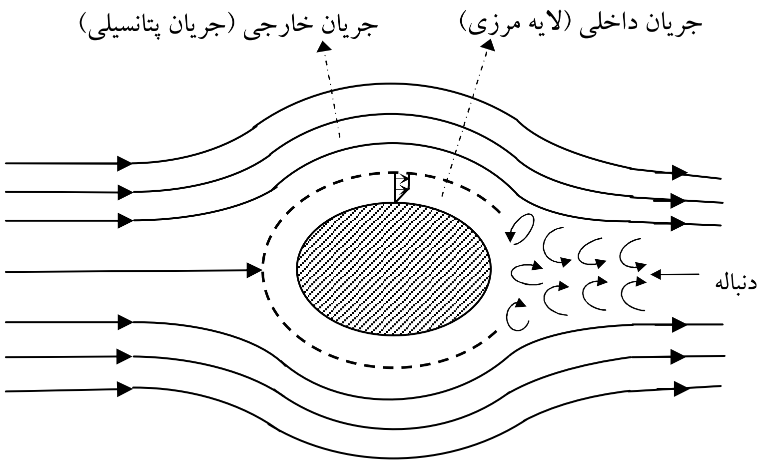
مکانیک سیالات پیشرفته

فصل نهم

نظریه لایه مرزی

۱. مقدمه

در فصل قبل جریان پتانسیلی اطراف اجسام غوطه‌ور مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که در مرز اجسام جامد شرط "عدم لغزش[1] " صادق نمی‌باشد. به عبارتی سرعت سیال در مرز جامد ناپدید یا صفر نمی‌شود. با بررسی که در فصل قبل گردید، نشان داده شد که درگ صفر می‌شود. در واقع جریان پتانسیلی در اطراف اجسام جامد در تناقض با مشاهدات آزمایشگاهی و جریان واقعی سیال در مجاری مرز جامد می‌باشد، چون درگ همیشه در جریان سیال وجود دارد. پرانتل[2] در سال ۱۹۰۴ این تناقض را با ارائه تئوری لایه مرزی مرتفع نمود. او نشان داد که جریان پتانسیل خارج از لایه مرزی در مرز جامد واقعیت دارد. در حقیقت لایه مرزی به صورت ذیل در مرز جامد تعریف شده است: " لایه مرزی عبارت است از لایه‌های نازکی از سیال که همواره به سطح جامد چسبیده‌اند، به طوری که اثرات قوی نیروهای ویسکوز در این لایه وجود دارد".



شکل ۱-۱۱: جریان آزاد اطراف یک جسم غوطه ور (لایه مرزی و جریان پتانسیلی)

در شکل ۱-۱۱ جریان سیالی یک نواخت را اطراف یک جسم غوطه ور را ملاحظه نمایید. سه ناحیه اطراف جسم به شرح ذیل مشاهده می شود.

[1] No Slip
[2] Prandtl

الف- ناحیه جریان داخلی

در این ناحیه لایه نازکی اطراف جسم جامد و در مرز آن به وجود می‌آید به طوری که سرعت در مرز جامد صفر بوده و گرادیان سرعت زیادی در این لایه به وجود می آید. به این ناحیه که دارای فیلم نازکی از سیال است لایه مرزی گفته می شود. در لایه مرزی سیال چرخشی فرض شده به طوری که گردابش ها در عرض لایه مرزی نفوذ می کنند.

ب- ناحیه جریان خارجی

خارج از ناحیه داخلی که در حقیقت خارج از لایه مرزی می باشد، گرادیان سرعت زیاد نمی باشد که این بستگی به شکل هندسی جسم دارد. در این ناحیه اثرات ویسکوزیته مشاهده نمی شود به طوری که جریان پتانسیلی در این ناحیه حاکم است. به عبارتی جریان خارجی به صورت غیرلزجی بوده و به صورت غیر چرخشی می باشد.

ج- ناحیه دنباله[3] یا گرداب پایین دستی[4]

به علت افت فشار در مرز جامد، لایه مرزی از سطح جامد جدا شده و افزایش فشار در دنباله یا جریان پایین دستی جسم مشاهده می شود. در این حالت گرادیان فشار معکوس می شود[5] به طوری که بر اثر جدایی لایه مرزی ناحیه ای به نام دنباله به وجود می آید . در این ناحیه گرادیان سرعت زیاد نبوده و اثرات ویسکوزیته اهمیت ندارد.

باید توجه داشت که برای تشکیل لایه مرزی عدد رینولدز از مقدار معینی نباید کمتر باشد. از طرفی لایه مرزی در مجاری اطراف اجسام جامد با لایه مرزی جریان های ویسکوز که در داخل مجاری بسته مانند کانال ها اتفاق می افتد می تواند مقداری متفاوت باشد. در مجاری اطراف اجسام غوطه ور لایه مرزی خیلی نازك می باشد لیکن در مجاری بسته مانند لوله ها و کانال ها لایه مرزی ضخیم بوده و حتی در رینولدز خیلی پایین نیز اتفاق می افتد.

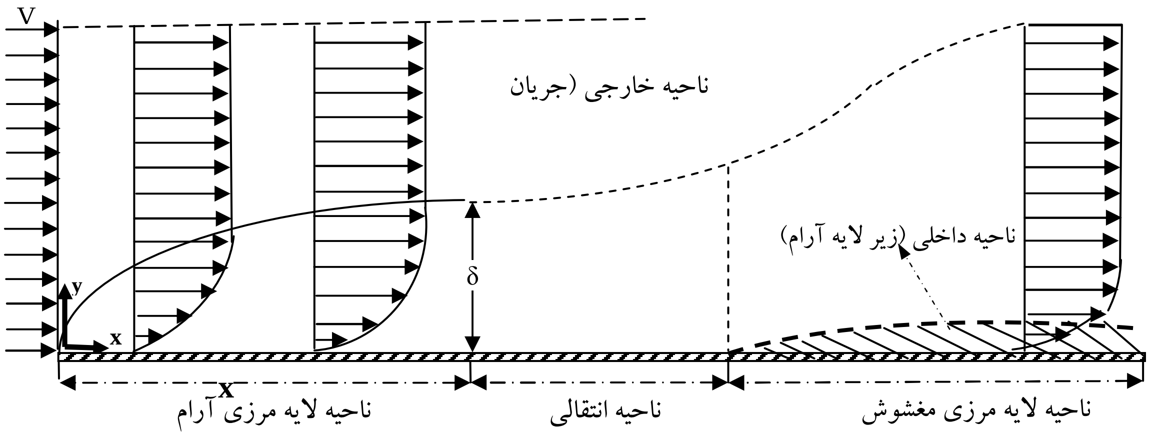
در فصل های قبل به جریان های ویسکوز (خزشی) و جریان های غیر لزجی (پتانسیلی) اشاره شد و بیان شد که در جریان های خزشی نیروهای ویسکوز حاکم بوده در حالیکه در جریان های پتانسیلی نیروهای اینرسی غالب می باشد. همان گونه که در ابتدای این فصل اشاره شد، جریان در مجاری اطراف جسم غوطه ور، دو ناحیه وجود دارد که هر دو جریان

[3] wake
[4] Down Stream
[5] Adverse Pressure Gradient

ویسکوز (لایه مرزی) و جریان غیرلزجی (پتانسیلی) وجود دارد. لایه مرزی در بسیاری از عملیات های مهندسی شیمی اهمیت دارد، چون نفوذ جرم و گرما بیشتر در لایه مرزی واقع می شود. هم چنین در صنعت هوا فضا، کشتیرانی، و نیز در ساختمان سازی کاربردهای فراوان دارد.

