

# مکانیک سیالات پیشرفته

## فصل سوم

### معادلات حرکت و معادله ناویراستوکس

۱. مقدمه	۲
۲. قانون دوم نیوتن و معادله حرکت لاگرانژی	۲
۲-۱. نیروی اینرسی، نیروهای سطحی و جسمی	۴
۲-۲. تنسور تنش و نیروهای سطحی	۵
۳. نیروهای سطحی بر حسب تنسور تنش	۱۰
۴. معادله حرکت مومنتوم	۱۱
۵. معادله ساختاری رئولوژیکی	۱۵
۶. معادله ناویر-استوکس	۱۹
۷. گردابش و سیال غیر چرخشی	۲۴
۸. خلاصه (جمع بندی)	۲۶

## ۱. مقدمه

در فصل قبل به توصیف حرکت لاگرانژی و اویلری پرداخته شد و توضیح داده شد که با استفاده از نظریه انتقالی رینولدز می‌توان حرکت سیال را در چارچوب لاگرانژی به چارچوب اویلری تبدیل نمود. در این فصل با استفاده از قانون دوم حرکت نیوتن که در چارچوب لاگرانژی صادق است، و همچنین استفاده از نظریه انتقالی رینولدز، معادلات حرکت یا به عبارتی معادلات مومنتوم به دست آورده می‌شود. هم‌چنین با استفاده از قانون ویسکوزیته نیوتن که در فصل اول به آن پرداخته شد، معادلات حرکت ناویر-استوکس را به دست خواهیم آورد.

## ۲. قانون دوم نیوتن و معادله حرکت لاگرانژی

در فصل دوم اشاره شد که قانون حرکت دوم نیوتن به صورت برداری و اندیسی به صورت‌های ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \quad (\text{نمایش برداری}) \quad (5-1)$$

$$\frac{d(mv_i)}{dt} = F_i \quad i = 1,2,3 \quad (\text{نمایش اندیسی}) \quad (5-2)$$

همان گونه که مشاهده می‌شود قانون دوم نیوتن نشان می‌دهد که:

نیروی کل اینرسی (لختی) = تغییرات در مومنتوم سیال

حال قانون حرکت دوم نیوتن در چارچوب لاگرانژی بر حسب انتگرال حجمی به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{sys}}(t)} \rho v_i dV = F_i \quad i = 1,2,3 \quad (5-3)$$

که در اینجا  $v_i$  مؤلفه‌های سرعت و  $\rho = \rho(x_0, y_0, z_0, t)$ ، یعنی دانسیته سیال بر حسب مل / حجم می‌باشد. همان گونه

که معادله (5-3) نشان می‌دهد تغییرات کل زمانی مومنتوم سیستم لاگرانژی برابر با نیروی کل اینرسی سیال می‌باشد.

معادله (5-3) معادله حرکت سیال در چارچوب لاگرانژی است. پس همان طور که در فصل قبل توضیح داده شد بایستی

با استفاده از تئوری انتقالی رینولدز توصیف حرکت سیال را در چارچوب لاگرانژی به چارچوب اویلری تبدیل نماییم.

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{sys}(t)}} \rho v_i dV = \int_{V_c} \left[ \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) \right] dV = F_i \quad (5-4)$$

در این جا  $\rho v_i$  مومنتوم خطی بر واحد حجم سیال است. باید توجه داشت که معادله (5-4) تئوری انتقال رینولدز به شکل اندیسی می باشد. شکل برداری معادله مذکور به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{sys}(t)}} \rho \vec{v} dV = \int_{V_c} \left[ \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) \right] dV = \vec{F} \quad (5-5)$$

بنابراین عبارت طرف چپ معادله بالا، معادله حرکت کل مومنتوم سیال را در چارچوب لاگرانژی و عبارت انتگرال دوم، طرف راست معادله، حرکت مومنتوم را در چارچوب اویلری نشان می دهد. باید توجه داشت که شار مومنتوم<sup>۱</sup> به صورت  $\rho v_i v_j$  یا  $\rho \vec{v} \vec{v}$  نشان داده می شود. همان طور که دیده می شود شار مومنتوم حاصل ضرب دیادیک دو بردار سرعت بوده که در حقیقت یک کمیت تنسوری می باشد.

برای ادامه کار از معادله اندیسی حرکت یعنی معادله (5-4) استفاده می کنیم. عبارت های داخل انتگرال دوم که در حجم کنترل نوشته شده به صورت ذیل مشتق گیری می شود:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (5-6)$$

در این جا عبارت های دوم و سوم در طرف راست معادله (5-6) به صورت ذیل ساده می شوند:

$$v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = v_i \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} \right] = 0 \quad (5-7)$$

ملاحظه می شود که حاصل ساده سازی عبارت های ۲ و ۳ معادله پیوستگی بوده که برابر صفر می گردد. حال عبارت های ۱ و ۴ به صورت ذیل ساده می گردد:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho \frac{Dv_i}{Dt} \quad (5-8)$$

<sup>۱</sup>Momentum Flux

به عبارت دیگر حاصل ساده سازی عبارت‌های ۱ و ۴ به صورت مشتق زمانی ماده سرعت<sup>۲</sup> به دست می‌آید. پس از ساده سازی‌های مذکور معادله حرکت مومنتوم یعنی معادله (۴-۵) به صورت ذیل نشان داده می‌شود:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{\text{sys}(t)}} \rho v_i dV = \int_{V_c} \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV = F_i \quad (۵-۹)$$

### ۲-۱. نیروی اینرسی، نیروهای سطحی<sup>۳</sup> و جسمی<sup>۴</sup>

نیروهای دینامیکی<sup>۵</sup> در حرکت سیال شامل دو نیروی جسمی و سطحی به صورت ذیل می‌باشد:

$$\vec{F} = \vec{F}_b + \vec{F}_s$$

یا

$$(۵-۱۰)$$

$$\vec{F}_k = \vec{F}_{k,b} + \vec{F}_{k,s} \quad ; k = 1,2,3$$

که در این جا معمولا  $\vec{F}_b$  را نیروی جرمی و  $\vec{F}_s$  را نیروی سطحی می‌نامند.

