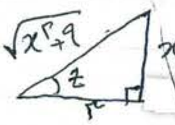
۱) الف)

$x = 3\tan t$ /۲۵ $\to dx = 3\sec^2 t\, dt$ /۲۵

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}} = \int \frac{3\sec^2 t\, dt}{9\tan^2 t\sqrt{9\tan^2 t+9}} = \frac{1}{9}\int \frac{\sec t}{\tan^2 t}\, dt = \frac{1}{9}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\, dt$$ /۲۵

$$= -\frac{1}{9}\left(\frac{1}{\sin t}\right) + C = -\frac{9\sqrt{x^2+9}}{x} + C$$ /۲۵ /۲۵

$\tan t = \frac{x}{3}$:



$\to \sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ /۲۵

ب) $u = \tan^{-1}x,\ dv = x^2 dx$ /۲۵ $\to du = \frac{dx}{1+x^2},\ v = \frac{x^3}{3}$ /۲۵

$$\Rightarrow \int x^2\tan^{-1}x\, dx = \frac{x^3}{3}\tan^{-1}x - \int \frac{x^3}{3}\frac{dx}{1+x^2}$$ /۲۵

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+1 \\ \hline -(x^3+x) & x \\ -x & \end{array}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$ /۲۵ /۲۵

$$\Rightarrow \int x^2\tan^{-1}x\, dx = \frac{x^3}{3}\tan^{-1}x - \frac{x^2}{6} + \frac{\ln(1+x^2)}{6} + C$$

---

۲) انتگرال ناسره است چون $\frac{1}{1+\sin x}$ در نقطه $\frac{3\pi}{2}$ تعریف نشده است

ابتدا: $\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{2\,dz}{1+z^2+2z} = 2\int \frac{dz}{(z+1)^2}$ /۲۵

/۲۵ $\tan\frac{x}{2} = z$

$$= -\frac{2}{z+1} = \frac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}}$$ /۲۵

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x} = \lim_{b\to\frac{3\pi}{2}} \int_0^b \frac{dx}{1+\sin x} = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \frac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}}\Big|_0^b$$ /۲۵

$$= \lim_{b\to\frac{3\pi}{2}} \frac{-2}{1+\tan\frac{b}{2}} + 2 = \infty$$ /۲۵ واگراست

ج) $$\frac{x+5}{x^2(x^2-4x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2-4x+5}$$ /۲۵

$x+5 = Ax(x^2-4x+5) + B(x^2-4x+5) + (Cx+D)x^2 \to A=B=1,\ C=-1,\ D=3$

لزومی به محاسبه این اعداد نیست.

$$I(x)=\int \frac{x+5}{x^2(x^2-4x+5)}dx = A\int\frac{dx}{x} + B\int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{Cx+D}{x^2-4x+5}dx$$ ۰/۲۵

$$\int\frac{Cx+D}{x^2-4x+5}dx = \int\frac{Cx-2C+2C+D}{x^2-4x+5}dx = \int\frac{Cx-2C}{x^2-4x+5}dx + (D+2C)\int\frac{dx}{x^2-4x+5}$$ ۰/۲۵

$$= \frac{C}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx + (D+2C)\int\frac{dx}{x^2-4x+4+1}$$

$$= \frac{C}{2}\ln(x^2-4x+5) + (D+2C)\int\frac{dx}{(x-2)^2+1}$$

$$= \frac{C}{2}\ln(x^2-4x+5) + (D+2C)\tan^{-1}(x-2)$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

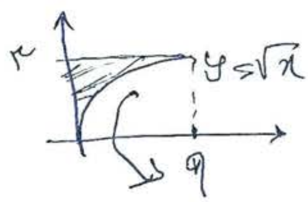
$$\Rightarrow I(x) = A\ln x - \frac{B}{x} + \frac{C}{2}\ln(x^2-4x+5) + (D+2C)\tan^{-1}(x-2)+K$$

اگر ضرایب را محاسبه کرده باشیم:

$$I(x) = \ln x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5) + \tan^{-1}(x-2)+K$$