۲. مفهوم لایه مرزی

برای بررسی و تحلیل لایه مرزی اطراف جسم غوطه ور، همیشه از جریان آزاد اطراف یک ورقه یا صفحه مسطح نازک که به موازات جریان قرار دارد، شروع می کنند. مطابق شکل (۲-۱۱) جریانی یکنواخت با سرعت U موازی صفحه مسطح که طول آن L می باشد، حرکت می کند. اثرات ویسکوزیته در مرز جامد شدید بوده به طوری که ناحیه ویسکوز وسیع بوده و از لبه تا انتهای صفحه موجود می باشد. یک صورت اصلی و مهم در تحلیل لایه مرزی وجود جهت اصلی و اولیه جریان است که مولفه سرعت حاکم معمولا u_x بوده و در اغلب مواقع $u_x >> u_y$ فرض می شود به طوری که تغییرات سرعت در عرض لایه مرزی نسبت به طول لایه شدید می باشد. معمولا افت فشار در طول صفحه در نظر گرفته می شود و تغییرات فشار در عرض نازک لایه مرزی ، قابل اغماض است.



شکل ۲-۱۱: تشکیل لایه مرزی روی یک سطح مسطح

مطابق شکل (۲-۱۱) ملاحظه می شود که جریان یکنواخت در اطراف صفحه مسطح به دو ناحیه تقسیم می شود: ناحیه لایه مرزی که گرادیان سرعت در آن شدید بوده و از صفر بر روی صفحه شروع می شود، و به تدریج افزایش می یابد تا این که مقدارش به سرعت آزاد U در ناحیه خارجی برسد. در لبه صفحه مسطح ابتدا لایه مرزی توسعه پیدا نمی کند

لیکن زمانی که عدد رینولدز به مقدار بحرانی ۲۵۰۰ رسید، لایه مرزی توسعه پیدا می نماید و به تدریج ضخیم تر می گردد. خارج از لایه مرزی سیال بدون اصطکاک بوده و جریان پتانسیلی حاکم می باشد. همان گونه که اشاره شد، افت فشار در عرض لایه مرزی قابل اغماض است و هم چنین به علت مسطح بودن صفحه افت فشار در عرض جریان پتانسیلی خارجی نیز صفر در نظر گرفته می شود.

مشاهده می شود که در $Re > 2500$ لایه مرزی توسعه پیدا می کند و اگر صفحه صاف بوده و فاقد هر گونه زبری باشد، تا $Re = 3\times106$ لایه مرزی آرام شکل می گیرد. متعاقبا با زیاد شدن فاصله از لبه صفحه، عدد رینولدز زیادتر شده به طوری که از ناحیه آرام خارج شده و در عبور از ناحیه انتقالی به ناحیه لایه مرزی مغشوش در $Re = 5\times109$ می رسیم.

در ناحیه مغشوش لایه مرزی آرام فشرده شده و به صورت زیرلایه آرام[6] نمایانگر می شود. در خارج از این زیر لایه آرام یک لایه مرزی مغشوش پدیدار می شود که در آن اثرات ویسکوزیته حاکم نمی باشد. در این ناحیه تغییرات مومنتوم با حرکت تصادفی ذرات سیال از لایه ای به لایه ای دیگر منتقل می شود که طبیعت جریان از نوع مغشوش بوده که تنش برشی بستگی به ویسکوزیته پیچشی (ϵ)[7] دارد. در صورتی که در ناحیه مرزی آرام فقط تنش های برشی و یسکوز حاکم بوده و فقط ویسکوزیته نیوتنی μ مورد استفاده قرار می گیرد. پس در ناحیه لایه مرزی آرام تنش برشی به صورت $\tau_{lam} = \mu\ (dux/dy)$ در نظر گرفته می شود. لیکن در ناحیه مربوط به لایه مرزی مغشوش $\tau_{tur} = \rho\ \epsilon\ (du_x/dy)$ می باشد، که ϵ به جریان مغشوش بستگی داشته و مستقل از خاصیت انتقالی سیال می باشد.

۳. روش های تحلیل لایه مرزی (جریان اطراف اجسام غوطه ور)

حل تحلیلی کل معادلات ناویر استوکس برای لایه‌های مرزی اطراف اجسام غوطه ور تقریباً غیر ممکن است. لذا معمولاً سه روش برای تحلیل لایه مرزی ارائه شده است:

۱- روش استفاده از محاسبات عددی و کامپیوتر[8]

[6] Laminar Sublayer
[7] Eddy Viscosity
[8] Numerical Digital Computer Solution

۲- روش تجربی با انجام آزمایش[۹]

۳- روش تئوری لایه مرزی[۱۰]

تحلیل جریان سیال در مجاری اطراف اجسام پیچیده ، محدب یا مقعر معمولا سخت و مشکل می باشد و حل تحلیلی معادلات ناویر-استوکس در این گونه موارد، بسیار مشکل و غیر ممکن می نماید. لذا روش محاسبات عددی به کمک کامپیوتر استفاده می شود. راه حل های عددی بسیاری برای تحلیل لایه مرزی تاکنون ارائه شده است. به خصوص برای مدلسازی لایه مرزی در جریان های مغشوش می توان از ابزار محاسبات عددی و روش های المان محدود و یا تفاضل محدود و دیگر روش ها نیز استفاده کرد. در روش تجربی با بهره گیری از آنالیز ابعادی می توان جواب های دقیق به دست آورد. به هر حال روش تجربی گران بوده و معمولا برای تحلیل جریان خارج از لایه مرزی (جریان پتانسیلی) بسیار مفید می باشد.

روش نظریه لایه مرزی توسط لودویگ پرانتل[۱۱] در سال ۱۹۰۴ ارائه شد که نقطه عطفی در تحلیل لایه مرزی به شمار می‌رود. پرانتل با استفاده از مرتبه مقداری[۱۲] متغیرها، معادلات ناویر-استوکس را بسیار ساده نمود به طوری که معادلات حاصل را که به آن‌ها معادلات لایه مرزی اطلاق شده، می‌توان با استفاده از روش‌های ساده عددی و یا تحلیلی حل نموده و جواب‌های قابل قبولی برای توزیع سرعت و فشار در لایه مرزی ارائه نمود.

در ادامه این بخش به تعریف انواع ضخامت لایه مرزی پرداخته می‌شود آن‌گاه معادلات لایه مرزی با استفاده از روش پرانتل توضیح داده می‌شود و در نهایت، روش‌های عددی و تحلیلی برای حل معادلات لایه مرزی ارائه می‌شود.