نیروهای جسمی در حقیقت آن دسته از نیروهایی است که ناشی از اعمال میدان گرانشی<sup>۶</sup> یا میدان مغناطیسی<sup>۷</sup> ثقل زمین بر جرم سیال می‌باشد. پس نیروهای جسمی از دو نوع نیروهای گرانشی<sup>۸</sup> و نیروهای مغناطیسی<sup>۹</sup> تشکیل شده است. در بسیاری از مواقع در حرکت سیال از نیروهای مغناطیسی صرف نظر می‌شود، مگر در موارد خاص که در این جا مورد بحث قرار نمی‌گیرد. بنابراین نیروهای جسمی در این جا فقط به صورت نیروهای گرانشی ارائه خواهد شد. یعنی خواهیم داشت:

$$\vec{F}_b \equiv \text{نیروی گرانشی} \quad (۵-۱۱)$$

حال به آنالیز نیروی گرانشی در چارچوب اویلری می‌پردازیم. تغییرات نیروی گرانشی ناشی از فاصله گرفتن جرم سیال از سطح زمین می‌باشد. به عبارتی طبق قوانین حرکت دینامیک نیروی گرانشی بر واحد حجم از طریق گرادیان انرژی پتانسیلی به دست می‌آید. بنابراین خواهیم داشت:

<sup>۲</sup>Material Derivative

<sup>۳</sup>Surface Force

<sup>۴</sup>Body Force

<sup>۵</sup>Dynamic Force

<sup>۶</sup>Gravitation

<sup>۷</sup>Magnetic

<sup>۸</sup>Gravitational Force

<sup>۹</sup>Magnetic Force

$$\vec{F}_b = -\nabla E_p = -\nabla(\rho gh) \quad (5-12)$$

که در این رابطه:

$E_p = \rho gh$  : انرژی پتانسیل بر حجم واحد

$g$ : شتاب ثقل<sup>۱۰</sup>

$h$ : ارتفاع از سطح زمین

پس نیروی گرانشی کل سیستم به صورت ذیل به دست می آید:

$$\vec{F}_b = \int_{V_c} \vec{F}_b dV = - \int_{V_c} \rho g \nabla h dV \quad (5-13)$$

در این جا ملاحظه می شود که نیروی گرانشی یک کمیت برداری است که بر حسب گرادیان فاصله از سطح زمین (کمیت برداری) به دست می آید.

## ۲-۲. تنش و نیروهای سطحی

نیروهای سطحی ناشی از اصطکاک لایه های سیال می باشد که شامل دو بخش است: نیروهای ویسکوز<sup>۱۱</sup> و نیروهای فشاری<sup>۱۲</sup>. به عبارتی منشأ نیروهای سطحی از تنش های عمودی و برشی در اثر تغییر شکل<sup>۱۳</sup> دائمی سیال می باشد. اگر سیالی در حالت سکون یا ایستا باشد نیروهای ناشی از تنش ناپدید شده و تنها نیروی حاکم بر سیال در حالت سکون نیروهای ناشی از فشار استاتیکی سیال می باشد.

برای به دست آوردن نیروهای سطحی، ابتدا لازم است که به تنش ها<sup>۱۴</sup> در حرکت سیال پرداخته شود. همان گونه که در فصل اول توضیح داده شد، سیالی که تحت نیروی دینامیکی قرار گیرد تغییر شکل می دهد و تا آن جایی که اعمال نیروی دینامیکی ادامه پیدا کند، تغییر شکل سیال پیوسته خواهد بود. تغییر شکل به عبارتی مقاومت سیال در برابر نیروهای

<sup>10</sup>Gravitational Acceleration

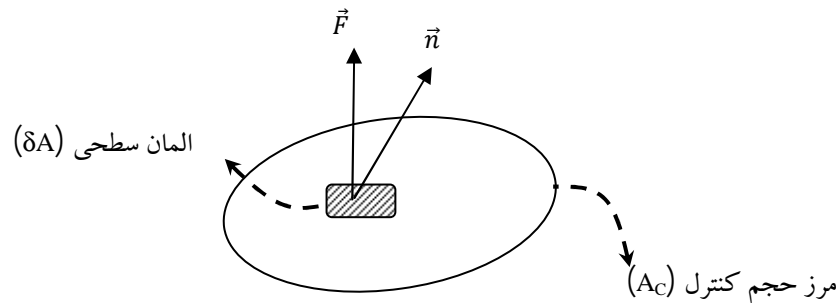
<sup>11</sup>Viscose

<sup>12</sup>Pressure

<sup>13</sup>Deformation

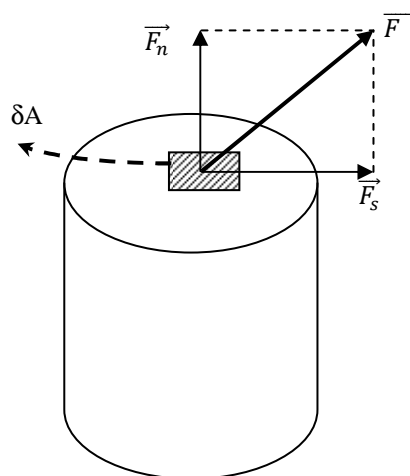
<sup>14</sup>Stress

دینامیکی ناشی از نیروهای سطحی مابین لایه‌های سیال می‌باشد. اثرات نیروهای سطحی بر سطوح سیال یا مرزهای جامد به صورت تنش‌های برشی و عمودی نشان داده می‌شوند. یک المان سطحی از سیال را در نظر بگیرید، (شکل (۴-۱)):



شکل ۵-۱: نیروهای سطحی در حجم کنترل

همان‌گونه که در شکل (۵-۱) مشاهده می‌شود، بردار نیروهای سطحی بر واحد حجم بوده که در المان سطحی  $(\delta A)$  عمل می‌نماید و  $\vec{n}$  بردار واحد خروجی از المان سطحی می‌باشد.



