۱) (۵ نمره)

$f(x,y)=x^2y+y^3-3y^2-x^2$

$f_x=2xy-2x=0$ (۰/۱)

$2x(y-1)=0$ ⟹ $x=0$ حالت ۱ (۰/۱) ، $y=1$ حالت ۲ (۰/۱)

$f_y=x^2+3y^2-6y=0 \quad (2)$ (۰/۱)

حالت ۱: $x=0 \Longrightarrow$ جایگذاری در (۲) $\quad 0+3y^2-6y=0 \Rightarrow 3y(y-2)=0$ ⟹ $y=0$ (۰/۱) $A\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ ، $y=2$ (۰/۱) $B\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$

حالت ۲: $y=1 \Longrightarrow$ جایگذاری در (۲) $\quad x^2+3-6=0 \Rightarrow x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$ (۰/۱) $C\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\1\end{bmatrix}$ (۰/۱) $E\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\1\end{bmatrix}$

$f_{xx}=2y-2 \qquad f_{xy}=f_{yx}=2x$ (۰/۱) $\qquad f_{yy}=6y-6$ (۰/۱)

تا اینجا ۱ نمره

$D(x,y)=\begin{vmatrix}2y-2 & 2x\\ 2x & 6y-6\end{vmatrix}=12(y-1)^2-4x^2$ (۰/۱) $\qquad D(0,0)=12>0$ A اکسترمم

$D(B)=D(0,2)=12>0$ B اکسترمم $\qquad D(-\sqrt{3},1)=-12=D(\sqrt{3},1)$ C و E زینی هستند.

$f_{xx}=2y-2 \Rightarrow f_{xx}(A)=-2<0$ A ماکزیمم نسبی (۰/۱) $\qquad f_{xx}(B)=4-2>0$ B مینیمم نسبی

$f(A)=0,\ f(B)=-4,\ f(C)=f(E)=-2$ (۰/۱)

(۰/۱) $A\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ ماکزیمم نسبی ، (۰/۱) $B\begin{bmatrix}0\\2\\-4\end{bmatrix}$ مینیمم نسبی ، $C(\sqrt{3},1,-2)$ و $E(-\sqrt{3},1,-2)$ زینی هستند.

---

۲) (۵ نمره)

$f(x,y,z)=e^{xz}+2\cos z\sin(\pi y)-2x^2+1=0 \qquad P_0(1,1,0)$

$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=ze^{xz}+0-4x$ (۰/۲۵) $\qquad f_y=0+2\pi\cos z\cos(\pi y)-0$ (۰/۲۵)

$f_z=xe^{xz}-2\sin z\sin(\pi y)$ (۰/۲۵) $\qquad \nabla f=(f_x,f_y,f_z)$ (۰/۲۵)

$\nabla f(P_0)=\nabla f(1,1,0)=(\underset{a}{-4},\underset{b}{-2\pi},\underset{c}{1})$ (۰/۲۵) معادله صفحه $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$\boxed{-4(x-1)-2\pi(y-1)+(z-0)=0}$ (۰/۲۵) معادله صفحه مماس

---

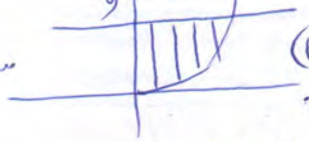
۳) (۰/۱) $z=f(u,v) \ ، \ u=x+y \ ، \ v=x-y$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v} \quad (1)$ (۰/۲۵) (۰/۱) (۰/۱)

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v} \quad (2)$ (۰/۱) (۰/۱)

$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=(1)\times(2)=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$ (۰/۲۵) (۰/۱)