[9] Experimentation
[10] Boundary Layer Theory
[11] Ludwig Prandtl
[12] Order of Magnitude

۱-۳. ضخامت لایه مرزی

برای ساده سازی معادلات ناویر استوکس، لازم است که ضخامت لایه مرزی، δ، معرفی شده و نشان داده شود که ضخامت لایه مرزی به طور نسبی بسیار کمتر از طول میدان جریان (L) مانند اندازه جسم، شعاع، تحدب و یا عرض کانال می باشد. در این جا ضخامت لایه مرزی به سه صورت تعریف می شود:

- ضخامت لایه مرزی[۱۳]
- ضخامت جابجایی[۱۴]
- ضخامت مومنتوم[۱۵]

الف- ضخامت لایه مرزی

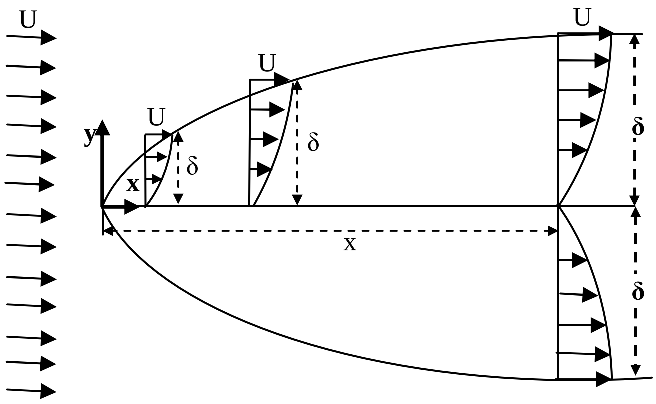
ضخامت لایه مرزی عبارت است از فاصله ما بین مرز جامد و ناحیه‌ای که سرعت سیال از صفر به مقدار ۰/۹۹ سرعت جریان آزاد (U) می‌رسد. مطابق شکل (۳-۱۱) جریان یکنواخت اطراف صفحه مسطح را ملاحظه نمایید. ملاحظه می‌شود که ضخامت لایه مرزی تابعی از متغیر x در طول صفحه می‌باشد، یعنی $\delta=\delta(x)$ فرض می‌شود. لیکن در فاصله x از لبه صفحه لایه مرزی آرام، کاملاً توسعه پیدا کرده است. پس ضخامت لایه مرزی به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$y = \delta : u_x = 0.99U \tag{۱-۱۱}$$

که $u_x=u_x(y)$، پروفیل سرعت در لایه مرزی می‌باشد.

---

13 Boundary Layer Thickness
14 Displacement Thickness
15 Momentum Thickness



شکل ۳-۱۱: ضخامت لایه مرزی اطراف یک صفحه مسطح

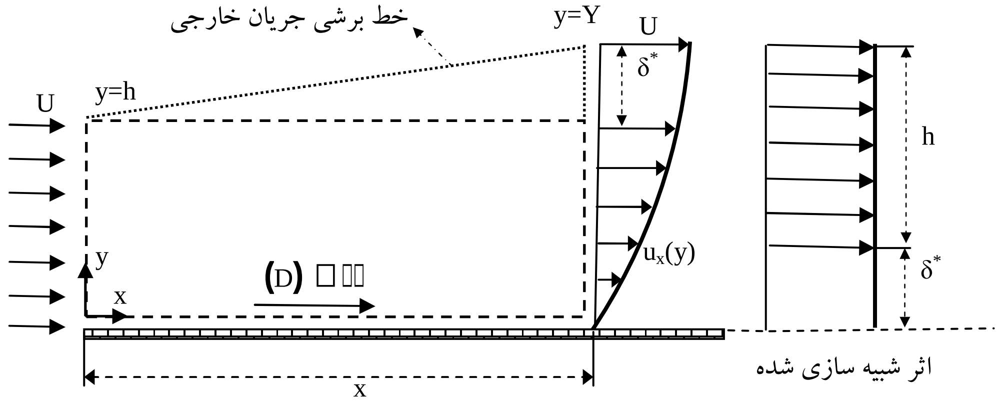
ب- ضخامت‌های جابجایی و مومنتوم

برای تعریف ضخامت‌های جابجایی و مومنتوم لایه مرزی لازم است موازنه های جرم و مومنتوم روی المان در لایه مرزی نوشته شود. همانگونه که در شکل (۴-۱۱) دیده می‌شود، جریان آزاد با سرعت U در ارتفاع h وارد المان حجمی لایه مرزی می‌شود. به علت اصطکاک و گرادیان سرعت، جریان روی مرز جامد متوقف می‌شود، لیکن به تدریج حرکت سیال در جهت عمود بر صفحه به طرف بالا جابجا می‌شود. برای برقراری موازنه جرم لازم است مقدار جرم ورودی در ارتفاع h در ابتدای صفحه برابر با جرم خروجی در فاصله x از صفحه باشد. بنابراین با استفاده از معادله انتگرال انتقالی رینولدز می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{dm}{dt} = \iint_{cs} \rho\vec{u}.\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{cv} \rho dV = 0 \qquad (۱۱-۲)$$

که انتگرال اول شار جرمی را در جهت جریان یکنواخت نشان می‌دهد. انتگرال دوم تجمع جرم را در حجم کنترل یا المان نشان می‌دهد که در این جا صفر است، چون حالت پایداری حاکم می‌باشد. پس خواهیم داشت:

$$\iint_{cs} \rho\vec{u}.\,dA = \int_0^Y u_x dy - \int_0^h U dy = 0 \qquad (۱۱-۳)$$



شکل ۴-۱۱: المان لایه مرزی روی صفحه مسطح

معادله (۳-۱۱) به صورت ذیل جابجا و نوشته می‌شود:

$$Uh = \int_0^Y u_x dy = \int_0^Y (U + u_x - U) dy = UY + \int_0^Y (u_x - U) dy \tag{۱۱-۴}$$

حال $Y = h + \delta^*$ تعریف می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$U(Y - h) = U\delta^* = \int_0^Y (U - u_x) dy \tag{۱۱-۵}$$

پس با استفاده از معادله (۵-۱۱) "ضخامت جابجایی لایه مرزی" به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\delta^* = \int_0^{y=\delta} \left(1 - \frac{u_x}{U}\right) dy \tag{۱۱-۶}$$

ملاحظه می‌شود که $y=\delta$ همان ضخامت لایه مرزی است. مطابق شکل (۴-۱۱)، ضخامت جابجایی لایه مرزی عبارت از فاصله‌ای از مرز جامد می‌باشد که سیال از سطح در جهت y جابجا شده به طوری که دبی جریان واقعی در جهت x برابر با جریان پتانسیل ورودی بر روی صفحه مسطح باشد.

حال اگر بر روی المان حجم موازنه مومنتوم در جهت x نوشته شود، خواهیم داشت:

$$\sum F_x = \iint_{cs} u_x(\rho \vec{u} . dA) = \int_0^{y=\delta} u_x(\rho u_x) dy - \int_0^h U(\rho U) dy \tag{۱۱-۷}$$

با توجه به این که درگ به صورت $\sum F_x = -D$ می‌باشد، بنابراین معادله (۷-۱۱) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$D = \rho U^2 h - \int_0^{y=\delta} \rho {u_x}^2 dy \tag{۱۱-۸}$$

از طرفی از معادله (۴-۱۱) می‌توانیم بنویسیم:

$$h = \int_0^{\delta} \frac{u_x}{U} dy \qquad (۱۱-۹)$$

پس با جاگذاری معادله (۹-۱۱) در معادله (۸-۱۱) خواهیم داشت:

$$D = \rho \int_0^{\delta} u_x (U - u_x) dy \qquad (۱۱-۱۰)$$

حال اگر دو طرف معادله (۱۰-۱۱) را بر ρU^2 تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{D}{\rho U^2} = \int_0^{\delta} \frac{u_x}{U}\left(1 - \frac{u_x}{U}\right) dy \qquad (۱۱-۱۱)$$

پس "ضخامت مومنتوم لایه مرزی" به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u_x}{U}\left(1 - \frac{u_x}{U}\right) dy \qquad (۱۱-۱۲)$$

برای ضخامت مومنتوم مانند ضخامت جابجایی نمی‌توان مفهوم فیزیکی به صورت تصویری ارائه داد. بنابراین سه ضخامت δ و δ^* و θ که برای لایه مرزی تعریف شده، ترتیب آن‌ها به صورت $\theta<\delta^*<\delta$ می‌باشند.