شکل ۵-۲: تجزیه برداری نیروی سطحی به دو بردار عمودی و برشی

حال اگر بردار نیروی سطحی را مطابق شکل (۵-۲) به دو نیروی عمودی و برشی تجزیه نماییم، به طوری که  $\vec{F}_s$  نیروی برشی سطحی و  $\vec{F}_n$  نیروی عمودی سطحی باشد می‌توان تنش‌های برشی<sup>۱۵</sup> و عمودی<sup>۱۶</sup> را به صورت ذیل تعریف کرد:

<sup>15</sup>Shear Stress  
<sup>16</sup>Normal Stress

$$\lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{|F_s|}{\delta A} \quad \text{تنش برشی:}$$

$$\lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{|F_n|}{\delta A} \quad \text{تنش عمودی:}$$

ملاحظه می‌شود که تنش‌های عمودی و برشی در یک نقطه تعریف شده‌اند. البته از یک نقطه بی‌نهایت صفحه عبور می‌کند. ملاحظه می‌شود که تنش‌های عمودی و برشی در یک نقطه تعریف شده‌اند. البته از یک نقطه بی‌نهایت صفحه عبور می‌کند. ملاحظه می‌شود که تنش‌های عمودی و برشی در یک نقطه تعریف شده‌اند. البته از یک نقطه بی‌نهایت صفحه عبور می‌کند.

$$\lim_{\delta A \rightarrow 0} \left\{ \frac{\vec{F}}{\delta A} \right\} = \vec{A}(\vec{n}) \quad (5-14)$$

معادله (5-14) نمایش بردار تنش می‌باشد، لیکن این معادله مستقیماً قابل استفاده نمی‌باشد، زیرا در یک نقطه بی‌نهایت بردار واحد  $\vec{n}$  داریم. در حقیقت از یک نقطه بی‌نهایت صفحه عبور می‌نماید. در این جا برای عملی کردن محاسبه تنش فقط سه صفحه عمود بر هم را در سیستم دکارتی مورد بررسی قرار می‌دهیم. بنابراین بردار تنش یعنی معادله (5-14) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\begin{matrix} \rightarrow(\vec{n}) \\ t_i \end{matrix} = n_i \begin{matrix} \rightarrow(\vec{e}_j) \\ t_i \end{matrix} \quad (5-15)$$

معادله (5-15) بردار تنش را در یک نقطه در توده سیال و بر حسب مؤلفه‌های تنش در دستگاه مختصات نشان می‌دهد. شکل معادله (5-15) برای نمایش تنش مناسب نیست، لذا تنش را به صورت ذیل نمایش می‌دهیم:

$$\begin{matrix} \rightarrow(\vec{e}_j) \\ t_i \end{matrix} \equiv \sigma_{ij} \quad \text{(نمایش تنش)} \quad (5-16)$$

- i : جهت بردار واحد در دستگاه مختصات که بر المان سطح عمود می‌باشد
- j : جهت نیروی وارده بر المان سطح در دستگاه مختصات

در قسمت های بعدی نشان خواهیم داد که معادله (5-16) یک تنسور درجه دوم است. پس معادله (5-16) برای بردار تنش سطحی<sup>۱۷</sup> با بردار واحد خروجی به صورت ذیل نوشته می‌شود:

<sup>17</sup>Surface Stress Tensor

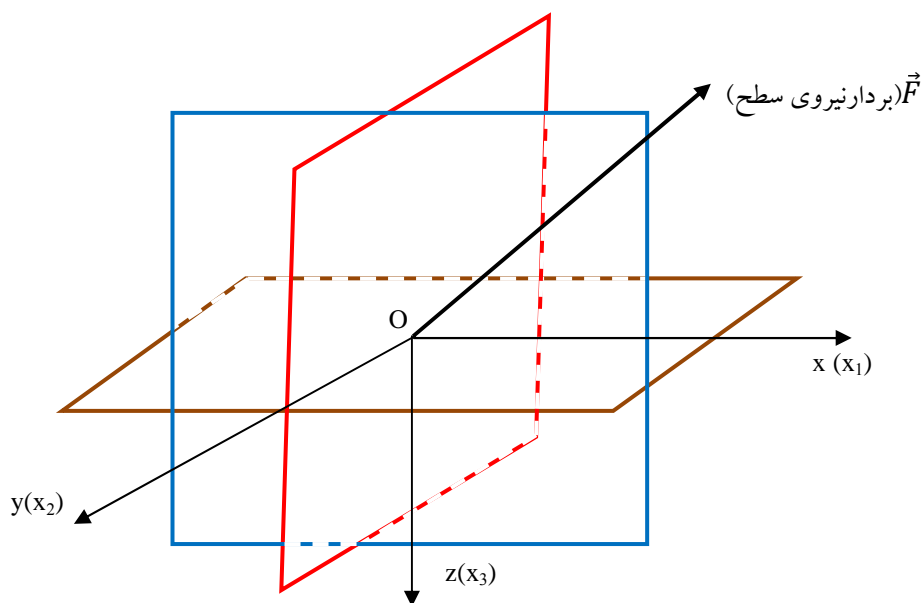
$$t_i^{(\bar{n})} = n_1 \sigma_{1i} + n_2 \sigma_{2i} + n_3 \sigma_{3i} \quad i=1,2,3 \quad (5-17)$$

که  $n_1, n_2, n_3$  مؤلفه‌های بردار واحد می‌باشند. معادله (5-17) نشان می‌دهد که در هر نقطه در سیال سه مؤلفه نیروهای سطحی به صورت  $t_1^{(n)}, t_2^{(n)}$  و  $t_3^{(n)}$  وجود دارد که هر کدام از این نیروهای سطحی بر حسب سه مؤلفه تنش نوشته می‌شوند. از طرفی ملاحظه می‌شود که دو تا از مؤلفه‌های نیروهای سطحی، برشی بوده و سومی عمودی می‌باشد. بنابراین مجموعه مؤلفه‌های نیروهای سطحی بر حسب نه مؤلفه تنش به دست می‌آیند. مجموعه نه مؤلفه تنش یک آرایه می‌سازد که به این آرایه تنسور تنش گفته می‌شود. پس تنسور تنش را می‌توان به صورت ذیل نمایش داد:

$$\underline{\sigma} = \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (5-18)$$

برای فهمیدن اهمیت فیزیکی نه مؤلفه تنش از تنسور تنش مطابق شکل (5-3) سه صفحه عمود بر هم در نقطه O را ملاحظه نمایید. حال اگر مؤلفه‌های بردار نیروی سطحی  $\vec{F}$  را به صورت  $F_1, F_2, F_3$  و نشان دهیم، مؤلفه‌های تنش هر کدام از نیروها در سه صفحه عمود بر هم به صورت ذیل نوشته می‌شود:

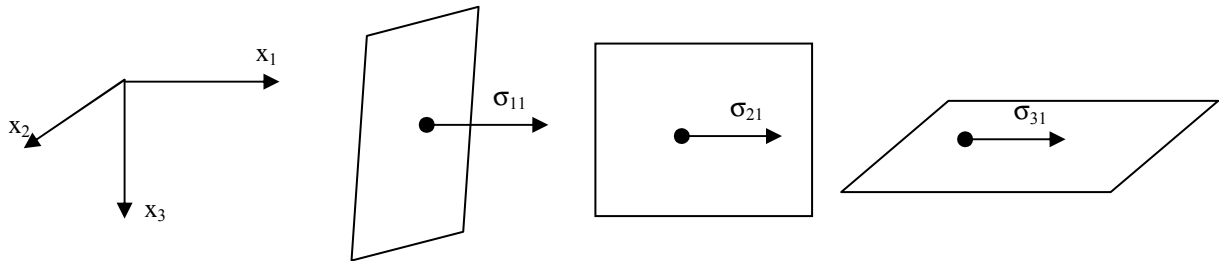
$$F_1: \sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31} \quad F_2: \sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23} \quad F_3: \sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$$



شکل 5-3: توصیف نیروهای سطحی در نقطه O در سه صفحه عمود بر هم



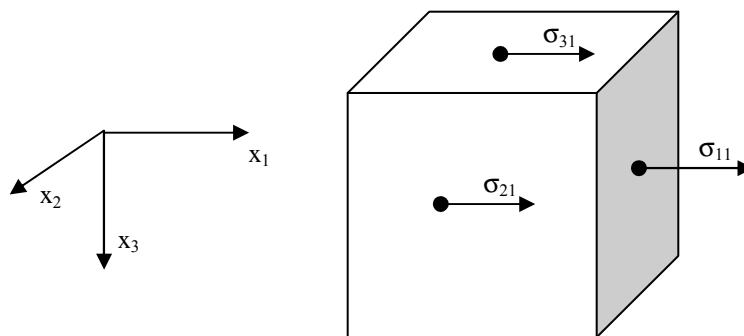
بنابراین به عنوان مثال مؤلفه نیروی سطحی  $F_1$  که در جهت  $X$  عمل می‌نماید از سه تنش به صورت ذیل (شکل ۵-۴) ناشی می‌شود:



شکل ۵-۴: مؤلفه های تنش بردار نیرو در جهت  $X$

به همین ترتیب مؤلفه های تنش ها برای مؤلفه های نیروهای سطحی  $F_2$  و  $F_3$  را نیز می‌توان مطابق شکل (۵-۴) توصیف نمود. معمولا برای نمایش تانسور تنش از یک المان مکعبی مطابق شکل (۵-۵) استفاده می‌شود. برای نمونه مؤلفه های تنش در جهت نیروی  $X$  در این شکل نشان داده شده است.

به همین ترتیب می‌توان مؤلفه های تنش را در جهت های دیگر دستگاه مختصات نشان داد. از طرف دیگر با استفاده از اصل بقای مومنتوم زاویه ای<sup>۱۸</sup> می‌توان نتیجه گرفت که تانسور تنش متقارن است. پس می‌توان نوشت:

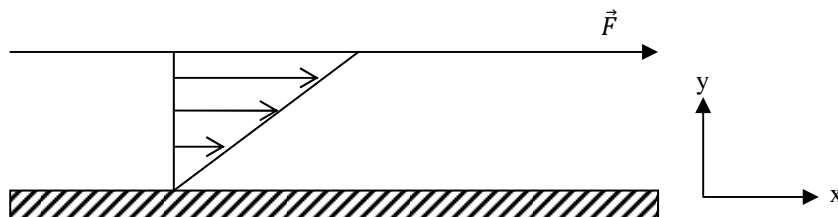


شکل ۵-۵: المان مکعبی برای نمایش مؤلفه های تنش در جهت  $X_1$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (۵-۱۹)$$

برای روشن شدن تانسور تنش مثال حرکت برشی ساده را مطابق شکل (۵-۶) در نظر بگیرید:

<sup>18</sup>Angular Momentum



شکل ۶-۵: حرکت برشی ساده

ملاحظه می‌شود که تنها تنش برشی در این حرکت سیال به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\sigma = \sigma_{21} = \sigma_{12} = \frac{F_x}{A} \quad (5-20)$$

که  $F_x$  مؤلفه نیروی برشی یعنی  $\vec{F} = F_x$  می‌باشد و  $A$  مساحت سطح تماس با سیال می‌باشد. سایر مؤلفه‌های تنسور تنش صفر خواهد بود. یعنی:

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0 \quad (5-21)$$

بنابراین، تنسور تنش کل در یک جریان برشی به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma & 0 \\ \sigma & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (5-22)$$

### ۳. نیروهای سطحی بر حسب تنسور تنش

با استفاده از معادله (۵-۱۵) ملاحظه می‌گردد که نیروهای سطحی بر واحد سطح به صورت  $\vec{t}^{(\vec{n})}$  نشان داده می‌شود.

بنابراین کل نیروهای سطحی برای حجم کنترل به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\vec{F}_s = \int_{A_c} \vec{t}^{(\vec{n})} dA \quad (5-23)$$

که  $A_c$  مساحت حجم کنترل می‌باشد و  $\vec{t}^{(\vec{n})}$  بستگی به جهت بردار واحد عمودی  $\vec{n}$  دارد. از طرفی در معادله (۵-۱۵)

نیروهای سطحی بر حسب جهت بردارهای واحد در دستگاه دکارتی نوشته شد و نشان داده شد که:

$$\vec{t}_k^{(\vec{n})} = n_i \sigma_{ik} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (5-24)$$

که در معادله (۵-۲۴) نیروهای کل سطحی بر حسب ضرب بردار واحد  $\vec{n}$  در تنسور تنش نوشته شده است. بنابراین معادله (۵-۲۳) با استفاده از معادله (۵-۲۴) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\vec{F}_s = \int_{A_c} (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) dA \quad (5-25)$$

حال با استفاده از قضیه دیورژانس گوس انتگرال سطحی را به انتگرال حجمی تبدیل نموده، خواهیم داشت:

$$\vec{F}_s = \int_{A_c} (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) dA = \int_{V_c} (\nabla \cdot \underline{\sigma}) dV \quad (5-26)$$

