۱) قرار می‌دهیم ۰/۲۵ $F(x,y,z)=\sin(x^2y)-y^2z-\ln(x^2z)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2xy\cos(x^2y)-0-\frac{2xz}{x^2z}}{0-y^2-\frac{x^2}{x^2z}}=\frac{2x^2y\cos(x^2y)-2}{x(zy^2-1)\frac{1}{z}}$$

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

۲) قرار می‌دهیم $F(x,y,z)=e^{yx}-xy\cos y-z$

$\vec{\nabla}F=(ye^{yx}-y\cos y,\ xe^{xy}-x\cos y+xy\sin y,\ -1)$ ۰/۲۵

$\vec{\nabla}F(0,1,1)=(1-\cos 1,\ 0,\ -1)$ ۰/۲۵

خط قائم: $\begin{cases}x=(1-\cos 1)t\\ y=1\\ z=-t+1\end{cases}$ ۰/۲۵

صفحه مماس: $(1-\cos 1)x-z=-1$ ۰/۲۵

۳) $\begin{cases}f_x=3x^2-3y=0 \longrightarrow y=x^2\\ f_y=-3x+3y^2=0 \longrightarrow -x+x^4=0 \Rightarrow x(x^3-1)=0\end{cases}$ ۰/۲۵

$\longrightarrow \begin{cases}x=0 \longrightarrow y=0\\ x=1 \longrightarrow y=1\end{cases}$

تابع دو نقطه بحرانی $P_0(0,0)$ و $P_1(1,1)$ دارد ۰/۲۵

$f_{xx}=6x$ و $f_{xy}=-3,\ f_{yx}=-3,\ f_{yy}=6y$

$D=36xy-9 \rightarrow D(P_0)=-9 \rightarrow$ نقطه زینی است P_0 ۰/۲۵

$D(P_1)=36-9>0$ و $f_{xx}(P_1)=6>0$

پس نقطه P_0 مینیمم نسبی است ۰/۲۵

۴) $f(x,y)=x+y$ ۰/۲۵ $g(x,y)=xy=16$ ۰/۲۵

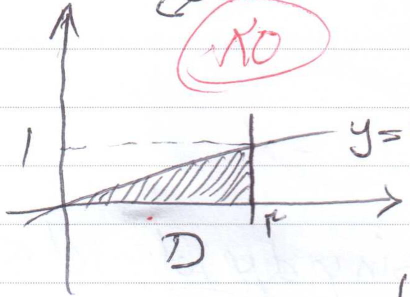
$\vec{\nabla}f=(1,1)\ ,\ \vec{\nabla}g=(y,x) \Rightarrow \vec{\nabla}f \parallel \vec{\nabla}g \Rightarrow \begin{cases}1=\lambda y \rightarrow y=\frac{1}{\lambda}\\ 1=\lambda x \rightarrow x=\frac{1}{\lambda}\\ xy=16\end{cases}$ ۰/۲۵

$\rightarrow \frac{1}{\lambda^2}=16 \Rightarrow \lambda=\pm\frac{1}{4} \Rightarrow x=y=4$ ۰/۲۵

۵) باید ترتیب انتگرال‌ها جابه‌جا شود

$$D=\begin{cases}0\le y\le 1\\ 3y\le x\le 3\end{cases}=\begin{cases}0\le x\le 3\\ 0\le y\le \frac{x}{3}\end{cases}$$

ساده افقی ۰/۲۵ — ساده عمودی ۰/۲۵

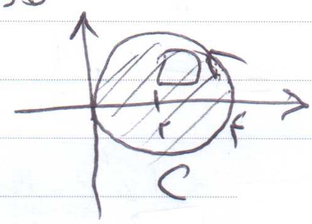


$$\Rightarrow \int_0^1\int_{3y}^{3} e^{x^2}\,dx\,dy=\int_0^3\left(\int_0^{\frac{x}{3}} e^{x^2}\,dy\right)dx$$ ۰/۲۵

$$=\int_0^3 y e^{x^2}\Big|_0^{\frac{x}{3}}\,dx=\int_0^3 \frac{x}{3}e^{x^2}\,dx$$ ۰/۲۵

$$=\frac{1}{6}e^{x^2}\Big|_0^3=\frac{1}{6}(e^9-1)$$

۶) $$x^2+y^2=4x \rightarrow (x-2)^2+y^2=4 \xrightarrow{\text{قطبی}} r=4\cos\theta$$



شرایط قضیه گرین برقرار است و

$$Q_x-P_y=(0+0+3x^2)-(-3y^2+0+0)$$
$$=3(x^2+y^2)$$ ۰/۲۵

بنابه قضیه گرین انتگرال داده شده برابر است با

$$\iint_D 3(x^2+y^2)\,dA=3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{4\cos\theta} r^3\,dr\right)d\theta=3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^4}{4}\Big|_0^{4\cos\theta}\,d\theta$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

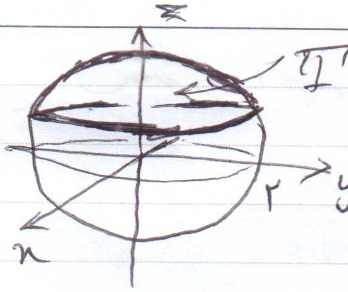
$$D=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le r\le 4\cos\theta\end{cases}$$ ۰/۲۵

$$=\frac{3}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(16)^2\cos^4\theta\,d\theta=12\times16\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)^2d\theta$$ ۰/۲۵

$$=96\int_0^{\frac{\pi}{2}}1+2\cos2\theta+\cos^2 2\theta\,d\theta=96\left(\theta+\sin2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos4\theta}{2}\,d\theta\right)$$

$$=96\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin4\theta}{8}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=96\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