۲-۳. درگ و ضریب اصطکاک در لایه مرزی

همان طور که در بالا اشاره شد، درگ، نیروی مقاومت اصطکاکی است که از سطح جسم غوطه‌ور در مقابل جریان آزاد قرار دارد. در این جا ضریب درگ به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \qquad (۱۱-۱۳)$$

که A مساحت صفحه مسطح می‌باشد. حال با استفاده از معادلات (۱۱-۱۱) و (۱۲-۱۱) خواهیم داشت:

$$C_D(x) = \frac{2\theta}{x} \qquad (۱۱-۱۴)$$

که در این جا عرض صفحه (b) مساوی یک در نظر گرفته شده است. از طرفی ضریب اصطکاک پوسته‌ای به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} \qquad (۱۱-۱۵)$$

که τ_w، تنش برشی در دیواره یا مرز جامد است.

۴. معادلات لایه مرزی[۱۶]

در این جا روش پرانتل که با ساده سازی معادلات ناویر–استوکس برای جریان دو بعدی سیال یکنواخت روی یک صفحه مسطح انجام شده، ارائه می‌گردد. طبیعت روش مذکور کاملاً فیزیکی است، به طوری که متغیرها را با یکدیگر مقایسه نموده و با توجه به این که $\delta << L$ می‌باشد، بسیاری از عبارت‌ها در معادلات ناویر–استوکس حذف می‌شوند.

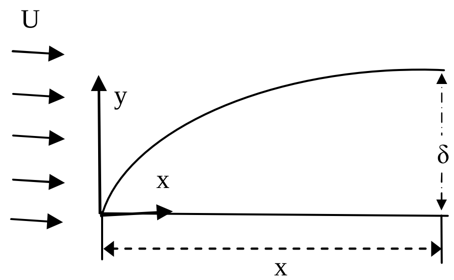
پس ابتدا معادلات ناویر–استوکس و پیوستگی را برای جریان دو بعدی به صورت ذیل می‌نویسیم:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \qquad (۱۱-۱۶)$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \qquad (۱۱-۱۷)$$

$$u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \qquad (۱۱-۱۸)$$

که $\nu=\mu/\rho$، ویسکوزیته سینماتیکی است.



شکل ۵-۱۱: توسعه لایه مرزی آرام در روی صفحه مسطح

مطابق شکل (۵-۱۱)، $(\delta/x) << 1$ فرض می‌شود، مگر در لبه صفحه که هنوز لایه مرزی توسعه پیدا نکرده است.

[16] Boundary Layer Equations

الف- مرتبه مقداری متغیرها

در ابتدا درجه و مقدار بزرگی و یا کوچکی متغیرها را نسبت به یکدیگر مقایسه می‌کنیم. هم چنین مشتق متغیرها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این جا چون مؤلفه u_x سرعت جریان غالب می‌باشد، تغییرات آن را نسبت به x و y مورد بررسی قرار می‌دهیم. ملاحظه می‌شود که $0<u_x<U$ در فاصله $0<y<\delta$ تغییر می‌کند. به عبارتی می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{U}{x} \qquad \& \qquad \frac{\partial u_x}{\partial y} \sim \frac{U}{\delta} \tag{۱۱-۱۹}$$

پس می‌توانیم مرتبه مقدار بزرگی[۱۷] برای مشتق‌های مؤلفه سرعت u_x را به صورت ذیل بنویسیم:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} \simeq O\left(\frac{U}{x}\right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = O\left(\frac{U}{x^2}\right) \tag{۱۱-۲۰}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} \simeq O\left(\frac{U}{\delta}\right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = O\left(\frac{U}{\delta^2}\right) \tag{۱۱-۲۱}$$

که علامت "O" به معنی مرتبه مقداری هر متغیر است.

در این جا فرض شده است که $u_x \simeq O(U)$، $\partial/\partial x \simeq O(1/x)$ و $\partial/\partial y \simeq O(1/\delta)$ می‌باشند. حال اگر معادله پیوستگی را برای مرتبه بزرگی $\partial u_y/\partial y$ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\partial u_x}{\partial x} = O\left(\frac{U}{x}\right) \tag{۱۱-۲۲}$$

از طرفی چون $u_y \ll u_x$ و همچنین در $y=0$، $u_y=0$ است، پس می‌توان از معادله (۲۲-۱۱) مؤلفه u_y را به صورت ذیل به دست آورد:

$$u_y = O\left(\frac{U\delta}{x}\right) \tag{۱۱-۲۳}$$

بنابراین با استفاده از معادلات (۲۲-۱۱) و (۲۳-۱۱) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} \simeq O\left(\frac{U}{x}\right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = O\left(\frac{U}{x\delta}\right) \tag{۱۱-۲۴}$$

[17] Order Of Magnitude

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} \simeq O\left(\frac{U\delta}{x^2}\right) \qquad ; \qquad \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = O(\frac{U\delta}{x^3}) \tag{۱۱-۲۵}$$

حال با جاگذاری معادلات (۲۰-۱۱)، (۲۱-۱۱)، (۲۴-۱۱) و (۲۵-۱۱) برای مشتق‌های اول و دوم معادلات ناویر-استوکس و در نظر گرفتن $u_x=O(U)$ و $u_y=O(U\delta/x)$، معادلات ناویر-استوکس به صورت ذیل نوشته می‌شوند:

$$\frac{U^2}{x} + \frac{U^2}{x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{U}{x^2} + \nu\frac{U}{\delta^2} \qquad (\text{مؤلفه } x) \tag{۱۱-۲۶}$$

$$\frac{\delta U^2}{x^2} + \frac{\delta U^2}{x^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\frac{\delta U}{x^3} + \nu\frac{U}{x\delta} \qquad (\text{مؤلفه } y) \tag{۱۱-۲۷}$$

ملاحظه می‌شود که برای فشار، مرتبه مقداری در نظر گرفته نشده است.

ب- مؤلفه x در معادله ناویر- استوکس

اگر معادله (۲۶-۱۱) برای مؤلفه x را در نظر بگیریم، ملاحظه می‌شود که $(\nu U/x^2) \ll (\nu U/\delta^2)$ می‌باشد، چون $(\delta/x) \ll 1$ فرض شده است. از طرفی در لایه مرزی نیروهای اینرسی که مربوط به شتاب است در تقابل با نیروهای ویسکوز که ناشی از تنش برشی است، می‌باشد. با حذف عبارت $\nu\,{\partial^2 u_x}/{\partial x^2}$ از معادله (۲۶-۱۱) و موازنه دو نیروی اینرسی و ویسکوز خواهیم داشت:

$$\underbrace{\frac{U^2}{x}}_{\text{نیروی اینرسی}} \simeq \underbrace{\nu\frac{U}{\delta^2}}_{\text{نیروی ویسکوز}} \tag{۱۱-۲۸}$$

پس معادله (۲۸-۱۱) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\delta \approx O\left(\sqrt{\frac{\nu x}{U}}\right) \qquad \text{یا} \qquad \left(\frac{\delta}{x}\right)^2 = O\left(\frac{\nu}{xU}\right) \tag{۱۱-۲۹}$$

که $Re_x = xU/\nu$ تعریف می‌شود. پس خواهیم داشت:

$$\frac{\delta}{x} = O\left(\frac{1}{\sqrt{Re_x}}\right) \tag{۱۱-۳۰}$$

پس چون $1 \gg (\delta/x)$ است، بنابراین $Re_x \gg 1$ می‌باشد. بنابراین زمانی لایه مرزی توسعه داده می‌شود که عدد رینولدز خیلی بزرگ باشد، به عبارتی در ابتدا و یا لبه صفحه لایه مرزی شکل نمی‌گیرد. همچنین از معادله (۲۹-۱۱) و (۲۶-۱۱) می‌توان مرتبه بزرگی ν و افت فشار در جهت x را به صورت ذیل به دست آورد:

$$\nu = O\left(\frac{\delta^2 U}{x}\right) \qquad ; \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = O(\frac{U^2}{x}) \tag{۱۱-۳۱}$$

باید توجه داشت که در جریان روی صفحه مسطح، معمولاً افت فشار در x قابل اغماض می‌باشد.