#### ۴. معادله حرکت مومنتوم<sup>۱۹</sup>

در بخش قبل معادله حرکت لاگرانژی سیال و تجزیه نیروهای دینامیکی حاکم بر حرکت سیال مورد بررسی قرار گرفت. بنابراین از ترکیب معادلات (۵-۹) و (۵-۱۰) معادله حرکت به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\int_{V_c} \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV = F_{i,b} + F_{i,s} \quad (5-27)$$

شکل برداری این معادله به صورت ذیل است:

$$\int_{V_c} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = \vec{F}_b + \vec{F}_s \quad (5-28)$$

با جاگذاری برای نیروهای جرمی و سطحی از معادلات (۵-۱۳) و (۵-۲۶) در معادله (۵-۲۸) خواهیم داشت:

$$\int_{V_c} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = - \int_{V_c} \rho g \nabla h dV + \int_{V_c} (\nabla \cdot \underline{\sigma}) dV \quad (5-29)$$

با جابجایی عبارت‌های طرف راست به طرف چپ و با توجه به این که حد انتگرال ( $V_c$ ) مقدار معینی می‌باشد، می‌توان معادله ذیل را از معادله (۵-۲۹) بدست آورد:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\rho g \nabla h + \nabla \cdot \underline{\sigma} \quad (5-30)$$

شکل اندیسی معادله (۵-۳۰) به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji}) \quad (5-31)$$

<sup>19</sup>Momentum Equation

به معادلات (۵-۳۰) و (۵-۳۱) معادله حرکت کوشی<sup>۲۰</sup> گفته می‌شود.

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود با سه مؤلفه سرعت، سه معادله حرکت خواهیم داشت. به عبارتی در این جا تعداد مجهولات به صورت سه مؤلفه سرعت  $(v_x, v_y, v_z)$  و نه مؤلفه تنسور تنش است و مجموعاً دوازده مجهول خواهیم داشت.

لیکن تعداد معادلات عبارت خواهد بود از سه معادله حرکت و یک معادله پیوستگی که مجموعاً چهار معادله موجود می‌باشد. بنابراین در این حالت حل سیستم با توجه به عدم برابری تعداد مجهولات و معادلات غیر ممکن می‌باشد. پس تنها روش حل این مسئله بیان کردن مؤلفه‌های تنسور تنش بر حسب مؤلفه‌های سرعت می‌باشد. قبل از پرداختن به این موضوع لازم است تنسور تنش را مورد بررسی قرار داده و ماهیت آن را بشناسیم.

ابتدا به حالتی پرداخته می‌شود که سیال در حالت سکون بوده، به طوری که تحت هیچ گونه تنش برشی و یا تغییر شکل قرار نداشته باشد. می‌توان تنسور تنش را برای سیال ایستایی<sup>۲۱</sup> به صورت ذیل نوشت:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} \quad (۵-۳۲)$$

ملاحظه می‌شود که در سیال ایستایی تنها مؤلفه‌های عمودی یا قطری تنسور تنش خودش را به صورت فشار ایزوتروپیک نشان می‌دهد. علامت منفی برای مثبت کردن فشار است که در اینجا فشار از نوع کمپرسی بوده که علامتش منفی است.

حال سیالی را در نظر بگیرید که در ابتدا در حالت ایستا بوده و تحت نیروی دینامیکی قرار بگیرد. در این حالت نیروهای دینامیکی باعث تغییر شکل سیال شده و به صورت تنش برشی بر فشار استاتیکی سیال اضافه می‌شوند. به طوری که تنسور تنش کل برای حرکت سیال به صورت برداری به شکل ذیل نوشته می‌شود:

$$\underline{\sigma} = \underline{\tau} - P\mathbf{I} \quad (۵-۳۳)$$

$\underline{\sigma}$ : تنسور تنش کل<sup>۲۲</sup>

<sup>20</sup>Cauchy

<sup>21</sup>Static Fluid

<sup>22</sup>Total Stress Tensor

$\underline{\tau}$ : تنسور تنش ویسکوز<sup>۲۳</sup>

$\underline{I}$ : تنسور واحد<sup>۲۴</sup>

تنسور تنش کل یعنی معادله (۵-۳۳) باز شده، به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} = \begin{pmatrix} -P + \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & -P + \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & -P + \tau_{33} \end{pmatrix} \quad (5-34)$$

که در معادله (۵-۳۴)  $\delta_{ij}$  دلتای کرونکر<sup>۲۵</sup> گفته می‌شود که به صورت ذیل تعریف شده است:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (5-35)$$

تنسور تنش ویسکوز،  $\underline{\tau}$ ، به عنوان تنسور تنش اضافی<sup>۲۶</sup> یا تنسور تنش دیادیک<sup>۲۷</sup> نیز اطلاق می‌شود. پس در حالتی که

$\underline{\tau} = 0$  باشد، سیال در حالت ایستا بوده و فقط فشار استاتیکی بر آن حاکم خواهد بود. حال با جا گذاری معادله (۵-۳۳)

در معادله حرکت (۵-۳۰)، معادله حرکت به صورت ذیل در می‌آید:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\rho g \nabla h - \nabla P + \nabla \cdot \underline{\tau} \quad (5-36)$$

معادله (۵-۳۶) معادله حرکت و یا معادله مومنتوم سیالات نامیده می‌شود، که به صورت سه معادله در دستگاه مختصات

دکارتی نشان داده می‌شود:

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \quad (5-37)$$

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \quad (5-38)$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (5-39)$$

این معادلات نشان می‌دهد که تعداد متغیرهای سرعت سه بوده و تعداد متغیرهای تنسور تنش ویسکوز، نه می‌باشد که به

صورت ذیل نشان داده می‌شود:

<sup>23</sup>Viscose Stress Tensor

<sup>24</sup>Unit Tensor

<sup>25</sup>Kronecker Delta

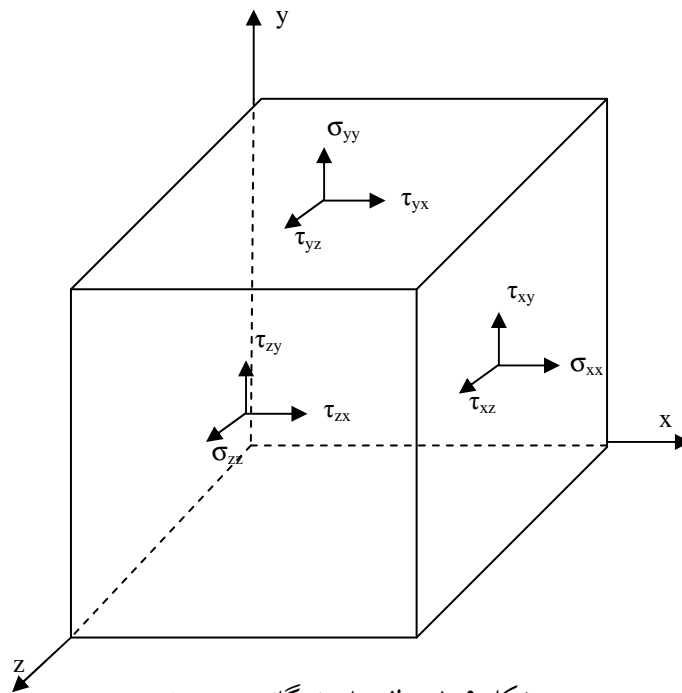
<sup>26</sup>Extera Stress

<sup>27</sup>Dyadic Stress Tensor

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (5-40)$$

نه تنسور تنش کل در شکل (5-6) نشان داده شده است. از طرفی قبلا نشان داده شد که مشتق ماده برای سرعت در سیالات غیر قابل تراکم به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{D(\rho\vec{v})}{Dt} = \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla(\rho\vec{v}) \quad (5-41)$$



شکل 5-6: مولفه های نه گانه تنسور تنش

با جابجایی مناسب عبارت دوم در سمت راست معادله (5-41) و جاگذاری آن در معادله (5-36) "معادله حرکت" به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{v}}_1 = \underbrace{-\rho g \nabla h}_2 - \underbrace{\nabla P}_3 - \underbrace{\nabla \cdot \rho \vec{v} \vec{v}}_4 + \underbrace{\nabla \cdot \underline{\tau}}_5 \quad (5-42)$$

که ترم های موجود در این معادله عبارتند از:

- 1: نرخ افزایش مومنتوم در حجم کنترل بر واحد حجم
- 2: نیروی گرانشی سیال در حجم کنترل بر واحد حجم

- 3: نیروی فشار دینامیکی سیال بر واحد حجم
- 4: شار نرخ افزایش مومنتوم با جابجایی کل جریان در عبور از سطح بر واحد حجم
- 5: نیروی ویسکوز سیال یا نرخ افزایش مومنتوم با حرکت نفوذی مولکول ها

## ۵. معادله ساختاری رئولوژیکی<sup>۲۸</sup>

در قسمت قبل اشاره شد که تعداد مجهولات در معادله حرکت بیشتر از تعداد معادلات حرکت و پیوستگی است. بنابراین لازم است که مولفه های تنش ویسکوز بر حسب مولفه های سرعت نوشته شود. در این حالت لازم است توضیح داده شود که تنش ویسکوز چگونه با نفوذ مولکولی که ناشی از تغییرات سرعت در لایه های سیال است ارتباط دارد. به طور کلی سیالی که تحت نیروی دینامیکی قرار گیرد به سه صورت در سیال حرکت ایجاد می کند که عبارتند از:

۱- حرکت جابجایی، ۲- حرکت چرخشی، ۳- حرکت تغییر شکلی.

حال سؤالی که مطرح می شود این است که تنش های ویسکوز به کدام گونه از حرکت های مذکور تعلق دارد؟ تغییرات در حرکت سیال را با گرادیان بردار سرعت ( $\nabla\vec{v}$ ) توصیف می کنیم. اگر گرادیان بردار سرعت را به صورت ذیل تجزیه نماییم خواهیم داشت:

$$\nabla\vec{v} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T) + \frac{1}{2}(\nabla\vec{v} - \nabla\vec{v}^T) \quad (5-43)$$

باید توجه داشت که  $\nabla\vec{v}^T$  ترانهاده  $\nabla\vec{v}$  می باشد. هم چنین معادله (۵-۴۳) به صورت اندیسی به صورت ذیل نوشته می شود:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (5-44)$$

ملاحظه می گردد که  $\nabla\vec{v}$  و  $\nabla\vec{v}^T$  هر کدام یک تنش درجه دو می باشند. حال دو تنش در معادله (۵-۴۴) به صورت ذیل تعریف می گردد:

$$\Delta_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (5-45)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (5-46)$$

تنسور تغییر شکل<sup>۳۰</sup>:  $\Delta_{ij}$  ; تنسور چرخشی<sup>۲۹</sup>:  $\Omega_{ij}$

در این جا مؤلفه‌های تنسور تغییر شکل یا تنسور نرخ کرنش به صورت ذیل نشان داده می‌شود:

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} & 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} & 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (5-47)$$

ملاحظه می‌شود که تنسور نرخ کرنش یک تنسور متقارن می‌باشد. تنسور چرخشی نیز به صورت ذیل نشان داده می‌شود:

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \quad (5-48)$$

ملاحظه می‌شود که تنسور چرخشی یک تنسور غیر متقارن است.

حال به رابطه ما بین تنسور تنش ویسکوز و تنسور تغییر شکل (نرخ کرنش) می‌پردازیم. به چنین رابطه‌ای معادله ساختاری

رئولوژیکی گفته می‌شود و به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\underline{\tau}(t) = \underline{F}[\underline{\Delta}(t)] \quad (5-49)$$

به چنین رابطه‌ای تابع تنسوری<sup>۳۱</sup> گفته می‌شود. در این حالت اگر  $\underline{\Delta} = 0$  باشد،  $\underline{\tau} = 0$  خواهد بود. معادله (5-49) بیان

می‌نماید که معادله ساختاری به نوع سیال بستگی دارد. از طرفی سیالات دارای بازه وسیعی می‌باشند. در یک دسته بندی

<sup>29</sup>Rotation Tensor

<sup>30</sup>Rate of Deformation Tensor

<sup>31</sup>Functional



گروهی از سیالات نیوتنی<sup>۳۲</sup> و گروهی دیگر غیر نیوتنی<sup>۳۳</sup> می‌باشند. معادله ساختاری برای سیالات نیوتنی به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (5-50)$$

که  $\mu$  ویسکوزیته (گرانروی) نیوتنی است که برای سیالات نیوتنی تابعی از دما و فشار می‌باشد. بنابراین مؤلفه‌های تنسور تنش ویسکوز در حالت‌های برشی را می‌توان به صورت ذیل نوشت:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (5-51)$$

برای تنش‌های عمودی باید توجه داشت که از دو قسمت تشکیل شده‌اند. یک قسمت مربوط به فشار سیال است که به صورت فشاری<sup>۳۴</sup> عمل می‌نماید و قسمت دیگر ناشی از نیروهای ویسکوز سیال است. پس مؤلفه‌های تنش عمودی به صورت ذیل نوشته می‌شود. باید توجه داشت در حالتی که سیال غیر تراکمی است، با استفاده از معادله پیوستگی،  $(\nabla \cdot \vec{v} = 0)$  می‌باشد.