۷) الف)



$$T=\begin{cases} 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}\\ \frac{1}{\cos\varphi}\le\rho\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$ ۰/۲۵

$x^2+y^2+z^2=4 \to \rho=2$

$z=1 \to \rho\cos\varphi=1 \Rightarrow \cos\varphi=\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{3}$ ۰/۲۵

$$\iiint_T \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\,dv=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2}\frac{\rho\cos\varphi}{\rho^2}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\right)d\varphi\right)d\theta$$ ۰/۲۵

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\varphi\sin\varphi\frac{\rho^2}{2}\Big|_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2}d\varphi=\frac{2\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\varphi\sin\varphi\left(4-\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)d\varphi$$ ۰/۲۵

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sin2\varphi-\tan\varphi)\,d\varphi=\pi\left(-\cos2\varphi+\ln|\cos\varphi|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\pi\left(+\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{1}{2}\right)+1-\ln1\right)=\pi\left(\frac{3}{2}-\ln2\right)$$

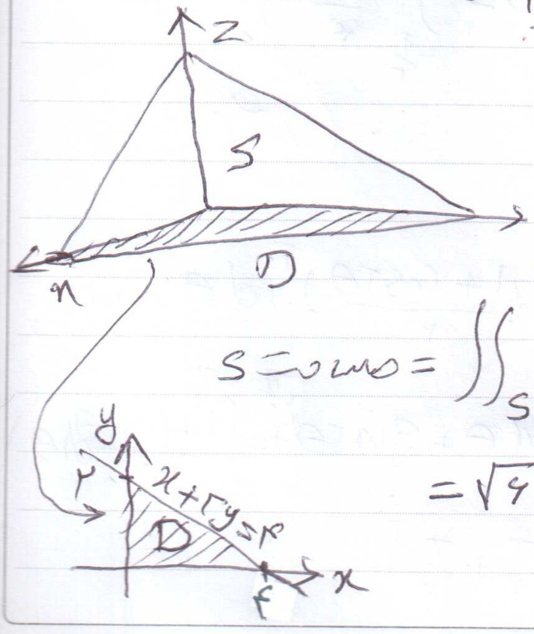
ب) شرایط قضیه گاوس برقرار است و ۰/۲۵

$$\operatorname{div}\vec{F}=-e^{-x}+e^{-x}+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$$ ۰/۲۵

بنا به قضیه گاوس

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iiint_T\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\,dv=2(\text{جواب قسمت الف})$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

۸)



$z=4-x-2y \quad , \quad (x,y)\in D$

$z_x=-1 \, , \, z_y=-2$ ۰/۲۵

$$S\ \text{مساحت}=\iint_S 1\,d\sigma=\iint_D 1\times\sqrt{1+1+4}\,dA=\sqrt{6}\iint_D 1\,dA$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$=\sqrt{6}\,(D\ \text{مساحت})=\sqrt{6}\left(\frac{1}{2}\times4\times2\right)=4\sqrt{6}$$ ۰/۲۵

۹) الف)

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x^2} \end{cases} \Rightarrow D^* = \begin{cases} 1 \le u \le 3 \\ 1 \le v \le 2 \end{cases}$$

۰/۲۵ ۰/۲۵

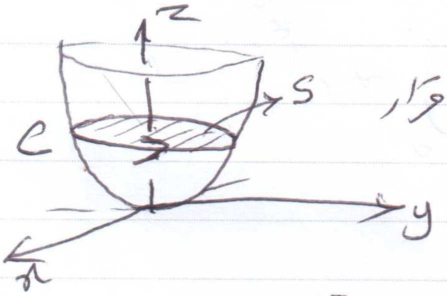
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{2y}{x^3} & \dfrac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{y}{x^2} + \frac{2y}{x^2} = 3\frac{y}{x^2} = 3v$$

$$\rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{3v}$$ ۰/۲۵

$$\Rightarrow \iint_D \sqrt{xy}\, dA = \iint_{D^*} (\sqrt{u})\left(\frac{1}{3v}\right) du\, dv = \int_1^3 \left(\int_1^2 \frac{\sqrt{u}}{3v} dv\right) du$$ ۰/۲۵

$$= \frac{1}{3}\int_1^3 \sqrt{u}\, du \int_1^2 \frac{dv}{v} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^3 (\ln v)\Big|_1^2$$ ۰/۲۵

$$= \frac{2}{9}(3\sqrt{3} - 1)\ln 2$$ ۰/۲۵



ب) اگر S را سطحی از صفحه z=۲ که درون سهمیگون قرار گرفته بگیریم تمام شرایط قضیه استوکس برقرار است ۰/۲۵

و با $\vec{n} = \vec{k}$ داریم

$$\operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+y & y & z \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$ ۰/۲۵

بنابه قضیه استوکس داریم:

$$\int_C (x+y)dx + y\,dy + z\,dz = \iint_S (-1)\, d\sigma = -(\text{مساحت } S)$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$= -(\pi \times 2) = -2\pi$$

$$\begin{cases} z = 2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