ج- مؤلفه y در معادله ناویر-استوکس

حال معادله (۲۷-۱۱) را برای مؤلفه y معادله ناویر-استوکس مورد بررسی قرار می‌دهیم. ملاحظه می‌شود که عبارت‌های اینرسی در معادله (۲۷-۱۱) بسیار کوچکتر از عبارت‌های اینرسی متناظر در معادله (۲۶-۱۱) می‌باشد، چون $(\delta U^2/x^2)$ $\gg (U^2/x)$ است. از طرفی عبارت‌های ویسکوز در معادله (۲۷-۱۱) نیز از عبارت‌های ویسکوز متناظر در معادله (۲۶-۱۱) خیلی کوچک‌تر می‌باشد. بنابراین عبارت‌های اینرسی و ویسکوز را از معادله (۲۷-۱۱) حذف می‌کنیم. هم‌چنین، مرتبه مقداری افت فشار در جهت y از معادله (۲۷-۱۱) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = O(\frac{\delta U^2}{x^2}) \leq O(\frac{U^2}{x}) \tag{۱۱-۳۲}$$

پس $(dP/dy) \ll (dP/dx)$ فرض می‌شود، بنابراین $P = P(x)$ خواهد بود.

د- معادلات لایه مرزی

با توجه به فرضیات بالا معادلات پیوستگی و مومنتوم در لایه مرزی به شکل ذیل حاصل می‌شوند:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \tag{۱۱-۳۳}$$

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \tag{۱۱-۳۴}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad ; \qquad P = P(x) \tag{۱۱-۳۵}$$

از طرفی چون $P = P(x)$ می‌باشد پس گرادیان فشار در طول لایه مرزی برابر با گرادیان فشار در جریان خارجی یا جریان پتانسیلی خواهد بود. همان طور که در فصل هشتم توضیح داده شد، برای به دست آوردن گرادیان فشار در جریان پتانسیلی از معادله برنولی به شکل ذیل استفاده می‌شود:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 = \text{ثابت} \qquad (۱۱-۳۶)$$

که $P = P(x)$ فشار جریان پتانسیلی را نشان می‌دهد. که با مشتق گیری از معادله (۳۶-۱۱) خواهیم داشت:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} = U\frac{dU}{dx} \qquad (۱۱-۳۷)$$

با جاگذاری معادله (۳۷-۱۱) در (۳۴-۱۱)، معادله حرکت لایه مرزی به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} = U\frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \qquad (۱۱-۳۸)$$

بنابراین برای به دست آوردن پروفیل سرعت u_x در لایه مرزی لازم است معادله (۳۸-۱۱) حل شود. در این‌جا در جریان یکنواخت بر روی صفحه مسطح U ثابت بوده، پس $(dU/dx) = 0$ می‌باشد. بنابراین معادله حرکت لایه مرزی روی صفحه مسطح با شرایط مرزی به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \qquad (۱۱-۳۹)$$

شرط مرزی ۱ : $u_x(x,0) = 0$

شرط مرزی ۲ : $u_y(x,0) = 0$ (۱۱-۴۰)

شرط مرزی ۳ : $u_x(x,y) = U$ $\qquad (y = \delta \to \infty)$

شرط مرزی سوم در شرایطی است که سرعت u_x در $y = 0.99\delta$ سرعت جریان آزاد (U) در جریان پتانسیلی برابر می-شود.

۵. حل معادلات لایه مرزی در صفحه مسطح

جریان یکنواخت روی صفحه مسطح بستگی به زاویه ما بین بردار جریان آزاد و صفحه مسطح دارد. در این جا فرض می-شود که جریان یکنواخت موازی صفحه مسطح باشد. بنابراین در این جا لازم است معادله (۳۹-۱۱) حل شود. سه روش برای حل معادله دیفرانسیلی (۳۹-۱۱) ارائه شده است که به شرح ذیل می‌باشند:

- روش مشابه[۱۸] یا روش بلازیوس [۱۹]
- روش انتگرال مومنتوم[۲۰]
- روش محاسبات عددی[۲۱]

۱-۵. روش مشابه یا بلازیوس

بلازیوس معادلات لایه مرزی (۳۹-۱۱) و پیوستگی را با استفاده از تبدیل مشابه سازی حل نمود. او فرض کرد که پروفیل سرعت u_x در طول لایه مرزی روی صفحه مسطح از نظر هندسی متشابه هستند، به طوری که هر چه از لبه صفحه فاصله گرفته می‌شود، پروفیل سرعت مطابق شکل (۳-۱۱) در جهت y کشیده می‌شود. بلازیوس فرض نمود که سرعت بدون بعد u_x متناسب با پارامتر بدون بعد ξ می‌باشد. پس این رابطه تناسب را با تابع ϕ به صورت ذیل تعریف نمود:

$$\frac{u_x}{U} = \phi\left(\frac{y}{\delta}\right) \qquad (۱۱-۴۱)$$

به عبارتی رابطه (۴۱-۱۱) نشان می‌دهد که سرعت نرمال شده تابعی از فاصله نرمال شده از سطح در جهت y است.

پس رابطه بدون بعد ξ به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\xi = \frac{y}{\delta(x)} \qquad (۱۱-۴۲)$$

از طرفی طبق رابطه (۳۰-۱۱) خواهیم داشت:

---

18 Similar
19 Blasius
20 Momentum Integral Approach
21 Numerical Solution

$$\delta(x) \propto \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad \rightarrow \ \xi = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \tag{۱۱-۴۳}$$

حال با استفاده از تابع جریان لاگرانژی مؤلفه‌های سرعت $u_x=\partial\psi/\partial y$ و $u_y=-\partial\psi/\partial x$ را در معادله لایه مرزی رابطه (۱۱-۳۹) جاگذاری می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \tag{۱۱-۴۴}$$

از معادله (۱۱-۴۴) مشاهده می‌شود که یک معادله دیفرانسیل جزیی سهموی بوده و معادله مذکور با استفاده از جداسازی متغیرها[22] به صورت ذیل ارائه می‌شود:

$$\psi(x,y)=g(x)f(\xi) \tag{۱۱-۴۵}$$

که $g(x)$ و $f(\xi)$ دو تابع یک متغیره و مستقل هستند. پس مؤلفه‌های u_x و u_y با استفاده از معادله (۱۱-۴۵) به صورت ذیل نوشته می‌شوند:

$$u_x=\frac{\partial\psi}{\partial y}=g(x)f(\xi)\sqrt{\frac{U}{\nu x}} \qquad \text{یا} \qquad \frac{u_x}{U}=g(x)f'(\xi)\sqrt{\frac{1}{U\nu x}} \tag{۱۱-۴۶}$$

از طرفی طبق روابط (۱۱-۴۱) و (۱۱-۴۳) خواهیم داشت:

$$\frac{u_x}{U}=\phi\left(y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right)=\phi(\xi) \tag{۱۱-۴۷}$$

بنابراین با مقایسه روابط (۱۱-۴۶) و (۱۱-۴۷) خواهیم داشت:

$$\phi(\xi)=f'(\xi) \qquad ; \qquad g(x)=\sqrt{\nu x U} \tag{۱۱-۴۸}$$

پس با توجه به روابط (۱۱-۴۶) و (۱۱-۴۸) می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{u_x}{U}=\frac{df(\xi)}{d\xi}=f'(\xi) \tag{۱۱-۴۹}$$

