(۱

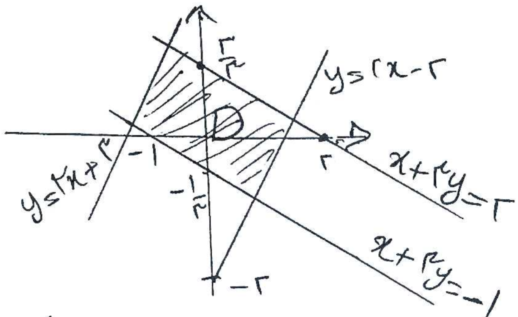
$$\vec{\nabla} f = \left(yze^{xyz}\ln y^3 ,\ xze^{xyz}\ln y^3 + e^{xyz}\left(\frac{3y^2}{y^3}\right) ,\ xye^{xyz}\ln y^3 \right)$$

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\vec{\nabla} f(P_0) = (0, 3, 0) \quad \text{(۰/۲۵)} \Rightarrow f_{\vec{u}}(P_0) = \frac{1}{\sqrt{14}}(2,-1,3)\cdot(0,3,0)$$

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{4+1+9}}(2,-1,3) \quad \text{(۰/۲۵)} \qquad = -\frac{3}{\sqrt{14}} \quad \text{(۰/۲۵)}$$

(۲



$$\text{مساحت ناحیه} = \iint_D 1\, dA \quad \text{(۰/۲۵)}$$

برای حل انتگرال باید تغییر متغیر استفاده کنیم

$$\begin{cases} u = x+3y \to -1 \le u \le 2 \\ v = y-2x \to -2 \le v \le 3 \end{cases} \quad \text{(۰/۲۵)}\ \text{(۰/۲۵)} \quad , \quad \begin{cases} x = \dfrac{u-3v}{7} \\ y = \dfrac{2u+v}{7} \end{cases} \quad \text{(۰/۲۵)}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{vmatrix} = \frac{1}{49} + \frac{6}{49} = \frac{1}{7} \quad \text{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت ناحیه} = \int_{-1}^{2}\int_{-2}^{3} (1)\left(\frac{1}{7}\right) dv\, du = \frac{1}{7}\int_{-1}^{2} du \int_{-2}^{3} dv \quad \text{(۰/۲۵)}$$

$$= \frac{1}{7}(2+1)(3+2) = \frac{15}{7}$$

(۳

$$g(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2 \to \vec{\nabla} g = (2x, 2y, 4z)$$

$$\vec{\nabla} f = (2, -2, 4)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2\lambda x \to x = \frac{1}{\lambda} \\ -2 = 2\lambda y \to y = -\frac{1}{\lambda} \\ 4 = 4\lambda z \to z = \frac{1}{\lambda} \\ x^2+y^2+2z^2 = 4 \end{cases} \longrightarrow \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^2} = 4$$

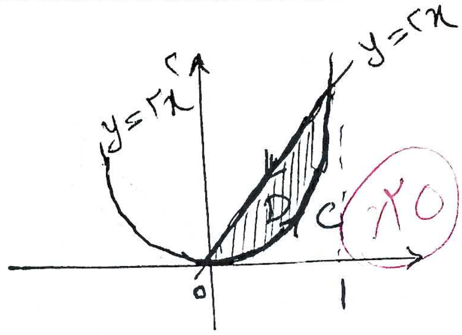
$$\longrightarrow 4\lambda^2 = 4 \to \lambda = \pm 1 \to (1,-1,1),\ (-1,1,-1)$$

نقاط بحرانی مقید

$$f(1,-1,1) = \underset{max}{8} \quad , \quad f(-1,1,-1) = \underset{min}{-8}$$

۵) اگر

$$P(x,y) = 2yx - 2xy\cos y$$
$$Q(x,y) = x^2 y\sin y - x^2\cos y$$



شرایط قضیه گرین برقرار است

$$Q_x - P_y = 2xy\sin y - 2x\cos y - 2x + 2x\cos y - 2xy\sin y = -2x$$

$$\begin{cases} y=2x \\ y=2x^2 \end{cases} \rightarrow 2x = 2x^2 \rightarrow x = 0, 1$$

$$\Rightarrow D = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 2x^2 \le y \le 2x \end{cases}$$

بنابه قضیه گرین انتگرال داده شده برابر است با:

$$\iint_D -2x\, dA = \int_0^1 \left(\int_{2x^2}^{2x} (-2x)\, dy\right) dx = -2\int_0^1 xy\Big|_{2x^2}^{2x} dx$$

$$= -2\int_0^1 x(2x-2x^2)\,dx = -2\int_0^1 (2x^2 - 2x^3)\,dx = -4\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1$$

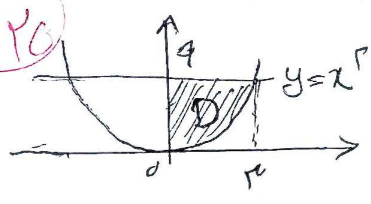
$$= -4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{3}$$

---

۴) انتگرال مکرر داده شده با ترتیب فعلی قابل حل نیست.

$$D = \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ x^2 \le y \le 9 \end{cases}$$

ساده عمودی



$$\rightarrow D = \begin{cases} 0 \le y \le 9 \\ 0 \le x \le \sqrt{y} \end{cases}$$

