۱) ۱/۵ نمره

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}=f_x\times 1+f_y\times 0+f_z\times(-1)$$

۰/۲۵ ۰/۲۵ (مثال صفحه ۹۷ کتاب)

$$=f_x-f_z$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}=f_x\times(-1)+f_y\times 1+f_z\times 0$$

۰/۲۵ ۰/۲۵

$$=-f_x+f_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}=f_x\times 0+f_y\times(-1)+f_z\times 1$$

۰/۲۵

$$=-f_y+f_z$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial t}=\cancel{f_x}-\cancel{f_z}-\cancel{f_x}+\cancel{f_y}-\cancel{f_y}+\cancel{f_z}=0$$

۰/۲۵

---

۲) الف - اگر $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3$ آنگاه برای $P_0(1,-1,-1)$ ۱/۵

$$\vec{\nabla}F=(2x,2y,2z)\rightarrow \vec{\nabla}F(P_0)=(2,-2,-2)$$

۰/۲۵ ۰/۲۵

معادله صفحه مماس:

$$2x-2y-2z=2\times 1+(-2)(-1)+(-2)(-1)$$

فرمول ۰/۲۵ جایگذاری ۰/۲۵

$$2x-2y-2z=6\rightarrow x-y-z=3$$

۰/۲۵

ب - باید فاصله نقطه (x,y,z) را تا $P_1(1,0,0)$ ماکزیمم کنیم فاصله این دو نقطه: ۱/۵

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}$$ ۰/۲۵

بنابراین کافی است تابع $f(x,y,z)=(x-1)^2+y^2+z^2$ را به شرط آنکه نقطه روی کره باشد ۰/۲۵

ماکزیمم کنیم یعنی تابع شرط $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3$ نقاط بحرانی مقید: ۰/۲۵

$$\vec{\nabla}f=(2(x-1),2y,2z)$$

$$\vec{\nabla}g=(2x,2y,2z) \rightarrow$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

(۱) $2(x-1)=2\lambda x$ ۰/۲۵

(۲) $2y=2\lambda y\rightarrow y=0$ یا $\lambda=1$

(۳) $2z=2\lambda z\rightarrow z=0$ یا $\lambda=1$

(۴) $x^2+y^2+z^2=3$

تا اینجا ۱ نمره

با توجه به (۲) و (۳) چهار حالت داریم:

1) $z=0,\ y=0\xrightarrow{(4)}x^2=3\rightarrow x=\pm\sqrt{3}\rightarrow P_2(\sqrt{3},0,0)$ و $P_3(-\sqrt{3},0,0)$ ۰/۲۵

۲) $y=0\ ,\ \lambda=1 \xrightarrow{①} 2x-2=2x \rightarrow -2=0$ ✗

۳) $z=0\ ,\ \lambda=1 \xrightarrow{①} 2x-2=2x \rightarrow -2=0$ ✗

۴) $\lambda=1\ ,\ \lambda=1 \xrightarrow{①} 2x-2=2x \rightarrow -2=0$ ✗

$f(P_2)=(\sqrt{3}-1)^2=3-2\sqrt{3}+1=4-2\sqrt{3} \leftarrow \min$ ۰/۲۵

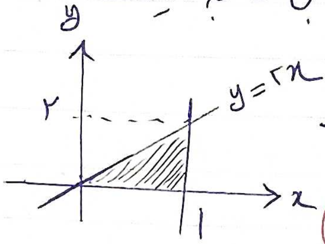
$f(P_3)=(-\sqrt{3}-1)^2=3+2\sqrt{3}+1=4+2\sqrt{3} \leftarrow \max \leftarrow$ دورترین نقطه

(تمرین ۷ صفحه ۱۴۳)

۳) انتگرال با ترتیب داده شده قابل محاسبه نیست. ۱/۵

$$D=\begin{cases} 0\le y\le 2 \\ \frac{y}{2}\le x\le 1 \end{cases} \longrightarrow$$

ساده افقی ۰/۲۵



۰/۲۵

$$\longrightarrow D=\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 2x \end{cases}$$