[22] Separation of Variables

به همین ترتیب برای u_y و مشتق‌های دیگر خواهیم داشت:

$$u_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}(\xi f' - f) \tag{۱۱-۵۰}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{U\xi}{2x}f''(\xi) \tag{۱۱-۵۱}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = U\sqrt{\frac{U}{\nu x}}f''(\xi) \quad ; \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{U^2}{\nu x}f'''(y) \tag{۱۱-۵۲}$$

با جاگذاری در روابط (۴۹-۱۱) تا (۵۲-۱۱) در معادله (۴۴-۱۱) خواهیم داشت:

$$\frac{-U^2}{2x}\xi f' f'' - \frac{U^2}{2x}(f - \xi f')f'' = \frac{U^2}{x}f''' \tag{۱۱-۵۳}$$

$$\frac{-U^2}{2x}ff'' - \frac{U^2}{x}f''' = 0 \quad \text{یا} \quad ff'' + 2f''' = 0 \tag{۱۱-۵۴}$$

همان گونه که از معادله (۵۴-۱۱) ملاحظه می‌شود این معادله عادی دیفرانسیلی بلازیوس می‌باشد، به طوری که هیچ متغیر طولی در آن مشاهده نمی‌شود. جواب این گونه معادلات به صورت جواب‌های مشابه[۲۳] ارائه می‌شود. شرایط مرزی معادله (۵۴-۱۱) با استفاده از شرایط مرزی (۴۰-۱۱) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} &\text{شرط مرزی ۱}: \xi = 0 \quad ; \quad f = f' = 0 \\ &\text{شرط مرزی ۲}: \xi = \infty \quad ; \quad f'(\xi) = 1 \end{aligned} \tag{۱۱-۵۵}$$

بلازیوس با استفاده از روش محاسبات عددی معادله (۵۴-۱۱) را حل نمود و جدول (۱-۱۱) را برای مقادیر نرمال شده سرعت u_x بر حسب متغیر ξ ارائه کرد. ملاحظه می‌شود که $\xi = y/\delta$ می‌باشد. پس در شرایطی که سرعت جریان در لایه مرزی به مقدار $0.99U$ برسد، δ ضخامت لایه مرزی خواهد بود.

---

[23] Similarity Solution

$\xi = y\left(\frac{U}{\nu x}\right)^2$	$\frac{u_x}{U}$	$\xi = y\left(\frac{U}{\nu x}\right)^2$	$\frac{u_x}{U}$
0.0	0.0	3.2	0.87609
0.2	0.06641	3.4	0.90177
0.4	0.13277	3.6	0.92333
0.6	0.19894	3.8	094112
0.8	0.26471	4.0	0.95552
1.0	0.32979	4.2	0.96696
1.4	0.45627	4.4	0.97587
1.8	0.57477	4.6	0.98269
2.2	0.68132	4.8	0.98779
2.6	0.77249	5.0	0.99155
3.0	0.84605	∞	1.000

جدول ۱-۱۱: مقادیر سرعت بر حسب پارامتر بدون بعد فاصله توسط بلازیوس

بنابراین مطابق جدول (۱-۱۱) در $\xi=\delta$ مقدار $u=0.99U$ می‌باشد، پس خواهیم داشت:

$$\xi = \delta(\frac{U}{\nu x})^{1/2} \cong 5.0 \tag{۱۱-۵۶}$$

رابطه (۵۶-۱۱) بر حسب عدد رینولدز به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.0}{\sqrt{Re_x}} \qquad (\text{بلازیوس } 1908) \tag{۱۱-۵۷}$$

جواب بلازیوس برای جریان لایه مرزی آرام مناسب است و دقت آن تا $Re = 10^5$ می‌باشد. تنش برشی در دیواره یا روی صفحه مسطح به صورت ذیل محاسبه می‌شود:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \mu\left(U\sqrt{\frac{u_x}{\nu x}}f''\right)_{y=0} = 0.332\frac{\mu U^{3/2}}{\sqrt{\nu x}} \tag{۱۱-۵۸}$$

که در معادله (۵۸-۱۱) مقدار $f''\cong .0332$ در $\xi=0$ می‌باشد. ضریب اصطکاک پوسته‌ای نیز به طریق ذیل محاسبه می-شود:

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.332\mu \frac{U^{3/2}}{\sqrt{\nu x}}}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad ; \quad c_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \tag{۱۱-۵۹}$$

ضریب درگ نیز به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$c_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = \frac{b\int_0^l \tau_w(x)dx}{\frac{1}{2}\rho U^2(bl)} \tag{۱۱-۶۰}$$

که با جایگذاری معادله (۵۸-۱۱) در رابطه (۶۰-۱۱) و انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$c_D = \frac{1.328}{\sqrt{Re}} \qquad (\text{بلازیوس } 1908) \tag{۱۱-۶۱}$$

با استفاده از داده‌های جدول (۱-۱۱) ضخامت‌های جابجایی (δ^*) و مومنتوم (θ) به صورت ذیل حاصل می‌شوند:

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.72}{\sqrt{Re}} \qquad (\text{بلازیوس } 1908) \tag{۱۱-۶۲}$$

$$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{Re}} \qquad (\text{بلازیوس } 1908) \tag{۱۱-۶۳}$$

با مقایسه روابط (۵۷-۱۱)، (۶۲-۱۱) و (۶۳-۱۱) مشاهده می‌شود که $\theta<\delta^*<\delta$ می‌باشد. نسبت ضخامت جابجایی به ضخامت مومنتوم به "ضریب شکلی[۲۴]" شناخته می‌شود. که در روش بلازیوس برای صفحه مسطح به صورت ذیل محاسبه می‌شود:

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{1.721}{0.664} = 2.59 \tag{۱۱-۶۴}$$

در شرایطی که ضریب شکلی عدد بزرگی باشد، به این معنی است که لایه مرزی در شرف جدا شدن از سطح می‌باشد.

۲-۵. روش انتگرال مومنتوم[۲۵] یا روش فون کارمن[۲۶]

کارمن با استفاده از انتگرال مومنتوم نشان داد، می‌توان ضخامت لایه مرزی و همچنین ضریب درگ را در جریان یکنواخت بر روی صفحه مسطح به دست آورد. پس برای به دست آوردن رابطه انتگرال مومنتوم لازم است که از معادلات لایه مرزی به شرح ذیل شروع گردد:

---

[24] Shape Factor
[25] Momentum Integral
[26] Von Karman

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial u_x}{\partial x}=-\frac{\partial u_y}{\partial y} \tag{۱۱-۶۵}$$

با استفاده از تعریف مشتق خواهیم داشت:

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(u_x^2)-u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} \tag{۱۱-۶۶}$$

با جاگذاری معادله (۶۵-۱۱) در معادله (۶۶-۱۱) خواهیم داشت:

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(u_x^2)+u_x\frac{\partial u_y}{\partial y} \tag{۱۱-۶۷}$$

با جاگذاری معادله (۶۷-۱۱) در معادله (۳۹-۱۱) لایه مرزی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_x^2)+\underbrace{u_x\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}}_{\frac{\partial}{\partial y}(u_xu_y)}=\nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \tag{۱۱-۶۸}$$

با انتگرال گیری از معادله (۶۸-۱۱) در عرض لایه مرزی خواهیم داشت:

$$\int_0^\delta\frac{\partial}{\partial x}(u_x^2)dy+\int_0^\delta d\left(u_xu_y\right)dy=\nu\int_0^\delta d\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tag{۱۱-۶۹}$$

