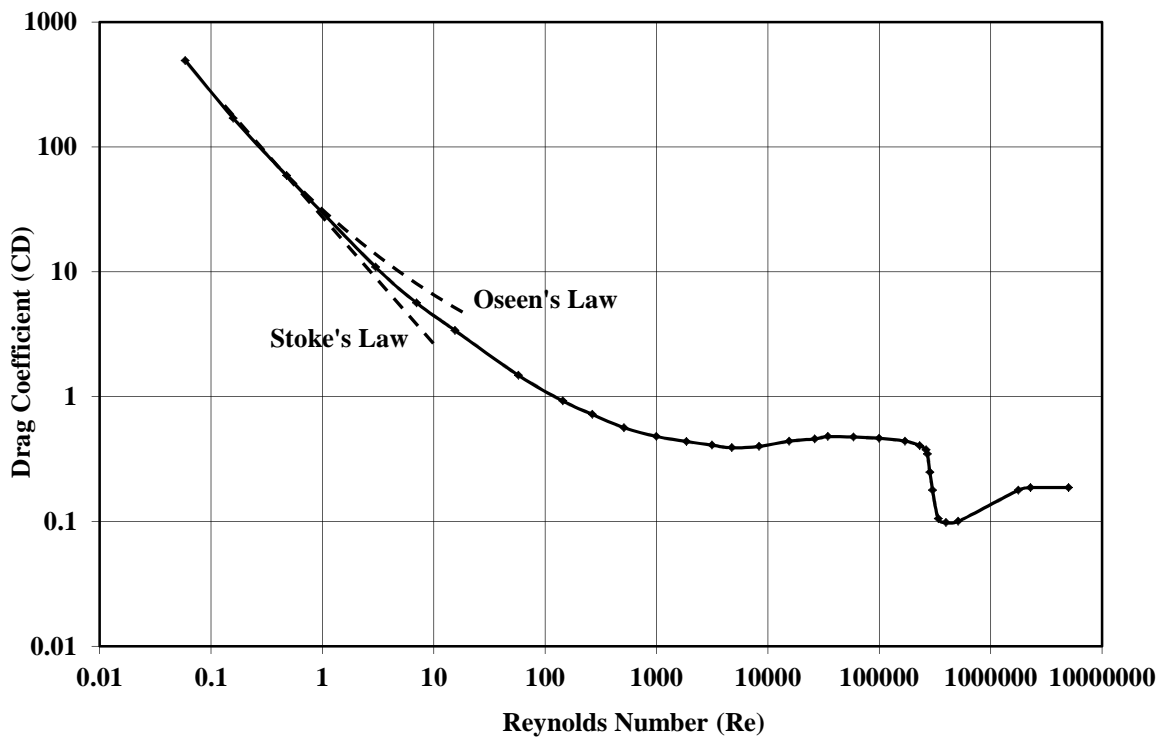
$$C_D = \frac{24}{Re} \quad Re < 0.5 \quad (8-88)$$

$$C_D = \frac{24}{Re} + 36 \quad 0.5 < Re < 100 \quad (8-89)$$

برای مقادیر مختلف عدد رینولدز، Re ، شکل (۸-۸) تغییرات C_D بر حسب Re را برای سیال آزاد اطراف یک کره صلب

نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که در $Re > 10^5$ جریان سیال از حالت آرام به مغشوش منتقل شده و C_D به زیر ۰/۲

کاهش می‌یابد.

