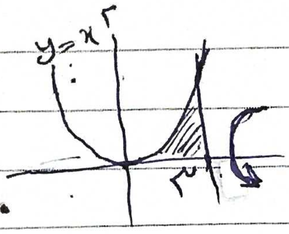
واحد نجف آباد
اداره امتحانات

نام و نام خانوادگی:	نام درس: نام استاد:
شماره دانشجوئی:	تاریخ: نمره میان ترم
رشته و گرایش:	پایان ترم
	نهائی
نیمسال اول / دوم / تابستان سال تحصیلی:	امضاء دانشجو:

۱) ۱/۵ نمره



روش قرص مستدیر:

$$V = \pi\int_a^b [(f_2(x))^2 - (f_1(x))^2]dx = \pi\int_0^3 (x^2)^2 dx$$ /۲۵ /۲۵

$$= \pi\left(\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^3 = \frac{\pi}{5}3^5$$ /۲۵

روش پوسته استوانه‌ای:

$$V = 2\pi\int_c^d y(g_2(y) - g_1(y))dy = 2\pi\int_0^9 (3y - y^{\frac{3}{2}})dy$$ /۲۵ /۲۵

$$= 2\pi\left(\frac{3}{2}y^2 - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^9 = 2\pi\left(\frac{3}{2}9^2 - \frac{2}{5}9^{\frac{5}{2}}\right) = 2\times3^5\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right)$$

$$= 2\times3^5\pi\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{3^5\pi}{5}$$ /۲۵

۲) ۱/۵ نمره

مساله ۱۱۳ صفحه ۱۳۴ کتاب

حد داده شده حالت مبهم 1^∞ است.

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x \longrightarrow \ln L = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$ /۲۵

$\infty\times0$

$$\longrightarrow \ln L = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x - \ln(x+1)}{\frac{1}{x}}$$ /۲۵ /۲۵

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1-x}{x(x+1)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} -\frac{x}{x+1} = -1$$ /۲۵ /۲۵

$$\longrightarrow \ln L = -1 \longrightarrow L = e^{-1}$$ /۲۵

۳) ۱ نمره

$$y = (\cos 2x)^{x^2+1} \longrightarrow \ln y = \ln\left((\cos 2x)^{x^2+1}\right) = (x^2+1)\ln(\cos 2x)$$ /۲۵

$$\longrightarrow \frac{y'}{y} = 2x\ln(\cos 2x) + (x^2+1)\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}$$ /۲۵ /۲۵ /۲۵ /۲۵

$$\to y' = \left(2x\ln(\cos 2x) - 2(x^2+1)\tan 2x\right) y$$
$$= 2\left(x\ln(\cos 2x) - (x^2+1)\tan 2x\right)(\cos 2x)^{x^2+1}$$

۰/۲۵

---

۴) الف) مسئله ۶ صفحه ۱۳۷ کتاب

۱/۲۵ نمره

$$x = 2\sin t \to dx = 2\cos t\,dt$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\to \int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int 4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}\times 2\cos t\,dt$$ ۰/۲۵

$$= 16\int \sin^2 t\sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt = 16\int \sin^2 t\cos^2 t\,dt$$

$$= 16\int\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = 4\int(1-\cos^2 2t)\,dt$$ ۰/۲۵

$$= 4\left(\int 1\,dt - \int\cos^2 2t\,dt\right) = 4\left(t - \int\frac{1+\cos 4t}{2}\,dt\right)$$

$$= 4\left(t - \frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8}\right) + C = 2t - \frac{\sin 4t}{2} + C$$

$$\sin t = \frac{x}{2} \to \cos t = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \to \sin 2t = 2\sin t\cos t$$
$$t = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$= 2\,\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}$$

$$\to \cos 2t = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}(4-x^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{4-4x^2+x^4} = \frac{1}{2}\sqrt{(x^2-2)^2}$$
$$= \frac{x^2-2}{2}$$

$$\to \sin 4t = 2\cos 2t\sin 2t = \frac{(x^2-2)x\sqrt{4-x^2}}{2}$$ ۰/۲۵

$$\to \int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x(x^2-2)\sqrt{4-x^2}}{4} + C$$

ب) ۱/۲۵ نمره

$$u = \ln(x^2+1) \to du = \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$ ۰/۲۵
$$dv = x\,dx \to v = \frac{x^2}{2}$$ ۰/۲۵

$$I = \int x\ln(x^2+1)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1) - \int\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$ ۰/۲۵

