۱) الف)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-3e^{-3x}}{e^{-3x}+e^{-3y}} \quad (۰/۲۵) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-3e^{-3y}}{e^{-3x}+e^{-3y}} \quad (۰/۲۵)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-3e^{-3x}}{e^{-3x}+e^{-3y}}+\frac{-3e^{-3y}}{e^{-3x}+e^{-3y}}=\frac{-3(e^{-3x}+e^{-3y})}{e^{-3x}+e^{-3y}}=-3$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

ب) بیشترین تغییرات یک تابع در راستای بردار گرادیان اتفاق می‌افتد (۰/۲۵)

$$\vec{\nabla} f(P_0)=(f_x(P_0), f_y(P_0))=\left(\frac{-3e^{-3x_0}}{e^{-3x_0}+e^{-3x_0}}, \frac{-3e^{-3x_0}}{e^{-3x_0}+e^{-3x_0}}\right)$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$=\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

(۰/۲۵)

۲) الف) نقاط بحرانی f

$$\begin{cases} f_x=2y+4-4x=0 \to y=2x-2 \\ f_y=2x-10y+4=0 \end{cases} \to 2x-20x+20+4=0 \to -18x=-24$$

(۰/۲۵)

$$\to x=\frac{4}{3}, \quad y=\frac{2}{3}$$

(۰/۲۵)

تنها نقطه بحرانی $P(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ است (۰/۲۵)

$$\Delta(P)=\begin{vmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -10 \end{vmatrix}=36>0$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

پس P ماکزیمم نسبی است. (۰/۲۵)

ب) $g(x,y)=x+y$ ، $\vec{\nabla} g=(1,1)$ باید (۰/۲۵)

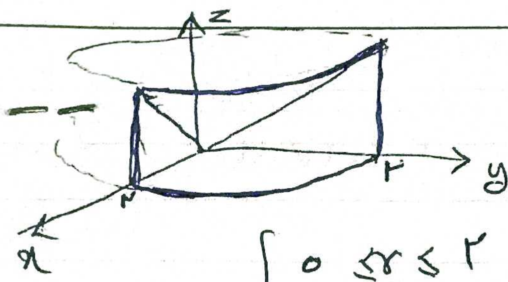
$$\vec{\nabla} f=\lambda\vec{\nabla} g \to \begin{cases} (1)\ 2y+4-4x=\lambda \\ (2)\ 2x-10y+4=\lambda \\ (3)\ x+y=1 \end{cases} \to 2y+\cancel{4}-4x=2x-10y+\cancel{4} \to 12y=6x \to x=2y$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$x=2y \xrightarrow{(3)} 2y+y=1 \to y=\frac{1}{3}, \quad x=\frac{2}{3} \to P\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

نقطه بحرانی مقید

(۰/۲۵)



۵) با توجه به ناحیه و تابع زیر انتگرال باید از تغییر متغیر استوانه‌ای استفاده شود

$$\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le z \le 2r \end{cases} \Rightarrow \iiint_T \sqrt{x^2+y^2}\,dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2}\left(\int_0^{2r} r^2\,dz\right)dr\right)d\theta$$

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$z = 2\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow z = 2r$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2} r^2 z\Big|_0^{2r} dr = \left(\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\int_0^{2} r^2(2r-0)\,dr$$

۰/۲۵ ۰/۲۵

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{2} 2r^3\,dr = \pi\,\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2} = \pi\left(\frac{16}{4}-0\right) = 4\pi$$

۰/۲۵

۶) منحنی و میدان داده شده در شرایط قضیه گرین صدق می‌کند ۰/۲۵

$$Q_x - P_y = 2x + e^x - e^x = 2x$$ ۰/۲۵

بنابراین بنا به قضیه گرین انتگرال داده شده برابر است با

$$I = \iint_D 2x\,dA$$ ۰/۲۵

که در آن D ناحیه محصور به منحنی است D در مختصات قطبی:

$$D = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2\sin\theta \end{cases}$$ ۰/۲۵

$$x^2+y^2 = 2y \rightarrow r = 2\sin\theta$$ ۰/۲۵

$$x = y \rightarrow r\cos\theta = r\sin\theta \rightarrow \tan\theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow I = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\sin\theta} r^2\cos\theta\,dr\right)d\theta = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,\frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\sin\theta} d\theta$$

۰/۲۵

$$= \frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 8\sin^3\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{4}{3}\sin^4\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right) = 1$$