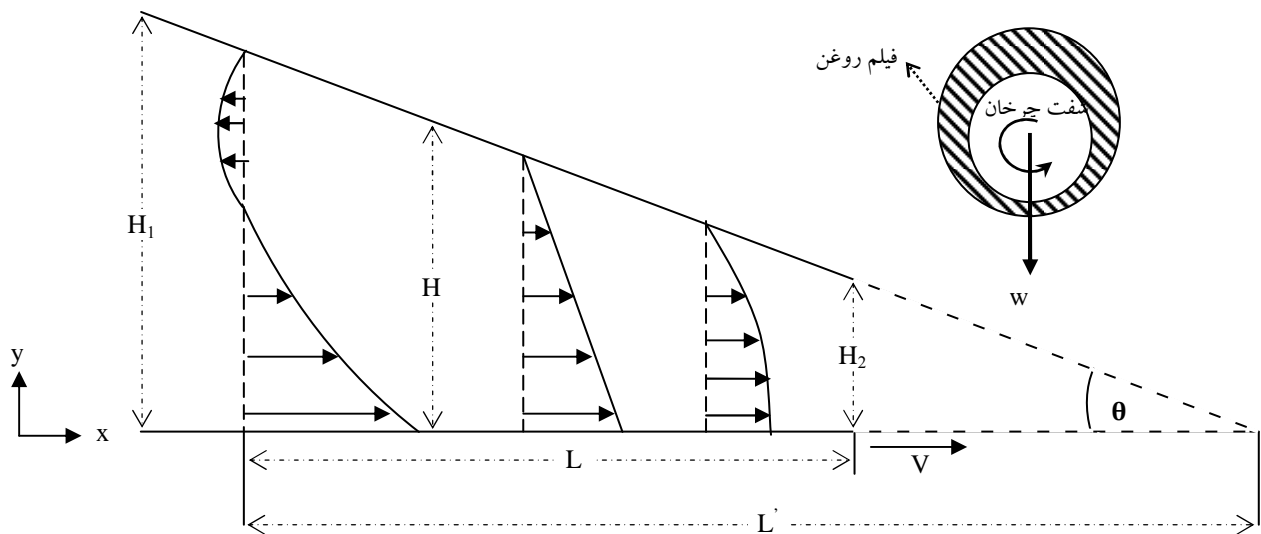


شکل ۸-۸: ضریب درگ (C_D) بر حسب عدد رینولدز ($Re = \rho v^\infty (2R) / \mu$) برای جریان آزاد اطراف کره صلب

۵. مسئله یاتاقان^{۱۶} لغزنده^{۱۷}، تقریب هیدرودینامیکی روانکاری^{۱۸}

فیلم‌ها لایه‌ای نازک از مایعات هستند که بین دو صفحه جامد جدا از هم قرار می‌گیرند. کاربرد این گونه فیلم‌ها در سطوح یاتاقان می‌باشد. هدف از این فیلم‌ها جدا نگهداشتن صفحات جامد از یکدیگر می‌باشد، زمانی که از بیرون یک ظرفیت بار زیاد بر آنها اعمال می‌شود. این گونه روانکارها به عنوان روان‌کننده‌های هیدرودینامیکی شناخته می‌شوند.

حال دو صفحه جامد موازی را در نظر بگیرید که یک صفحه ساکن و دیگری حرکت می‌کند. تحلیل حرکت این گونه مجاری قبلاً در فصل پنجم بیان شد. در شرایطی که فاصله بین دو صفحه موازی کم باشد، هیچ فشاری از بارگذاری، در فیلم بین دو صفحه احساس نمی‌شود. برای ایجاد فشار در این گونه مجاری، که از دو صفحه موازی تشکیل شده است، لازم است که عرض بین دو سطح موازی مقداری متغیر باشد. شکل (۸-۹) یک یاتاقان را با دو صفحه که زاویه‌ای بین آنها قرار دارد، نشان می‌دهد. البته زاویه بین دو صفحه اغراق شده است. معمولاً زاویه کمتر از ۱۵ درجه می‌باشد.



شکل ۸-۹: توزیع سرعت و فشار در یاتاقان

(۱) در این جا فرض می‌شود که $\alpha < 15^0$ و $(H_2 - H_1)/L \ll 1$ می‌باشد.

¹⁶ Bearing

¹⁷ Slider

¹⁸ Hydrodynamic Lubrication Approximation

۲) معادلات مومنتوم (ناویر استوکس) برای جریان خزشی در جهت های x و y به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (۸-۹۰)$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (۸-۹۱)$$

در این جا برخلاف دو صفحه کاملاً موازی، افت فشار در جهت x ثابت نخواهد بود. در فیلم بین دو صفحه فشار به یک نقطه ماکزیمم می رسد و در دو طرف صفحه به P_0 نزول می نماید.