ساده عمودی ۰/۲۵

$$\text{انتگرال داده شده} = \int_0^1\left(\int_0^{2x}\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dy\right)dx = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)y\Big|_0^{2x}dx$$

۰/۲۵ ۰/۲۵

$$=\int_0^1 2x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \pi x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}(1-0)=\frac{2}{\pi}$$

۰/۲۵

(تمرین ۷ صفحه ۲۲۱)

۴) مسئله داده شده در شرایط قضیه گرین صدق می‌کند و ۱/۵

$Q_x-P_y=7-3=4$ ۰/۲۵

۰/۲۵ بنابر قضیه گرین انتگرال داده شده برابر است با:

$\iint_D 4\,dA$ ۰/۲۵

۱/۷۵ نمره

این انتگرال را به کمک تغییر متغیر قطبی حل می‌کنیم

٪۷۵ برای قطبی

$$\begin{cases} x^2+y^2=4y \longrightarrow r=4\sin\theta \\ x^2+y^2=4 \longrightarrow r=2 \end{cases} \longrightarrow 2=4\sin\theta \to \sin\theta=\frac{1}{2}$$

$$\to \theta=\frac{\pi}{6} \text{ و } \frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow D=\begin{cases} \frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{5\pi}{6} \\ 2\le r\le 4\sin\theta \end{cases}$$ ٪۲۵

$$\to \iint_D 4\,dA = 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(\int_2^{4\sin\theta} r\,dr\right)d\theta = 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{r^2}{2}\Big|_2^{4\sin\theta} d\theta$$ ٪۲۵

$$=\frac{4}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(16\sin^2\theta-4)\,d\theta = 8\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(4\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)-1\right)d\theta$$ ٪۲۵

$$=8\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(2-2\cos 2\theta-1)\,d\theta = 8(\theta-\sin 2\theta)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$$

$$=\frac{16\pi}{3}+8\sqrt{3}$$

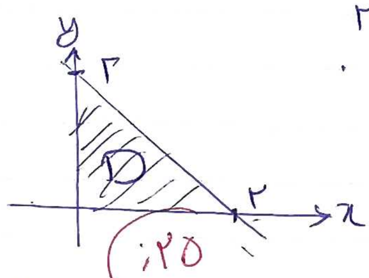
---

۵) مساله داده شده محاسبه مساحت قسمتی از رویه

۱/۵

$$S: z=\frac{2-x-y}{2}$$ ٪۲۵

است که بالای ناحیه زیر قرار دارد.

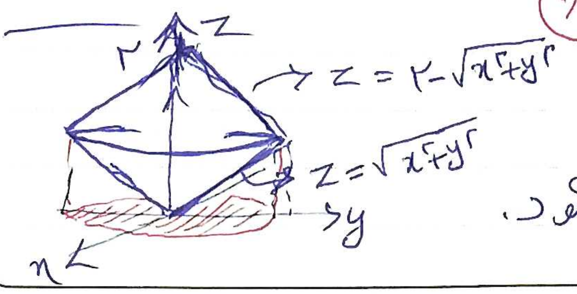


٪۲۵

$$\to z_x=-\frac{1}{2} \text{ و } z_y=-\frac{1}{2}$$ ٪۲۵

$$\text{مساحت رویه } S = \iint_S 1\,d\sigma = \iint_D 1\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\,dx\,dy = \sqrt{\frac{3}{2}}\iint_D 1\,dx\,dy$$ ٪۲۵

$$=\sqrt{\frac{3}{2}}\,(\text{مساحت مثلث } D) = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}\times 2\times 2\right) = 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6}$$ ٪۲۵ ٪۲۵



۶) الف) ناحیه z-ساده است، بهتر است که حدود ناحیه در مختصات استوانه‌ای نوشته شود.