پس می توانیم به نویسیم:

$$\int_0^\delta\frac{\partial}{\partial x}(u_x^2)dy+\left[u_xu_y\right]_0^\delta=\nu\left[\frac{\partial u_x}{\partial y}\right]_0^\delta \tag{۱۱-۷۰}$$

شرایط مرزی در جریان صفحه مسطح به صورت ذیل نوشته می‌شوند:

شرط مرزی ۱ : $u_x(x,0)=u_y(x,0)=0$ (در صفحه مسطح) (۱۱-۷۱)

شرط مرزی ۲ : $u_x(x,\delta)=U$ (در جریان خروجی) (۱۱-۷۲)

شرط مرزی ۳ : $\tau_w=\mu\left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_{y=0}$ (در صفحه مسطح) (۱۱-۷۳)

شرط مرزی ۴ : $\frac{\partial u_x(x,\delta)}{\partial y}=0$ (در جریان خروجی) (۱۱-۷۴)

با اعمال شرایط مرزی بالا در معادله (۷۰-۱۱) خواهیم داشت:

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x}(u_x^2)dy + Uu_y(x,\delta) = -\frac{\tau_w}{\rho} \qquad (۱۱-۷۵)$$

از طرفی با انتگرال گیری از معادله پیوستگی خواهیم داشت:

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial u_x}{\partial x}dy + \int_0^{u_y(x,\delta)} d(u_y) = 0 \qquad \text{یا} \qquad u_y(x,\delta) = -\int_0^{\delta} \frac{\partial u_y}{\partial x}dy \qquad (۱۱-۷۶)$$

$$Uu_y(x,\delta) = -U\int_0^{\delta} \frac{\partial u_x}{\partial x}dy \qquad (۱۱-۷۷)$$

پس با ادغام معادلات (۷۵-۱۱) و (۷۷-۱۱) خواهیم داشت:

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x}(u_x^2)dy - U\int_0^{\delta} \frac{\partial u_x}{\partial x}dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \qquad (۱۱-۷۸)$$

با استفاده از قانون لایب نیتز[۲۷] انتگرال‌های طرف چپ معادله (۷۸-۱۱) ساده شده و معادله مذکور به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} u_x^2 dy - U\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} u_x dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \qquad (۱۱-۷۹)$$

چون U مقداری ثابت است پس با جابجایی عبارت‌های معادله (۷۹-۱۱) خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} u_x(U - u_x)dy = \frac{\tau_w}{\rho} \qquad (۱۱-۸۰)$$

معادله (۸۰-۱۱) معادله "انتگرال مومنتوم" اطلاق می‌شود. از طرفی با تقسیم دو طرف معادله (۸۰-۱۱) بر U^2 خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} \frac{u_x}{U}\left(1 - \frac{u_x}{U}\right)dy = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \qquad (۱۱-۸۱)$$

با استفاده از تعریف ضخامت مومنتوم، یعنی معادله (۱۲-۱۱)، معادله انتگرال مومنتوم، یعنی معادله (۸۱-۱۱) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \qquad \text{یا} \qquad \tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \qquad (۱۱-۸۲)$$

معادله (۸۲-۱۱) برای هر دو جریان آرام و مغشوش استفاده می‌شود.

[27] Leibnitz's Rule

۳-۵. روش تقریبی با استفاده از انتگرال مومنتوم

برای محاسبه مشخصات لایه مرزی مانند ضخامت‌ها و ضریب درگ از روش انتگرال مومنتوم استفاده می‌شود. در این روش ابتدا لازم است برای پروفیل سرعت یک تابع تقریبی ارائه نمود. توابع مختلفی تا کنون برای u_x/U پیشنهاد شده است. لیکن تمام آن‌ها جواب‌های تقریبی مناسبی ارائه می‌دهند. در این جا یک تابع چند جمله‌ای برای u_x/U پیشنهاد می‌شود. لیکن قبل از ارائه هر گونه تابع لازم است شرایط مرزی برای محاسبه ضرایب تابع پیشنهادی به شرح ذیل ارائه شود. البته باید توجه داشت شرایط مرزی لازم به ترتیب ذیل اعمال می‌شود:

- ✓ شرط مرزی اول (عدم لغزش در سطح):

در $y=0$ داریم: $u_x=u_y=0$

- ✓ شرط مرزی دوم (یکسانی سرعت در $y=\delta$ با سرعت جریان خروجی):

در $y=\delta$ داریم: $u_x=U$

- ✓ شرط مرزی سوم (پیوستگی سرعت جریان در $y=\delta$ با جریان خارجی):

در $y=\delta$ داریم: $\frac{\partial u_x}{\partial y}=0$ ، $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}=0, \ldots$

- ✓ شرط مرزی چهارم (ناپدید شدن مشتق‌های بالاتر بر روی سطح):

در $y=0$ داریم: $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}=0$ ، $\frac{\partial^3 u_x}{\partial y^3}=0, \ldots$

برای ارائه روش تقریبی پروفیل سرعت به صورت ذیل پیشنهاد می‌شود:

$$\frac{u_x}{U}=A+B\left(\frac{y}{\delta}\right)+C\left(\frac{y}{\delta}\right)^2+D\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \qquad (۱۱-۸۳)$$

۱- ابتدا شرایط مرزی ۱، ۲، ۳و ۴ اعمال می‌شود:

$$\frac{u_x}{U}=0 \qquad \text{(شرط مرزی اول)} \qquad (۱۱-۸۴)$$

$$\frac{u_x}{U}=B+C+D=1 \qquad \text{(شرط مرزی دوم)} \qquad (۱۱-۸۵)$$

$$\frac{\partial(u_x/U)}{\partial y} = B + 2C + 3D = 0 \qquad \text{(شرط مرزی سوم)} \qquad (۱۱-۸۶)$$

$$\frac{\partial^2(u_x/U)}{\partial y^2} = 2C = 0 \quad ; \quad C = 0 \qquad \text{(شرط مرزی چهارم)} \qquad (۱۱-۸۷)$$

با حل همزمان معادلات (۸۴-۱۱) تا (۸۷-۱۱)، مقادیر ضرایب پروفیل سرعت به صورت ذیل حاصل می‌شود:

$$A = 0 \quad ; \quad B = \frac{3}{2} \quad ; \quad C = 0 \quad ; \quad D = -\frac{1}{2}$$

بنابراین پروفیل سرعت به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$\frac{u_x}{U} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \qquad (۱۱-۸۸)$$

۲- ضخامت مومنتوم لایه مرزی را با استفاده از معادله (۱۲-۱۱) به دست می‌آوریم. به این ترتیب فرض می‌کنیم $\xi = y/\delta$ بوده و معادله (۸۸-۱۱) را در معادله ضخامت مومنتوم جاگذاری می‌نماییم:

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u_x}{U}\left(1 - \frac{u_x}{U}\right) dy = \delta \int_0^1 \left(\frac{3}{2}\xi - \frac{1}{2}\xi^3\right)\left(1 - \frac{3}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^3\right) d\xi \qquad (۱۱-۸۹)$$

$$\theta = \frac{78}{560}\delta = 0.1393\delta$$

۳- تنش برشی بر روی دیواره سطح مسطح

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \mu\left(\frac{3u}{2\delta} - \frac{3uy^2}{2\delta^3}\right)_{y=0} = \frac{3\mu u}{2\delta} \qquad (۱۱-۹۰)$$

۴- محاسبه ضخامت لایه مرزی (δ) با استفاده از انتگرال مومنتوم

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \quad ; \quad \frac{3\mu U}{2\delta} = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \quad ; \quad \frac{3\mu U}{2\delta} = 0.1393\, \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}$$