۳) شرایط مرزی به صورت ذیل نوشته می شود:

$y=0$	در	$v_x=V$	
$y=H$	در	$v_x=0$	
$x=0$	در	$P=P_0$	
$x=L$	در	$P=P_0$	(۸-۹۲)

با اعمال شرایط مرزی (۸-۹۲) پروفیل سرعت به صورت ذیل به دست می آید:

$$v_x = \frac{V}{H}(H-y) - \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} y(H-y) \quad (۸-۹۳)$$

۴) دبی جریان در مجرای بین دو صفحه در تمام مکان ها در جهت x مقداری ثابت است که از رابطه ذیل محاسبه می شود:

$$q = \int_0^{H(x)} v_x dy = \text{ثابت} \quad (۸-۹۴)$$

حال با جاگذاری معادله (۸-۹۳) در معادله (۸-۹۴)، دبی به صورت ذیل به دست می آید:

$$q = \frac{VH}{2} - \frac{H^3}{12\mu} \frac{dP}{dx} \quad (۸-۹۵)$$

با حل معادله (۸-۹۵) برای افت فشار خواهیم داشت:

$$\frac{dP}{dx} = 12\mu \left(\frac{V}{2H^2} - \frac{q}{H^3} \right) \quad (۸-۹۶)$$

توزیع فشار با انتگرالگیری از معادله (۸-۹۶) و با استفاده از شرایط مرزی (۸-۹۲) به دست خواهد آمد:

$$P(x) = P_0 + 6\mu v \int_0^x \frac{dx}{H^2} - 12\mu q \int_0^x \frac{dx}{H^3} \quad (8-97)$$

با اعمال شرط مرزی در $x=L$ ، $P=P_0$ ، دبی بر واحد عرض یا تاقان به صورت ذیل حاصل می شود:

$$q = \frac{\int_0^L \frac{dx}{H^2}}{2 \int_0^L \frac{dx}{H^3}} \quad (8-98)$$

بنابراین برای به دست آوردن دبی نیاز به معادله جبری تابع $H=H(x)$ داریم. پس با توجه به شکل هندسی (۸-۹) معادله

مرزی خطی صفحه بالایی یعنی $H(x)$ به صورت ذیل حاصل می شود:

$$H(x) = H_1 - \frac{H_1 - H_2}{L} x \quad (8-99)$$

$$\tan \alpha \cong \alpha = \frac{H_1 - H_2}{L} \quad (8-100)$$

$$H(x) = \alpha(L' - x) \quad (8-101)$$

$$\frac{L'}{L} = \frac{H_1}{H_1 - H_2} \quad (8-102)$$

که در معادلات بالا $\alpha \leq 15^\circ$ می باشد. با جایگذاری معادله (۸-۹۹) در معادله (۸-۹۸) خواهیم داشت:

$$q = V\alpha \frac{L'(L' - L)}{2L' - L} \quad (8-103)$$

و با ترکیب معادلات (۸-۹۹)، (۸-۱۰۰) و (۸-۱۰۳) و جایگذاری در معادله (۸-۹۷) خواهیم داشت:

$$P(x) = P_0 + \frac{6\mu VL}{H_1^2 - H_2^2} \frac{(H_1 - H)(H - H_2)}{H^2} \quad (8-104)$$

که برآیند کل نیروی نرمال بر صفحه بالایی به صورت ذیل حاصل می شود:

$$F_N = W \int_0^L (P(x) - P_0) dx \quad (8-105)$$

پس با جایگذاری $P(x)$ از معادله (۸-۱۰۴) در (۸-۱۰۵) خواهیم داشت:

$$F_N = \frac{6\mu VL^2}{(H_1 - H_2)^2} W \left[\ln \left(\frac{H_1}{H_2} \right) - \frac{2(H_1 - H_2)}{H_1 + H_2} \right] \quad (8-106)$$

