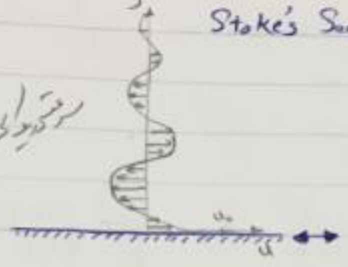
$\omega = 2\pi f$

$f = \frac{1}{T} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

مسئله دوم استوکس — Stoke's Second problem



سرعت در طول زمان

جریان روی یک صفحه تخت بی‌نهایت بر اثر حرکت نوسانی صفحه

$u = U_0 \cos \omega t$

فرض‌ها: مانند مسئله اول استوکس

معادلات حاکم مانند مسئله اول استوکس ساده می‌شوند.

پیوستگی: $v = 0$

مومنتم x: $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

شرایط مرزی: عدم لغزش $u(y=0,t) = U_0 \cos \omega t$

$u(y \to \infty, t) = 0$

شرایط اولیه: $u(y, t=0) = 0$

این مسئله را به دلیل عدم وجود معادله مشابه نمی‌توان مانند مسئله قبل به روش جداسازی متغیرها حل کرد، چون یکی از شرایط مرزی تابعی از زمان (t) است. نمی‌توان آن را به روش حل تشابهی نیز حل کرد.

حل استوکس: با توجه به نوسانی بودن حرکت صفحه، استوکس در نظر گرفت که حرکت سیال نسبت به زمان نیز باید نوسانی باشد. پس جواب معادله را به صورت زیر در نظر گرفت:

$u(y,t) = Y(y) \cos \omega t$

قسمت حقیقی $e^{i\theta}$

$e^{i\theta} = \underbrace{\cos\theta}_{\text{حقیقی}} + \underbrace{i \sin\theta}_{\text{موهومی}} \Rightarrow \cos\theta = Re\{e^{i\theta}\}$

$ay'' + by' + cy = 0$

معادله مشخصه $\rightarrow ar^2 + br + c = 0$

$\rightarrow u(y,t) = Re\left\{ Y(y)\, e^{i\omega t} \right\}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Re\left\{ i\omega Y(y)\, e^{i\omega t} \right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Re\left\{ \frac{dY}{dy} e^{i\omega t} \right\} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Re\left\{ \frac{d^2 Y}{dy^2} e^{i\omega t} \right\}$$

جایگذاری در معادله: $Re\left\{ i\omega\, Y(y)\, e^{i\omega t} \right\} = \nu\, Re\left\{ \frac{d^2 Y}{dy^2} e^{i\omega t} \right\} \Rightarrow$

$$\nu \frac{d^2 Y}{dy^2} = i\omega Y \Rightarrow \frac{d^2 Y}{dy^2} - i\frac{\omega}{\nu} Y = 0$$

معادله مشخصه: $r^2 - i\frac{\omega}{\nu} = 0 \rightarrow r^2 = i\frac{\omega}{\nu} \Rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\; i^{1/2}$

$$i^{1/2} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{1/2} = e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$\rightarrow r = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$$

$$\rightarrow Y(y) = c_1 e^{(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y} + c_2 e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y}$$

$$u(y,t) = Y(y)\cos\omega t$$

شرایط مرزی:

$$\begin{cases} u(y \to \infty, t) = 0 \rightarrow 0 = Y(\infty)\cos\omega t \rightarrow Y(y \to \infty) = 0 \rightarrow c_1 = 0 \\ u(y = 0, t) = U_0 \cos\omega t \Rightarrow U_0 \cos\omega t = Y(0)\cos\omega t \rightarrow Y(0) = U_0 \end{cases}$$

/ /

$$\rightarrow U_0 = c_2 e^0 \longrightarrow c_2 = U_0$$

$$\longrightarrow Y(y) = U_0\, e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y}$$

$$u(y,t) = Re\left\{ U_0\, e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y}\, e^{i\omega t} \right\} = Re\left\{ U_0\, e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y}\, e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y}\, e^{i\omega t} \right\}$$

$$= Re\left\{ U_0\, e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y}\, e^{i\left[\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y\right]} \right\} =$$

$$Re\left\{ U_0\, e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y} \left(\cos\left[\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y\right] + i \sin\left[\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y\right] \right) \right\}$$

$$\rightarrow u(y,t) = U_0\, e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y\right)$$

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu U_0 \left[-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y\right) - \right.$$

$$\left. + e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y} \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y\right) \right]$$

$$= \mu U_0 \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y} \left[\sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y\right) - \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y\right) \right]$$

$$= \mu U_0 \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\, e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y} \sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\, y - \frac{\pi}{4}\right)$$