پس خواهیم داشت:

$$\delta d\delta = \frac{3\mu U}{2(0.1393)\rho U^2} dx \quad , \quad \delta d\delta = 10.76 \frac{\nu}{U} dx \qquad (۱۱-۹۱)$$

که $\nu = \mu/\rho$ می‌باشد. حال با اعمال شرط مرزی در $x = 0$، $\delta = 0$ می‌باشد. پس با انتگرال گیری از معادله (۹۱-۱۱) خواهیم داشت:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.641}{\sqrt{Re}} \qquad \text{(جواب تقریبی)} \qquad (۱۱-۹۲)$$

مقایسه معادله (۹۲-۱۱) با معادله (۵۷-۱۱) بلازیوس ۷/۲٪ خطا نشان می‌دهد. برای محاسبه ضریب اصطکاک پوسته‌ای خواهیم داشت:

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{\frac{3\mu U}{2\delta}}{\frac{1}{2}\rho U^2} \qquad ; \qquad c_f = \frac{0.646}{\sqrt{Re_x}} \qquad \text{(جواب تقریبی)} \qquad (۹۳-۱۱)$$

ملاحظه می‌شود که با ارائه روابط تقریبی برای پروفیل سرعت می‌توان جواب‌های قابل قبولی برای لایه مرزی به دست آورد. جدول (۲-۱۱) جواب‌های مختلفی برای c_f با پروفیل‌های سرعت تقریبی نشان می‌دهد. همان گونه که ملاحظه می‌شود برای پروفیل سرعت رابطه سینوسی نیز جواب‌های مناسبی ارائه می‌دهد.

$\left(\frac{u_x}{U}\right)$ پروفیل تقریبی	$C_f\sqrt{Re}$
$(\frac{y}{\delta})$	0.578
$2(\frac{y}{\delta}) - (\frac{y}{\delta})^2$	0.730
$\frac{3}{2}(\frac{y}{\delta}) - \frac{1}{2}(\frac{y}{\delta})^3$	0.646
$2(\frac{y}{\delta}) - 2(\frac{y}{\delta})^3 + (\frac{y}{\delta})^4$	0.686
$\sin(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta})$	0.656
Exact (Blasius)	0.664

جدول ۲: پروفیل های سرعت تقریبی و ضریب اصطکاک پوسته ای برای لایه مرزی

لازم است چند نکته توضیح داده شود:

- از معادله بلازیوس نتیجه می شود که، در $x=0$، $\delta=0$ می‌باشد. در جریان پایین دستی ضخامت لایه مرزی افزایش پیدا می‌کند، به طوری که $\delta \propto \sqrt{x}$ می‌باشد. برای x داده شده، ضخامت لایه مرزی با افزایش سرعت جریان آزاد (U) کم می‌شود.
- از معادله تنش برشی بلازیوس ملاحظه می‌شود که تنش برشی نزدیک لبه صفحه خیلی زیاد است (در $x=0$) و با افزایش فاصله از لبه صفحه، مقدار تنش برشی کاهش پیدا می‌کند.
- تقریب لایه مرزی در لبه صفحه صادق نیست، چون تقریب $\partial^2 u_x/\partial x^2 \ll \partial^2 u_x/\partial y^2$ صادق نمی‌باشد. به هر حال ناحیه لبه صفحه در مسائل مهندسی اهمیت ندارد.
- در فاصله‌های زیاد از لبه صفحه، عدد رینولدز خیلی بالا می‌باشد به طوری که نیروهای اینرسی حاکم بوده و نیروهای ویسکوز قابل اغماض یا کم می‌باشند. انتقال از جریان آرام به مغشوش در رینولدز ۵×۱۰^{۵} اتفاق می‌افتد. لیکن اگر صفحه صاف باشد، می‌توان معادلات لایه مرزی آرام را تا رینولدز $۱۰^{۶}$ استفاده نمود.

برای تحلیل و فهم مناسب‌تر از لایه مرزی مثالی آورده می‌شود.

مثال- یک صفحه مسطح بسیارنازک با ابعاد ۲۵ cm در ۲۵ cm در عقب یک قایق در آب دریا کشیده می شود قایق با سرعت ۱۲ km/hr در آب با دمای ۱۵ ^{o}C حرکت می کند. ضخامت لایه مرزی در صفحه در این جا محاسبه می شود. هم چنین نیروی لازم برای کشیدن صفحه در آب به دست می آید.

ابتدا باید عدد رینولدز محاسبه شده تا بررسی شود که آیا حرکت سیال روی صفحه به صورت جریان آرام است یا نه:

$$\mathrm{Re_x} = \frac{\rho U x}{\mu} = \frac{\left(1000\ \frac{kg}{m^3}\right)\left(\frac{12000}{3600}\frac{m}{s}\right)(0.25\mathrm{Cm})}{\left(0.0012\ \frac{N.s}{m^2}\right)} \cong 6.9 \times 10^5$$

مقدار عدد رینولدز $۵\times ۱۰^{۵} < ۶/۹\times ۱۰^{۵}$ می باشد. لیکن اگر صفحه به اندازه کافی صاف بود، و جریان یکنواخت باشد، می توان این جریان را آرام فرض نمود. بنابراین با استفاده از معادله بلازیوس خواهیم داشت:

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{5 \times 0.25Cm}{\sqrt{694444}} = 0.0015Cm \cong 1.5 \text{ mm}$$

$$C_f = \frac{1.33}{\sqrt{Re_x}} = \frac{1.33}{\sqrt{694444}} = 1.6 \times 10^{-3}$$

$$\tau_\omega = \frac{1}{2} C_f \rho U^2 = \frac{1}{2}(1.6 \times 10^{-3}) \left(1000 \ \frac{kg}{m^3}\right)\left(\frac{12000}{3600}\frac{m}{s}\right)^2 = 8.87 \ \frac{N}{m^2}$$

$$F_{tot} = 2\tau_\omega A = 2\left(8.87 \ \frac{N}{m^2}\right)(0.25 \times 0.25 \text{ m}^2) = 1.11 \text{ N}$$

۶. خلاصه (جمع بندی)

لایه مرزی عبارت است از لایه‌های نازکی از سیال که همواره به سطح جامد چسبیده‌اند، به طوری که اثرات قوی نیروهای ویسکوز در این لایه وجود دارد. در جریان آزاد اطراف یک جسم جامد، سه ناحیه می‌توان مشاهده نمود: ناحیه داخلی (لایه مرزی)، ناحیه خارجی (جریان پتانسیلی) و ناحیه دنباله. در لایه مرزی سیال چرخشی فرض شده به طوری که گردابش ها در عرض لایه مرزی نفوذ می کنند. جریان خارجی به صورت غیرلزجی بوده و به صورت غیر چرخشی می باشد. در ناحیه دنباله گرادیان سرعت زیاد نبوده و اثرات ویسکوزیته اهمیت ندارد. لایه مرزی در بسیاری از عملیات های مهندسی شیمی اهمیت دارد چون نفوذ جرم و گرما بیشتر در لایه مرزی واقع می شود. در لایه مرزی مغشوش، تنش برشی بستگی به ویسکوزیته گردابی دارد اما در لایه مرزی آرام تنش های برشی فقط به ویسکوزیته نیوتنی وابسته می باشد. ضخامت لایه مرزی عبارت است از فاصله بین مرز جامد و ناحیه‌ای که سرعت سیال در آن به ٪۹۹ سرعت جریان آزاد می‌رسد. سه روش برای حل معادلات مرزی روی صفحه مسطح وجود دارد: روش بلازیوس، روش انتگرال مومنتوم و روش عددی.