روش جایگزین برای به دست آوردن توزیع فشار، این است که از معادله (۸-۹۵) نسبت به x مشتق گیری نموده و چون q ثابت است پس داریم $dq/dx=0$ ، که در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{H^3}{\mu} \frac{dP}{dx} \right) = 6V \frac{dH}{dx} \quad (۸-۱۰۷)$$

که معادله ی (۸-۱۰۷) معادله ی پوسان^{۱۹} می باشد که طرف راست معادله به عنوان عبارت تولید کننده افت فشار در طول یاتاقان می باشد. حال فرض می کنیم که:

$$(۱) \quad \mu \text{ ثابت باشد.}$$

$$(۲) \quad \text{شیب } dH/dx \text{ مقداری ثابت باشد.}$$

$$(۳) \quad \text{برای ساده سازی، مقدار } H_m \text{ را به عنوان متوسط } H \text{ در نظر می گیریم.}$$

بنابراین تعریف می کنیم:

$$\beta = -6\mu V \frac{dH}{dx} \quad (۸-۱۰۸)$$

که β یک مقدار مثبت می باشد (چون $dH/dx < 0$) پس معادله فشار به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\frac{d}{dx} \left(H^3 \frac{dP}{dx} \right) = -\beta \quad (۸-۱۰۹)$$

با انتگرالگیری خواهیم داشت:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{\beta x}{H^3} + \frac{C_1}{H^3} \quad (۸-۱۱۰)$$

ثابت انتگراسیون C_1 باید از شرایط مرزی به دست آید. از طرفی چون $H=H(x)$ می باشد، برای به دست آوردن فشار

لازم است که مقدار متوسط H_m برای H تعریف گردد. پس با انتگرالگیری از (۸-۱۱۰) خواهیم داشت:

$$P = -\frac{\beta x^2}{2H_m^3} + \frac{C_1 x}{H_m^3} + C_2 \quad (۸-۱۱۱)$$

با اعمال شرایط مرزی برای فشار در $x=0$ و $x=L$ ، $P=0$ خواهد بود. پس خواهیم داشت:

¹⁹ Poisson equation

$$C_1 = \frac{1}{2}\beta L \quad ; \quad C_2 = 0 \quad (8-112)$$

که با جاگذاری این ثوابت در معادله (8-111) خواهیم داشت:

$$P = -\frac{3\mu V \frac{dH}{dx}}{H_m^3} x(L-x) \quad (8-113)$$

بنابراین منحنی فشار سهموی می باشد و دارای بیشینه در مرکز، $L/2$ ، خواهد بود. فشار متوسط در فیلم روانکاری شده

به صورت ذیل محاسبه می شود:

$$P_m = \frac{1}{L} \int_0^L P dx = \frac{\beta L^2}{12H_m^3} = \frac{2}{3} P_{max} \quad (8-114)$$

از طرفی چون توزیع فشار مشخص شد، بنابراین گرادیان فشار به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\beta}{H_m^3} \left(\frac{L}{2} - x \right) \quad (8-115)$$

با جایگذاری معادله (8-115) در معادله پروفیل سرعت (8-93) خواهیم داشت:

$$v_x = \frac{V}{H} (H-y) - \underbrace{\frac{1}{2\mu H_m^3} \left(\frac{L}{2} - x \right)}_{\text{مثبت}} \underbrace{y(H-y)}_{\text{منفی}} \quad (8-116)$$

از معادله (8-116) ملاحظه می شود که اگر $dH/dx=0$ ، یعنی $\beta=0$ باشد، پروفیل سرعت خطی خواهد بود، و این در

حالتی است که دو صفحه کاملاً موازی هم باشند. از طرفی در $x=L/2$ پروفیل سرعت کاملاً خطی است. همان گونه که

در شکل (8-9) نشان داده شده است، لیکن در $x=0$ پروفیل سرعت دارای عقبگرد می باشد.

