

درس سیالات پیشرفته - استاد مربوطه: یعقوبی

تمرین‌های فصل سوم

در مختصات استوانه‌ای، مولفه‌های سرعت برای جریان همگن حول یک استوانه عبارتست از:

$$u_r = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos\theta$$
$$u_r = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin\theta$$

در این رابطه U سرعت سیال نزدیکی شونده به سیال است و a شعاع استوانه است. اگر اثرهای تراکم پذیری و ویسکوزیته ناچیز باشد، مقدار فشار، $P(r, \theta)$ ، در هر نقطه در داخل سیال در غیاب هر نوع نیروی جرمی را تعیین کنید. مقدار فشار در نقطه‌ای دور از استوانه را برابر P_0 قرار دهید. حال با استفاده از معادله به دست آمده برای فشار مقدار فشار را در سطح استوانه ($r=a$) به دست آورید.

ج: ابتدا معادله ناویر استوکس را برای سیستم استوانه‌ای (در دو جهت r و θ) نوشته آن گاه با استفاده از فرضیات مساله، معادله را ساده نمایید. آنگاه با استفاده از شرط مرزی فشار، مقدار فشار بر حسب پارامترهای مساله به دست می‌آید.

میدان سرعت زیر را در نظر بگیرید. تحت چه شرایطی این میدان می‌تواند جوابی برای معادله ناویر-استوکس باشد.

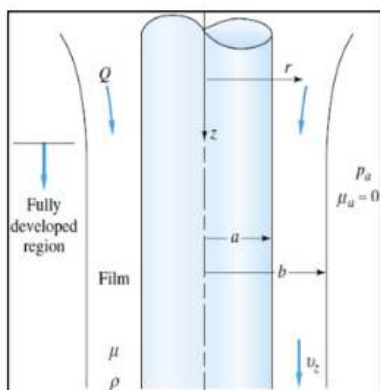
$$u = a(x^2 - y^2) \quad ; \quad v = -2axy \quad ; \quad w = 0$$

ج: معادله ناویر استوکس را نوشته (در سه جهت) آن گاه مولفه‌های سرعت داده شده را در معادله قرار دهید تا شرط لازم برای برقراری معادله، به دست آید.

اگر میدان سرعت در مثال قبلی در معادله ناویر استوکس صدق کند، با فرض $g_x=0$ ، $g_y=0$ و $g_z=-g$ معادله توزیع فشار را به دست آورید.

ج: با استفاده از معادلات به دست آمده در قسمت قبلی، مقادیر g_i را جایگذاری کرده و آنگاه معادلات را برای فشار، p ، حل نمایید.

یک لایه فیلمی از سیالی ویسکوز از یک لوله استوانه ای با شعاع داخلی a و شعاع فیلم خارجی b ، به سمت پایین جاری شده است (شکل مقابل). در فاصله ای از بخش فوقانی لوله استوانه ای سرعت فیلم سیال به مقدار حدی خود



شکل مربوط به مساله ۵

رسیده^{۴۴} و ثابت می ماند یعنی: $v_\theta = v_r = 0$, $v_z = v_z(r)$. با فرض این که هوا هیچ گونه مقاومت تنشی در حرکت فیلم سیال به وجود نمی آورد، معادله دیفرانسیلی v_z را تعیین نمایید. هم چنین شرایط مرزی مناسب برای حل این معادله دیفرانسیلی را به دست آورید و در نهایت با حل معادله، نشان دهید که توزیع سرعت فیلم سیال چگونه خواهد بود. هم چنین نشان دهید که شعاع فیلمی b با

نرخ جریان حجمی کل فیلم، Q ، چه رابطه ای دارد؟

ج: با استفاده معادله پیوستگی و معادله ناوراستوکس در مختصات استوانه ای، معادله حاکم برای به دست آوردن v_z به دست می آید. حال با فرضیات داده شده در مساله و نیز شکل مساله، شرایط مرزی لازم برای حل معادله به دست می آید. حال با داشتن معادله دیفرانسیلی حاکم و نیز شرایط مرزی آن، می توان مولفه سرعت را به دست آورد. رابطه بین دبی حجمی سیال با شعاع فیلمی، از انتگرالگیری برای دبی حجمی در لایه فیلمی به راحتی به دست می آید.

گردابش مربوط به میدان های سرعت زیر را به دست آورید.

الف: $V = (-yG/(x^2+y^2), xG/(x^2+y^2), 0)$; ب: $V = (-y\Omega, x\Omega, 0)$

ج: با استفاده از تعریف گردابش، که در متن درس ارائه شد، مقادیر مربوط به مولفه سرعت هر میدان را قرار دهید تا گردابش مربوط به هر میدان به دست آید.