ساده افقی

بنابراین انتگرال داده شده برابر است با:

$$\int_0^9 \int_0^{\sqrt{y}} x\cos(y^2)\,dx\,dy = \int_0^9 \cos(y^2)\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2}\int_0^9 y\cos(y^2)\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\sin(y^2)\Big|_0^9 = \frac{1}{4}(\sin(81) - 0) = \frac{\sin(81)}{4}$$

---

۶) الف) اگر D سایه T روی صفحه افقی باشد

$$\text{حجم } T = \iint_D [(4 - x^2 - y^2) - 3(x^2+y^2)]\,dA = \iint_D (4 - 4x^2 - 4y^2)\,dA$$

$$\begin{cases} z=4-x^2-y^2 \\ z=3(x^2+y^2) \end{cases} \Rightarrow 3x^2+3y^2=4-x^2-y^2 \rightarrow x^2+y^2=1 \quad ۰/۲۵$$

D ناحیه درون دایره بالا است

$$D_{\text{مختصات قطبی}} = \begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le \theta \le 2\pi \end{cases} \quad ۰/۲۵ \quad \Rightarrow T_{\text{حجم}} = 4\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r^2)\, r\, d\theta\, dr \quad ۰/۲۵ \quad = 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r-r^3)\,dr$$

$$= 8\pi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 8\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=2\pi \quad ۰/۲۵$$

ب)

$$S_1\ \text{مساحت} = \iint_{S_1} 1\, d\sigma \quad ۰/۲۵ \quad = \iint_D 1\times\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dx\,dy \quad ۰/۲۵$$

$$z_x=-2x,\ z_y=-2y \Rightarrow S_1\ \text{مساحت} = \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\,dy \quad ۰/۲۵$$

$$\xrightarrow{\text{قطبی}} S_1\ \text{مساحت} = \int_0^1\int_0^{2\pi} \sqrt{1+4r^2}\ r\, d\theta\, dr \quad ۰/۲۵ \quad = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\, dr \quad ۰/۲۵$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{8}\,\frac{(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1 \quad ۰/۲۵ \quad = \frac{\pi}{6}\left(5^{\frac{3}{2}}-1\right) = \frac{\pi(5\sqrt{5}-1)}{6}$$

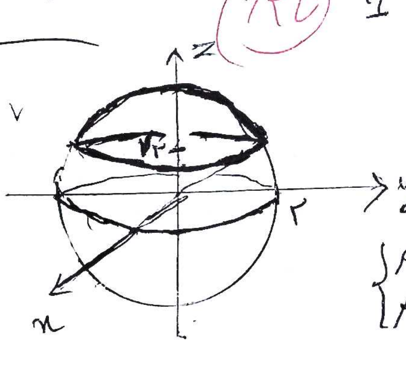
ج) شرایط قضیه گاوس برقرار است و

$$\operatorname{div}\vec{F} = 0+2+0=2 \quad ۰/۲۵$$

بنابر قضیه گاوس داریم

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma \quad ۰/۲۵ \quad = \iiint_T 2\, dv = 2(T_{\text{حجم}}) \quad ۰/۲۵ \quad = 4\pi \quad ۰/۲۵$$

د)



$$x^2+y^2+z^2=4 \xrightarrow{\text{کروی}} \rho^2=4 \rightarrow \rho=2$$

$$z=\sqrt{2} \xrightarrow{\text{کروی}} \rho\cos\varphi=\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \rho=2 \\ \rho\cos\varphi=\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$$

$$\text{حدود کروی } T: \begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \quad ۰/۲۵ \\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{\cos\varphi}\le\rho\le 2 \quad ۰/۲۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{انتگرال داده شده}} = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_{\frac{\sqrt{2}}{\cos\varphi}}^{2} \frac{1}{\sqrt{\rho^2}}\,\rho^2\sin\varphi\, d\rho\right)d\varphi\right)d\theta \quad ۰/۲۵ \quad ۰/۲۵$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\frac{\sqrt{2}}{\cos\varphi}}^{2} \rho \sin\varphi \, d\rho \right) d\varphi = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_{\frac{\sqrt{2}}{\cos\varphi}}^{2} d\varphi$$ ۰/۲۵

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \left(2 - \frac{1}{\cos^2\varphi} \right) d\varphi = -2\pi \left(2\cos\varphi + \frac{1}{\cos\varphi} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -2\pi \left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{2}} - 2 - 1 \right) = 2(3 - 2\sqrt{2})\pi$$ ۰/۲۵

---

۸) الف)

$S_1 : z = x^2 + y^2$

اگر $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$

$$\vec{\nabla} F = (2x, 2y, -1) \rightarrow \vec{\nabla} F(P_0) = (2, 2, -1)$$ ۰/۲۵

$S_2 : x + z = 3$

اگر $G(x,y,z) = x + z$

$$\vec{\nabla} G = (1, 0, 1) \rightarrow \vec{\nabla} G(P_0) = (1, 0, 1)$$ ۰/۲۵

بردار هادی خط مماس $= \vec{\nabla} G(P_0) \times \vec{\nabla} F(P_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 1+2, 2)$ ۰/۲۵

معادله خط مماس : $\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 3t + 1 \\ z = 2t + 2 \end{cases}$ ۰/۲۵

ب) شرایط قضیه استوکس برقرار است

$$\text{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$ ۰/۲۵

بنابه قضیه استوکس

$$\int_C x\,dx + y\,dy + z\,dz = \iint_S \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