۶. سیال خزشی در محیط های متخلخل^{۲۰}: (optional)

جریان سیالات در محیط های متخلخل، صنایع پایین دستی نفت، ازدیاد برداشت نفت، گاز و در بسیاری از صنایع

شیمیایی دارای کاربردهای وسیعی می باشد. جریان آب و نفت در سنگ های متخلخل^{۲۱}، هم چنین جریان سیالات

مختلف در فیلترها، بسترهای آکنده در واحدهای جداسازی، در بسترهای کاتالیستی، همه از کاربرد سیالات ویسکوز در

²⁰ Flow in porous media

²¹ Porous Rocks

محیط‌های متخلخل می‌باشد. تحلیل این‌گونه سیالات در این‌گونه محیط‌ها از اهمیت خاصی در مهندسی شیمی برخوردار است.

در ابتدای فصل اشاره شد که جریان‌های خزشی برای توزیع فشار از معادله لاپلاس پیروی می‌کند، پس می‌توان نوشت:

$$\nabla^2 \bar{P} = 0 \quad (8-117)$$

$$\nabla^2 (P + \rho gh) = 0$$

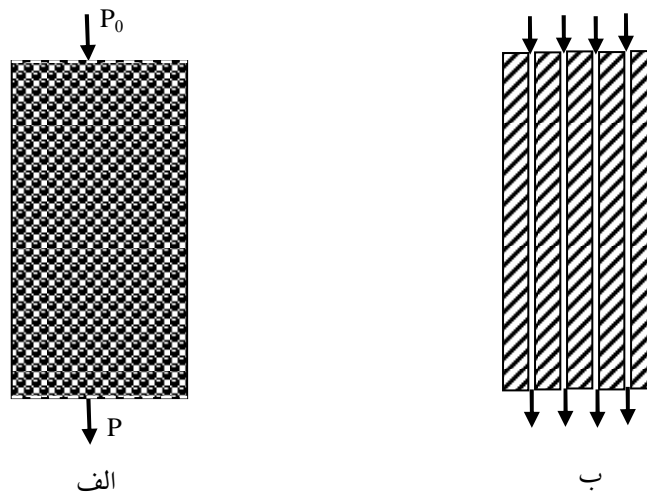
حال اگر مولفه فشار را در جهت Z مورد بررسی قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{d^2(P + \rho gh)}{dz^2} = 0 \quad (8-118)$$

که با انتگرالگیری از معادله (8-118) خواهیم داشت:

$$\frac{d(P + \rho gh)}{dz} = \text{constant} \quad (8-119)$$

حال اگر محیط متخلخلی را مطابق شکل (8-10) در نظر بگیرید ملاحظه می‌شود که سیال از فضاهاى خالی بین ذرات عبور می‌نماید. لیکن به علت تماس بالا، افت فشار بالا بوده و حرکت سیال به صورت خزشی می‌باشد. حال فرض



شکل 8-10: الف) حرکت سیال ویسکوز از محیط متخلخل (بسترآکنده) ب) محیط متخلخل متشکل از لوله‌های موئینه

می کنیم که محیط متخلخل از یک سری لوله های موینه^{۲۲} تشکیل شده که سیال قادر است فقط از این لوله های موینه عبور نماید. بنابراین سیال از داخل مجموع این لوله ها عبور می کند، به طوری که جریان سیال را در هر لوله به صورت جریان پویزله^{۲۳} در نظر می گیریم که دبی آن از معادله هیگن-پویزله^{۲۴} پیروی می نماید. بنابراین دبی کل در محیط متخلخل به صورت ذیل نوشته می شود:

$$Q = - \frac{\text{constant}}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (8-120)$$

هم چنین سرعت ظاهری^{۲۵} در محیط متخلخل به صورت ذیل تعریف می شود:

$$v_z = \frac{Q}{A} = \frac{\text{حجم سیال در محیط}}{\text{سطح مقطع کل در محیط متخلخل}} \quad (8-121)$$