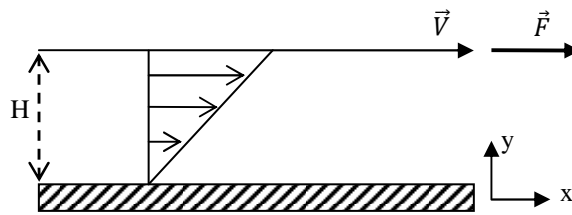
---

<sup>32</sup>Newtonian  
<sup>33</sup>Non-Newtonian  
<sup>34</sup>Compression

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{v}\end{aligned}\quad (5-52)$$

بنابراین ملاحظه می‌شود که تمام مؤلفه‌های تنسور تنش ویسکوز بر حسب گرادیان سرعت نوشته می‌شوند. به طوری که با جاگذاری این تنسور در معادله حرکت (مومنتم) معادله ناویر-استوکس به دست می‌آید. در بخش بعدی به دست آوردن معادله ناویر-استوکس توضیح داده خواهد شد.

در این جا برای روشن شدن و فهم تنش‌های ویسکوز و معادله ساختاری جریان ساده برشی<sup>۳۵</sup> را به عنوان مثال ارائه می‌دهیم.



شکل ۵-۷: جریان ساده برشی ناشی از صفحه متحرک در جهت X

مطابق شکل در این جریان حرکت صفحه متحرک در جهت X خواهد بود. و نیز تنسور تنش ویسکوز به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad (5-53)$$

باید توجه داشت چون  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$  می‌باشد، جای آن‌ها را می‌توان جا بجا نمود همان گونه که در نمایش تانسور ها در این فصل انجام گردید. از طرفی تنسور نرخ کرنش به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5-54)$$

در این جا  $v_x = v$  و  $v_y = v_z = 0$  می باشد. همان گونه که در فصل اول اشاره شد، نرخ کرنش را می توان به صورت ذیل نوشت:

$$\dot{\gamma} = \frac{dv_x}{dy} = \frac{V}{H} \quad (5-55)$$

پس معادله ساختاری سیال نیوتنی به صورت ذیل با استفاده از معادله (5-51) نوشته می شود.

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \tau = \mu \dot{\gamma} \quad (5-56)$$

که در این جا  $\frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$  خواهد بود.

### ۶. معادله ناویر - استوکس<sup>۳۶</sup>

در این قسمت با استفاده از قانون ساختاری سیالات نیوتنی و نیز با فرض غیر قابل تراکم بودن سیال می توان معادلات حرکت سیال را به دست آورد. پس با جاگذاری معادله (5-50) در معادله (5-36) می توان معادله حرکت سیالات نیوتنی غیر قابل تراکم را به صورت ذیل به دست آورد:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \underbrace{\mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{عبارت ویسکوز}} \right] \quad (5-57)$$

که با مشتق گیری عبارت های ویسکوز به صورت ذیل جابجا و ساده می شوند:

$$\mu \left[ \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

بر اساس معادله پیوستگی، این ترم صفر است

<sup>36</sup>Navier-Stokes Equation

پس با جای گذاری عبارت بالا در معادله (۵-۵۷) خواهیم داشت:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial x_i} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \quad (۵-۵۸)$$

شکل برداری معادله (۵-۵۸) به صورت ذیل می باشد:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\rho g \nabla h - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (۵-۵۹)$$

به معادلات (۵-۵۸) و (۵-۵۹) معادله ناویر- استوکس اطلاق می گردد. هم اکنون اگر معادله (۵-۵۸) را برای سه مؤلفه

سرعت نوشته و آن را باز نماییم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_x}{Dt} &= -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{Dv_y}{Dt} &= -\rho g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{Dv_z}{Dt} &= -\rho g \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (۵-۶۰)$$

با بررسی معادلات ناویر- استوکس مشخص می شود که تعداد مجهولات چهار بوده و به صورت  $v_x(t,x,y,z)$  ،

$v_y(t,x,y,z)$  ،  $v_z(t,x,y,z)$  و  $P(t,x,y,z)$  می باشند. بنابراین با منظور کردن معادله پیوستگی ملاحظه می گردد که

تعداد کل معادلات نیز چهار می باشد. پس اکنون می توان با استفاده از حساب دیفرانسیل معادلات مذکور را حل نمود و

توابع میدانی سرعت و فشار را محاسبه نمود. در فصل بعد چگونگی حل معادلات مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

همانند معادله پیوستگی، معادلات ناویر- استوکس نیز در سه دستگاه مختصات دکارتی، استوانه ای و کروی ارائه شده اند.

بنابراین با استفاده از تبدیل متغیرها (که در فصل سوم بیان شد) می توان معادلات مذکور را در هر سه سیستم دکارتی،

استوانه ای و کروی به صورت جداول ذیل نوشت:

جدول ۱-۵: معادلات ناویر-استوکس در مختصات دکارتی

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \frac{\partial h}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \frac{\partial h}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

جدول ۲-۵: مؤلفه های تنش ویسکوز در مختصات استوانه ای

جدول ۳-۵: مؤلفه های تنش ویسکوز در مختصات کروی

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)$$

$$\tau_{\theta\varphi} = \tau_{\varphi\theta} = \mu \left( \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right)$$

$$\tau_{\varphi r} = \tau_{r\varphi} = \mu \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\varphi}{r} \right) \right)$$

$$\sigma_{rr} = -P + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{v}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)$$

$$\sigma_{rr} = -P + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{v}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -P + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{v}$$

$$\sigma_{zz} = -P + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{v}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -P + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{v}$$