۱۴ ۶٫۲



ناحیه عمودی ①

$I=\int_0^3\int_{x^2}^{9} x\cos y^2\,dy\,dx$ ناحیه عمودی ⟸ تبدیل به ناحیه افقی

ناحیه عمودی $(x^2\leq y\leq 9,\quad 0\leq x\leq 3)$ ۰/۲۵

ناحیه افقی ۰/۲۵ $(\ 0\leq x\leq \sqrt{y}\ ,\quad 0\leq y\leq 9)$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$I=\int_0^9\left(\int_0^{\sqrt{y}} x\cos y^2\,dx\right)dy=\int_0^9 \frac{x^2}{2}\cos y^2\Big]_{x=0}^{x=\sqrt{y}}dy$$

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$=\int_0^9\frac{1}{2}\,y\cos y^2\,dy=\frac{1}{4}\sin y^2\Big]_0^9=\boxed{\frac{1}{4}\sin(81)}$$

۰/۲۵

۱/۵ ۰

$$P=xe^{x^2+y^2}+x^2\ln(1+y^3)+2y$$

$$Q=ye^{x^2+y^2}+\frac{y^2x^3}{1+y^3}+\tan^{-1}y^2\implies$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2xye^{x^2+y^2}+\frac{3x^2y^2}{1+y^3}$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

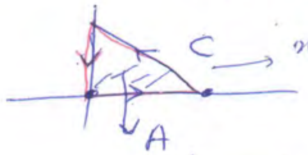
$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xye^{x^2+y^2}+x^2\frac{(1+y^3)'_y}{1+y^3}+2=2xye^{x^2+y^2}+\frac{3x^2y^2}{1+y^3}+2$$ ۰/۲۵

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2$$ ۰/۲۵

قضیه گرین ۱ نمره

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy=\iint_A\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_A -2\,dx\,dy$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$=-2(\text{مساحت ناحیه } A)=-2\left(\frac{1}{2}\right)=-1$$ ۰/۲۵



$C \to x+y=1$, A

$$\text{مساحت مثلث}=\int_0^1\int_0^{1-x}1\,dy\,dx=\int_0^1(1-x)\,dx=x-\frac{x^2}{2}\Big]_0^1=\frac{1}{2}$$

$$\text{یا مساحت مثلث}=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$$

---

۱۶ ۱/۵ نمره

$$\text{مساحت مخروط}=\iint_S 1\,d\sigma=\iint_{R_{xy}}\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\,dx\,dy$$ ۰/۲۵

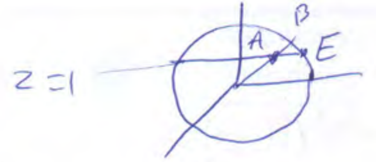
$R_{xy}:\ x^2+y^2=2y$ داخل دایره

قطبی $0\leq r\leq 2\sin\theta,\ 0\leq\theta\leq\pi$

$$z_x=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\qquad z_y=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\qquad \sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}=\sqrt{2}$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\text{مساحت مخروط}=\iint_S 1\,d\sigma=\iint_{R_{xy}}\sqrt{2}\,dx\,dy=\sqrt{2}(\text{مساحت }R_{xy})=\sqrt{2}(\text{مساحت دایره به شعاع ۱})=\boxed{\sqrt{2}\pi}$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\text{مساحت دایره}=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}r\,dr\,d\theta=\pi$$



(۷ نقطه ... کره A ورودی صفحه $z=1$

الف) ۱/۵

$\rho_A \le \rho \le \rho_B$

$\rho\cos\varphi = 1 \Rightarrow \rho_A = \dfrac{1}{\cos\varphi}$ ۰/۲۵

$\rho_B = 2$ شعاع کره

$0 \le \varphi \le \varphi_E \Rightarrow$ E تقاطع صفحه و کره

$z=1$
$x^2+y^2+z^2=4 \Rightarrow \rho\cos\varphi = 1$
$\rho = 2 \Rightarrow 2\cos\varphi = 1$