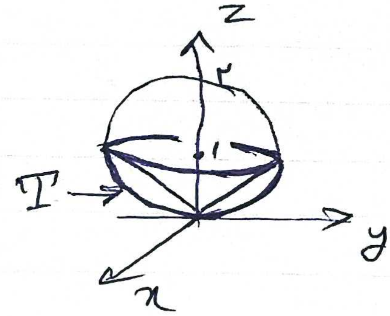
۰/۲۵ ۰/۲۵

۷) رویه و میدان داده شده در شرایط قضیه گوس صدق می کنند و ۰/۲۵

$$\operatorname{div}\vec{F} = 3e^{3y} - 3e^{3y} + 2z = 2z$$ ۰/۲۵

بنابراین با استفاده از قضیه گاوس داریم

$$I = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \iiint_T 2z\, dv$$ ۰/۲۵



$$x^2+y^2+z^2 = 2z \rightarrow \rho = 2\cos\varphi$$

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \rho\cos\varphi = \rho\sin\varphi$$ ۰/۲۵

$$\rightarrow \tan\varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

حدود کروی ناحیه →
$$\begin{cases} 0 \le \rho \le 2\cos\varphi \\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$ ۰/۲۵
$$\rightarrow I = 2\int_0^{2\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos\varphi} \rho^3 \cos\varphi \sin\varphi\, d\rho\right) d\varphi\right) d\theta$$ ۰/۲۵

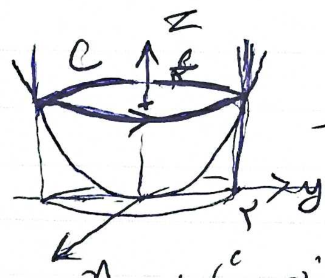
$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{2\cos\varphi} d\varphi$$ ۰/۲۵

$$= \frac{2}{4}(\theta)\Big|_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 16\cos^5\varphi \sin\varphi\, d\varphi$$ ۰/۲۵

$$= -\frac{8}{3}\pi \cos^6\varphi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{8}{3}\pi\left(0 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6\right) = \frac{\pi}{3}$$

۰/۲۵

۸) اگر S را قسمتی از صفحه $z=4$ بگیریم که درون دو رویه سهمی‌گون و استوانه قرار دارد بگیریم به سادگی دیده می‌شود که C مرز S است و تمام شرایط لازم قضیه استوکس برای آنها برقرار است همچنین مؤلفه میدان داده شده در ناحیه شامل S و مرز آن مشتق جزئی پیوسته دارند و $\vec{n} = (0,0,1)$ قائم S و ۰/۲۵



$$\operatorname{curl}\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2z^2 & y^2z^2 & xyz \end{vmatrix} = (xz - 2y^2z,\ -xz - 2x^2z,\ 0)$$ ۰/۲۵

-- $\longrightarrow \mathrm{curl}\vec{F}\cdot\vec{n} = 0$ ۲۵

بنابه قضیه استوکس

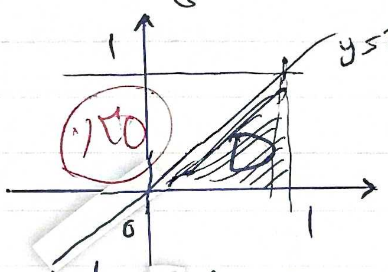
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \mathrm{curl}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = 0$$

۳) باید ترتیب انتگرال‌ها عوض شود

/۲۵

$$D=\begin{cases}0\le y\le 1\\ y\le x\le 1\end{cases}=\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le x\end{cases}$$ /۲۵

ساده افقی — ساده عمودی



/۲۵

$$\int_0^1\int_y^1 x e^{x^3}\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^x x e^{x^3}\,dy\right)dx$$ /۲۵

$$=\int_0^1 x e^{x^3}y\Big|_0^x\,dx=\int_0^1 x e^{x^3}(x-0)\,dx=\int_0^1 x^2 e^{x^3}\,dx$$ /۲۵

$$=\frac{1}{3}e^{x^3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}(e-1)$$ /۲۵

۴) اگر D ناحیه مورد نظر باشد باید $\iint_D 1\,dA$ محاسبه شود به دلیل پیچیدگی ناحیه از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم /۲۵

$$\begin{cases}u=\dfrac{x}{y^3}\\ v=\dfrac{y}{x^3}\end{cases}$$ /۲۵ $$\longrightarrow D^*=\{(u,v):\ 1\le u\le 4,\ 1\le v\le 2\}$$ /۲۵

$$uv=\frac{1}{x^2y^2}\ \Rightarrow\ xy=\frac{1}{\sqrt{uv}}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}\frac{1}{y^3} & -\frac{3x}{y^4}\\ -\frac{3y}{x^4} & \frac{1}{x^3}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\frac{1}{x^3y^3}-\frac{9}{x^3y^3}}$$

$$=-\frac{x^3y^3}{8}=-\frac{1}{8}\frac{1}{(\sqrt{uv})^3}$$ /۲۵

$$\rightarrow \iint_D 1\,dA=\frac{1}{8}\int_1^4\left(\int_1^2\frac{1}{(\sqrt{uv})^3}\,dv\right)du=\frac{1}{8}\int_1^4 u^{-\frac{3}{2}}du\int_1^2 v^{-\frac{3}{2}}dv$$ /۲۵

$$=\frac{1}{8}\left(-2u^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^4\left(-2v^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^2$$ /۲۵

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{4\sqrt{2}}$$