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\int\frac{x^3}{x^2+1}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+1 \\ \hline x^3+x & x \\ -x & \end{array}$$

$$\to I = \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\int\left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx$$ ۰/۲۵

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x^2+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + C$$

۰/۲۵

د) چون تابع زیر انتگرال یک کسر گویاست تجزیه کسر انجام می دهیم

۱/۲۵

$$\frac{4}{x(x^2-2x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}=\frac{Ax^2-2Ax+2A+Bx^2+Cx}{x(x^2-2x+2)}$$

۰/۲۵

$$\rightarrow\begin{cases}A+B=0 \longrightarrow B=-2\\ -2A+C=0 \longrightarrow C=2A=4\\ 2A=4 \longrightarrow A=2\end{cases}$$

۰/۲۵

$$I=\int\frac{4\,dx}{x(x^2-2x+2)}=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{-2x+4}{x^2-2x+2}\right)dx=2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx+\int\frac{2}{x^2-2x+2}dx$$

$$\int\frac{2}{x^2-2x+2}dx=\int\frac{2}{x^2-2x+1+1}dx=\int\frac{2}{(x-1)^2+1}dx=2\tan^{-1}(x-1)$$

۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\longrightarrow I=2\ln x-\ln(x^2-2x+2)+2\tan^{-1}(x-1)+C$$

۰/۲۵

ج)

۱/۲۵

$$z=\tan\left(\frac{x}{2}\right)\longrightarrow dx=\frac{2dz}{1+z^2},\quad \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$

۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\rightarrow\int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1+\frac{1-z^2}{1+z^2}}=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{1+z^2+1-z^2}{1+z^2}}=\int\frac{\frac{2}{1+z^2}}{\frac{2}{1+z^2}}dz=\int 1dz=z+C$$

۰/۲۵

$$=\tan\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

۰/۲۵

$$\rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x}=\tan\left(\frac{x}{2}\right)+C\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan 0=1-0=1$$

۰/۲۵

مسئله ۱ صفحه ۱۹۷ کتاب

۵) اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$ و $g(x)=\frac{1}{x}$:

۱ نمره

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}=1$$

۰/۲۵ ۰/۲۵

بنابه آزمون مقایسه حدی چون $\int_1^\infty\frac{dx}{x}$ واگرا است انتگرال $\int_1^\infty\frac{x\,dx}{x^2+1}$ نیز واگرا است

۰/۲۵ ۰/۲۵

و در نتیجه انتگرال داده شده نیز واگرا است.

۶) الف) ۱ نمره

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{5n+2}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5n+2}$$ واگرا است

۰/۲۵ چون در مقایسه حدی با $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{5n+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{5n+2} = \frac{1}{5}$$ ۰/۲۵

اما سری متناوب است و دنباله $\left\{\frac{1}{5n+2}\right\}$ نزولی است و همگرا به صفر ۰/۲۵

بنابه آزمون سری متناوب سری داده شده همگرا است چون همگرای مطلق نبود ۰/۲۵

پس همگرای مشروط است.

ب) ۱ نمره

$$R_c = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{5n+2}}{\frac{1}{5(n+1)+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5n+7}{5n+2} = 1$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

شعاع همگرایی

سری توانی داده شده حول $x_0=-4$ است پس یک طرف بازه همگرایی $-1-4=-5$

است و سمت دیگر $-4+1=-3$ ۰/۲۵

$$x=-5:\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5+4)^n}{5n+2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n+2} \xrightarrow{\text{بنابه الف}}$$ همگرا است

$$x=-3:\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3+4)^n}{5n+2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5n+2}$$ واگرا

پس بازه همگرایی: $[-5,-3)$ ۰/۲۵

مساله ۲۴ صفحه ۳۲۸ کتاب

۷) ۱/۵ نمره فرمول بسط مکلورن: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ ۰/۲۵

$$f^{(0)}(0) = f(0) = e^0 = 1\ ,\quad f'(0) = e^x\big|_{x=0} = 1\ ,\ \dots\ ,\ f^{(n)}(0) = e^x\big|_{x=0} = 1$$ ۰/۲۵

$$\to e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$ ۰/۲۵

$$\to e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!} \to \int e^{x^2}dx = \int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + C$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