$\cos\varphi = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{3}$ ۰/۲۵

تصویر دایره کامل $0 \le \theta \le 2\pi$

$$D^*: \begin{cases} \dfrac{1}{\cos\varphi} \le \rho \le 2 \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \quad , 0 \le \theta \le 2\pi \ \ 0/1 \qquad J = \rho^2\sin\varphi \ \ 0/25$$

$$\text{حجم کره} = \iiint_D 1\, dv \ (0/2) = \iiint_{D^*} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \ (0/2)$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\rho^3}{3}\sin\varphi \Big]_{\rho=\frac{1}{\cos\varphi}}^{2} d\varphi = 2\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{8}{3}\sin\varphi - \frac{\sin\varphi}{3\cos^3\varphi}\right)d\varphi\right)$$

0/25

$$= 2\pi\left(-\frac{8}{3}\cos\varphi + \frac{1}{3\times 2\cos^2\varphi}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\pi\left(-\frac{4}{3} + \frac{1}{6\times\frac{1}{4}} + \frac{8}{3} - \frac{1}{6}\right) = 2\pi\left(\frac{11}{6}\right)$$

$$= \boxed{\frac{11\pi}{3}}$$

ب) شار ۱

$$\text{شار میدان F روی رویه S} \Leftarrow \text{قضیه دیورژانس} \quad = \iiint_D \operatorname{div}(F)\, dv \ \ (0/25) \quad F = (\underset{P}{2x}, \underset{Q}{y+e^{z^2}}, \underset{R}{z})$$

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2+1+1 = 4 \ \ (0/25)$$

$$\text{شار} = \iiint_D 4\, dv \ (0/25) = 4(\text{حجم ناحیه } D) \ (0/25) = 4 \times \frac{11\pi}{3} = \boxed{\frac{44\pi}{3}}$$

(۸ الف) ۲ نمره

$v = \dfrac{y}{x}$ ۰/۲۵ ، $u = xy$ ۰/۲۵

$$D^*: \begin{cases} 1 \le u \le 3 \\ 1 \le v \le 2 \end{cases} \ (0/25)$$
مستطیل

$$\iint_D \left(\frac{y}{x}\right)^2 dx\,dy = \iint_{D^*} v^2 |J|\, du\, dv \ \ (0/25)$$

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|} \ (0/25) = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{vmatrix}} \ (0/25) = \frac{1}{\frac{y}{x}+\frac{y}{x}} = \frac{1}{2\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{1}{2v} \ (0/25)$$

$$= \iint_{D^*} v^2 \frac{1}{2v}\, du\, dv = \int_1^3\int_1^2 \frac{1}{2} v\, dv\, du = \frac{1}{2}\left(\int_1^3 du\right)\left(\int_1^2 v\, dv\right)$$

$$= \frac{1}{2}(3-1)\left(\frac{v^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\times 2\times\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{3}{2}} \ (0/25)$$

۸ب)

$$\operatorname{curl}(F)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+3z & x+2z & 3x+2y \end{vmatrix}$$ ۰/۲۵

$$=\left(\frac{\partial}{\partial y}(3x+2y)-\frac{\partial}{\partial z}(x+2z)\right)\vec{i}-j\left(\frac{\partial}{\partial x}(3x+2y)-\frac{\partial}{\partial z}(y+3z)\right)$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$+k\left(\frac{\partial}{\partial x}(x+2z)-\frac{\partial}{\partial y}(y+3z)\right)=(2-2)i-j(3-3)+k(1-1)$$ ۰/۲۵

$$=(0,0,0)=\vec{0} \qquad \operatorname{curl}(F)=\vec{0}$$ ۰/۲۵

قضیه استوکس

$$\oint_C F\cdot dr=\iint_S \operatorname{curl}(F)\cdot n\, d\sigma=\iint_S \vec{0}\, d\sigma=0$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

راه دوم: F میدان گرادیان است، منحنی ساده بسته $\Leftarrow$ ۰/۲۵

$$\oint_C F\cdot dr=0$$ ۰/۵