جدول ۴-۵: معادلات حرکت بر حسب تانسور تنش ویسکوز در دستگاه مختصات استوانه‌ای

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (r\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} \right] + \rho g_r$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right] + \rho g_\theta$$

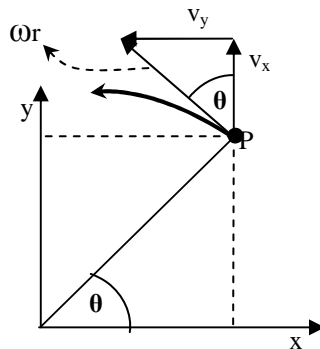
$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right] + \rho g_z$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -P + 2\mu \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{v}$$

$$\begin{aligned}
 & \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right) \\
 = & -\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\tau_{\theta r} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial \varphi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\varphi\varphi}}{r} + \rho g_r \\
 & \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \cot \theta}{r} \right) \\
 = & -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \\
 & - \frac{\cot \theta}{r} \tau_{\varphi\varphi} + \rho g_\theta \\
 & \rho \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi \cot \theta}{r} \right) \\
 = & -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \\
 & - \left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau_{r\varphi}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\varphi} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\tau_{\varphi r} - \tau_{r\varphi}}{r} \right. \\
 & \left. + \frac{\tau_{\theta\varphi} \cot \theta}{r} + \rho g_\varphi \right)
 \end{aligned}$$

## ۷. گردابش<sup>۳۷</sup> و سیال غیر چرخشی<sup>۳۸</sup>

در بخش قبل توضیح داده شد که تنسور  $\Omega$  یک تنسور چرخشی است و مؤلفه‌های این تنسور مطابق ماتریس (۴۸.۴) نشان داده شد. حال به تعریف گردابش و سیال غیر چرخشی می‌پردازیم. گردابش یا چرخشی بودن یک سیال بستگی به سرعت زاویه‌ای<sup>۳۹</sup> سیال دارد. مطابق شکل (۵-۱۰) فرض نماییم که المان سیال در نقطه P حول محور Z با سرعت زاویه‌ای  $\omega$  می‌چرخد.



۵-۱۰: حرکت چرخشی المان سیال در نقطه P حول محور Z

همان گونه که ملاحظه می‌شود، سرعت خطی<sup>۴۰</sup> مماس بر سرعت زاویه‌ای بوده و مقدار آن  $r\omega$  می‌باشد. از طرفی مؤلفه‌های سرعت خطی به صورت  $v_x$  و  $v_y$  مطابق شکل (۵-۱۰) به صورت ذیل نوشته می‌شوند:

$$v_x = -r\omega \sin \theta = -r\omega \frac{y}{r} = -y\omega \quad (۵-۶۱)$$

$$v_y = +r\omega \cos \theta = r\omega \frac{x}{r} = x\omega$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌های (۵-۶۱) می‌توان نوشت:

$$\omega = -\frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (۵-۶۲)$$

$$\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

پس سرعت زاویه‌ای سیال حول محور Z متوسط روابط (۵-۶۲) خواهد بود و بنابراین خواهیم داشت:

<sup>37</sup>Vorticity

<sup>38</sup>Irrotationality

<sup>39</sup>Angular Velocity

<sup>40</sup>Linear Velocity



$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (5-63)$$

به همین ترتیب سرعت زاویه‌ای حول محورهای X و Z نیز به صورت ذیل نوشته می‌شوند:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \quad (5-64)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \quad (5-65)$$

حال به تعریف گردابش می‌پردازیم. اگر کرل بردار سرعت را به صورت ذیل بنویسیم:

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{e}_1 - \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \vec{e}_2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{e}_3 \quad (5-66)$$

ملاحظه می‌شود که کرل بردار سرعت برداری است که آن را به صورت  $\vec{\xi} = \nabla \times \vec{v}$  نشان می‌دهیم. همان گونه که در

معادله (5-66) ملاحظه می‌شود، مؤلفه‌های بردار  $\vec{\xi}$  دو برابر سرعت‌های زاویه‌ای سیال حول محورهای مختصات می-

باشند. بردار  $\vec{\xi}$  را بردار گردابش<sup>۴۱</sup> می‌گویند. حال اگر گردابش برابر صفر باشد ( $\vec{\xi}=0$ )، سیال را غیر چرخشی می‌گویند.

به عبارتی به سیالی غیر چرخشی می‌گویند که کرل بردار سرعت آن صفر باشد. به بیان دیگر در هر سیال غیر چرخشی

سرعت زاویه‌ای یا نرخ چرخش<sup>۴۲</sup> برابر با صفر خواهد بود. با توجه به معادله (5-66) مؤلفه‌های بردار گردابش به صورت

ذیل نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \xi_y &= \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \xi_z &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (5-67)$$

روابط (5-67) مؤلفه‌های تنسور چرخشی  $\underline{\Omega}$  می‌باشند.

<sup>41</sup>Vorticity Vector

<sup>42</sup>Rate of Rotation

## ۸. خلاصه (جمع بندی)

شار مومنتوم حاصل ضرب دیادیک دو بردار سرعت بوده و یک کمیت تنسوری می باشد. نیروهای جرمی از دو نوع نیروهای گرانشی و نیروهای مغناطیسی تشکیل شده است. طبق قوانین حرکت دینامیک نیروی گرانش بر واحد حجم از طریق گرادیان انرژی پتانسیلی به دست می آید. در بسیاری از مواقع در حرکت سیال از نیروهای مغناطیسی صرف نظر می شود. اثرات نیروهای سطحی بر سطوح سیال یا مرزهای جامد به صورت تنش های برشی و عمودی نشان داده می شوند. مجموعه مؤلفه های نیروهای سطحی بر حسب نه مؤلفه تنش به دست می آیند که آرایه حاصل از آن را تنسور تنش گویند. تمام مؤلفه های تنسور تنش ویسکوز بر حسب گرادیان سرعت می تواند بیان شود. تنها نیروی حاکم بر سیال در حالت سکون نیروهای ناشی از فشار استاتیکی سیال می باشد. گردابش یا چرخشی بودن یک سیال بستگی به سرعت زاویه ای  $\omega$  سیال دارد. به سیالی غیر چرخشی می گویند که کرل بردار سرعت آن صفر باشد.