که با جایگذاری معادله (۸-۱۲۰) در (۸-۱۲۱) خواهیم داشت:

$$v_z = - \frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (8-122)$$

که ثابت K به ضریب عبوری^{۲۶} محیط متخلخل یا ثابت دارسی^{۲۷} اطلاق می شود و معادله (۸-۱۲۲) را قانون دارسی گویند. بعد ثابت K به صورت $\langle L^2 \rangle$ می باشد و از راه آزمایش روی محیط متخلخل مورد نظر به دست می آید. برای محیط های ایزوتروپیک^{۲۸}، ثابت دارسی در تمامی جهات یکسان بوده و قانون عمومی دارسی نیز به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\vec{v} = - \frac{\kappa}{\mu} \nabla P \quad (8-123)$$

قانون دارسی فقط برای جریان آرام و خزشی صادق می باشد. برای محاسبه افت فشار در محیط متخلخل بسترهای آکنده از معادله ارگان^{۲۹} به صورت ذیل استفاده می شود:

$$f_p = \frac{D_p \varepsilon^3}{\rho u_z^2 (1 - \varepsilon)} \frac{\Delta P}{L} = \frac{150}{Re_p} + 1.75 \quad (8-124)$$

²² Capillary
²³ Poiseuille
²⁴ Hagen-Poiseuille
²⁵ Superficial Velocity
²⁶ Permeability
²⁷ Darcy's Law
²⁸ Isotropic
²⁹ Ergan

که f_p ضریب اصطکاک^{۳۰} در بستر آکنده می باشد. سایر متغیرها به شکل ذیل می باشد:

$$Re_p = \frac{\rho u_z D_p}{(1 - \varepsilon)\mu} \quad (۸-۱۲۵)$$

u_z : سرعت ظاهری (m/s)

ε : کسر تخلخل^{۳۱}

D_p : قطر متوسط ذرات :

که سرعت ظاهری در محیط (بستر) به صورت ذیل حاصل می شود:

$$u_z = -\frac{\Delta P}{\mu L} \frac{D_p^2 \varepsilon^3}{150(1 - \varepsilon)^2} = -\frac{\kappa \Delta P}{\mu L} \quad (۸-۱۲۶)$$

$$\kappa = \frac{D_p^2 \varepsilon^3}{150(1 - \varepsilon)^2}$$

۷. خلاصه (جمع بندی)

از آن جا که جریان های خزشی مربوط به اعداد رینولدز کوچکتر از ۱ می باشد، لذا به سیالاتی که عبارات های اینرسی (شتاب) برای آن ها حذف می شود، "سیالات خزشی" گویند. در حل معادلات حرکت مربوط به جریان خزشی از عبارت اینرسی در مقابل عبارت ویسکوز صرف نظر می شود. سیالات خزشی حداقل در پنج گروه کاربرد دارند: جریان آرام کاملاً توسعه یافته، جریان آرام در مجاری باریک (فیلم) اما متغیر، جریان خزشی اطراف اشیاء غوطه ور، جریان در محیط های متخلخل، و جریان پلی مرهای مذاب در دستگاه های اکسترودر، قالب ریزی مکشی و غیره. برای حل معادلات حرکت لازم است: معادلات حرکت و پیوستگی در مختصات متناسب با هندسه مساله نوشته شود، ساده سازی ها اعمال شود، شرایط مرزی مساله با توجه به معادلات حاکم و هندسه مساله به درستی تعیین شود. معمولاً بی بعدسازی معادلات نیز انجام می شود. با حل معادلات ناویر استوکس پروفیل سرعت به دست آید. بلاخره با داشتن تابع سرعت، تابع میدان فشار به دست آید. تحلیل جریان خزشی در مجاری فشرده گی فیلم، جریان آزاد اطراف کره، یاتاقان لغزنده و در سیستم های متخلخل انجام شد. و در بخش پایانی این فصل، قانون دارسی و ضریب عبوری معرفی گردید.

³⁰ Friction Factor

³¹ Fraction Void