۱/۵

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow \begin{cases} z=r \\ z=2-r \end{cases} \longrightarrow r=2-r \longrightarrow 2r=2 \longrightarrow r=1$$

$$z=2-\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow z=2-r$$

۰/۲۵

$$\longrightarrow T=\begin{cases} 0\leq\theta\leq 2\pi \\ 0\leq r\leq 1 \\ r\leq z\leq 2-r \end{cases}$$

۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\longrightarrow \iint_T y\,dv=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{2-r} r\sin\theta\times r\,dz\,dr\,d\theta$$

۰/۲۵

$$=\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^1\left(r^2\int_r^{2-r}dz\right)dr$$

۰/۲۵

$$=\left(-\cos\theta\Big|_0^{2\pi}\right)\int_0^1 r^2\big((2-r)-r\big)\,dr=0$$

۰/۲۵

ب) شرایط قضیه گاوس برقرار است و

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\sin z+2y-\sin z=2y$$

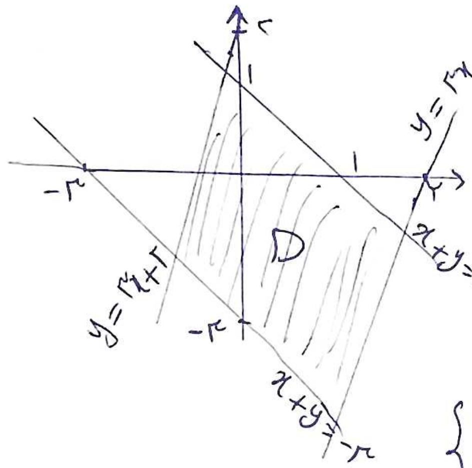
۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

پس بنابه قضیه گاوس داریم

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iiint_T 2y\,dv=0 \longleftarrow$$ قسمت الف

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

۲) الف) ۲ نمره



D مساحت $= \iint_D 1 \, dx\,dy$ ۰٫۲۵

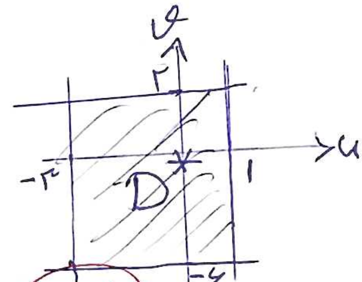
D ناحیه‌ای پیچیده است برای حل این انتگرال از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = y-3x \end{cases} \to \begin{cases} x = \frac{u-v}{4} \\ y = \frac{v+3u}{4} \end{cases}$$

۰٫۲۵ ۰٫۲۵

$x+y=1 \to u=1$ و $x+y=-3 \to u=-3$

$y=3x+2 \to v=2$, و $y=3x-6 \to v=-6$ $\to$



۰٫۲۵

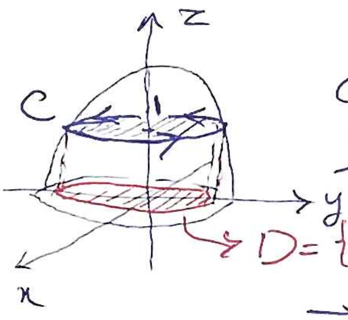
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

۰٫۲۵ ۰٫۲۵

D مساحت $= \iint_{D^*} 1 \times \frac{1}{4}\, du\,dv = \frac{1}{4} \iint_{D^*} 1\, du\,dv$ ۰٫۲۵

$= \frac{1}{4}(D^*$ مساحت$) = \frac{1}{4}(4 \times 8) = 8$ ۰٫۲۵

ب) ۲ نمره



اگر S را قسمتی از صفحه $z=1$ بگیریم که درون سهمیگون قرار گرفته است تمام شرایط قضیه استوکس برقرار است و

$D = \{(r,\theta) : r \le 1\}$

و $\vec{n} = \vec{k} = (0,0,1)$

$$\text{curl}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & y\sin x \end{vmatrix} = (\sin x - 0, -(y\cos x - 0), 3x^2+3y^2)$$

۰٫۲۵ ۰٫۲۵ ۰٫۲۵

$\to \text{curl}\vec{F} \cdot \vec{n} = 3(x^2+y^2)$ ۰٫۲۵

بنابراین انتگرال داده شده برابر است با:

$$\iint_S 3(x^2+y^2)\, d\sigma = 3 \iint_D (x^2+y^2)\sqrt{1+0^2+0^2}\, dx\,dy = 3\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^3\, dr\right) d\theta$$

۰٫۲۵ ۰٫۲۵ ۰٫۲۵