---

۲) قرص مستدیر:



۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\text{حجم} = \pi\int_0^9 (9-(\sqrt{x})^2)\,dx$$

$$= \pi\int_0^9 (9-x)\,dx = \pi\left(9x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^9$$

$$= \pi\left(81-\frac{81}{2}\right) = \frac{81}{2}\pi$$ ۰/۲۵

پوسته استوانه ای:

۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\text{حجم} = \int_0^3 2\pi y(y^2)\,dy = 2\pi\frac{y^4}{4}\Big|_0^3 = \frac{2\pi(81-0)}{4}$$

$$= \frac{81}{2}\pi$$ ۰/۲۵

---

۳)

$$L = \lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln L = \lim_{x\to 0}\ln(1-2x)^{\frac{1}{x}}$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1-2x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2}{1-2x}}{1} = -2$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$\Rightarrow \ln L = -2 \Rightarrow L = e^{-2}$ /۲۵

---

۴) $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{2^n(4n+5)}}{\dfrac{1}{2^{n+1}(4(n+1)+5)}}$ /۲۵ /۲۵

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2(4n+9)}{4n+5} = 2$ /۲۵

حدود بازه همگرایی $a = 3-2 = 1$, $b = 3+2 = 5$ است /۲۵

$\underline{a=1}$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-2)^n}{2^n(4n+5)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(4n+5)}$

سری متناوب است با $a_n = \dfrac{1}{4n+5}$ نزولی و $a_n \to 0$ پس طبق آزمون سری متناوب همگرا است. /۲۵

$\underline{b=5}$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{2^n(4n+5)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{4n+5}$

واگرا است چون:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{4n+5}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{4n+5} = \dfrac{1}{4} \to$ طبق آزمون مقایسه حدی

چون $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ واگراست /۲۵

پس بازه همگرایی برابر $[1,5)$ است.

---

۵) $y = (\sin x)^{x^2+3} \to \ln y = \ln((\sin x)^{x^2+3}) = (x^2+3)\ln(\sin x)$ /۲۵ /۲۵

$\to \dfrac{y'}{y} = 2x\ln(\sin x) + (x^2+3)\dfrac{\cos x}{\sin x}$ /۲۵

$\to y' = [2x\ln(\sin x) + (x^2+3)\cot x]\, y$ /۲۵

با استفاده از حاصل مشتق $f(x)^{g(x)}$ بارم‌بندی مشابه

---

۶) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$ /۲۵

آزمون نسبت : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{3n} = \dfrac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ سری همگرای مطلق است /۲۵ /۲۵ /۲۵

۷) بسط مکلورن (تیلور حول $x_0=0$) سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ است که باید

$f^{(n)}(0)$ را برای $n=0$ و ۱ و ... حساب کنیم /۲۵

$$\left.\begin{aligned}
f(0) &= \sin x\big|_{x=0} = \sin 0 = 0\\
f'(0) &= \cos x\big|_{x=0} = \cos 0 = 1\\
f''(0) &= -\sin x\big|_{x=0} = -\sin 0 = 0\\
f'''(0) &= -\cos x\big|_{x=0} = -\cos 0 = -1\\
f^{(4)}(0) &= -\sin x\big|_{x=0} = -\sin 0 = 0 \quad /۲۵\\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \sin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

/۲۵

$$\int \frac{\sin(x^4)}{x^2}dx = \int \frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(x^4)^{2k+1}dx \quad /۲۵$$

$$= \int \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{8k+4-2}dx \quad /۲۵$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\int x^{8k+2}dx\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot\frac{x^{8k+3}}{8k+3}+C$$

/۲۵

---

۸) با توجه به حد:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+1}{3x^2+5}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{3x^2+5} = \frac{2}{3}$$

/۲۵ /۲۵

و آزمون مقایسه حدی چون $\int^{\infty}\frac{dx}{x}$ واگراست انتگرال داده‌شده نیز /۲۵

واگرا است.

/۲۵