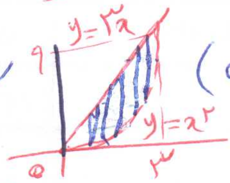
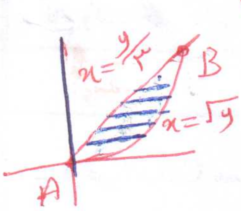
۱) حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین $y=x^2$ و $y=3x$ را حول محور yها بیابید (۱/۵ نمره)



روش پوسته برحسب x (راه اول)
(المان موازی محور دوران)



روش حلقه برحسب y (راه دوم)
(المان عمود بر محور دوران)

تقاطع $A\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix}$

راه اول: روش پوسته انتگرال برحسب x (۰/۲۵)

$0<x<3$ (۰/۲۵)

$$V=2\pi\int_a^b x\,(f_2(x)-f_1(x))\,dx$$ (۰/۲۵)

$$V=\int_0^3 x(3x-x^2)\,dx=2\pi\int_0^3(3x^2-x^3)\,dx=2\pi\left(x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^3=2\pi\left(27-\frac{81}{4}\right)$$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$=\boxed{\frac{27}{2}\pi}$$

راه دوم: حلقه برحسب y (۰/۲۵)

$$V=\pi\int_c^d (g_2(y))^2-(g_1(y))^2\,dy$$ (۰/۲۵)

$$V=\pi\int_0^9\left((\sqrt{y})^2-\left(\frac{y}{3}\right)^2\right)dy=\pi\int_0^9\left(y-\frac{y^2}{9}\right)dy=\pi\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{27}\right]_0^9$$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$=\pi\left(\frac{81}{2}-9\times\frac{81}{27}\right)=\boxed{\frac{27\pi}{2}}$$ (۰/۲۵)

۲) حاصل انتگرال‌ها را بیابید، هر قسمت (۱/۵ نمره)

الف) $\int\frac{dx}{1-\cos x}=$

تغییر متغیر $z=\tan(\frac{x}{2})$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x=2(\tan^{-1}z)\Rightarrow dx=\frac{2z}{1+z^2}$ (۰/۲۵) و $\cos x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{1-z^2}{1+z^2}$ (۰/۲۵)

$$=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1-\frac{1-z^2}{1+z^2}}=\int\frac{2dz}{1+z^2-(1-z^2)}=\int\frac{2dz}{2z^2}=-\frac{1}{z}+C=\boxed{\frac{-1}{\tan(\frac{x}{2})}+C}$$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

ب) $\int\frac{dx}{x^4+4x^2}\Rightarrow$ تجزیه کسر $\frac{1}{x^4+4x^2}=\frac{1}{x^2(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$\frac{1}{x^2(x^2+4)}=\frac{1}{4}\left(\frac{x^2+4-x^2}{x^2(x^2+4)}\right)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+4}\right]\Rightarrow$$ $A=0$, $B=\frac{1}{4}$, $C=0$ و $D=-\frac{1}{4}$ (۰/۲۵)

$$\int\frac{dx}{x^4+4x^2}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+4}\right)dx=\boxed{\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

(ادامه سوال ۲)

ج) $\int x^2 \tan^{-1}x \, dx \;\underset{\text{روش جزء به جزء}}{=}\; uv - \int v\,du$

$$\begin{cases} u = \tan^{-1}x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x^2+1}dx \\ dv = x^2\,dx \Rightarrow v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$$

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\frac{x^3}{3}\tan^{-1}x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x^2+1}dx$$

۰/۲۵ تقسیم

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+1 \\ \underline{-x^3-x} & x \\ -x & \end{array} \Rightarrow \frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^3}{3}\tan^{-1}x - \frac{1}{3}\int\left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \boxed{\frac{x^3}{3}\tan^{-1}x - \frac{x^2}{6} - \frac{1}{6}\ln|1+x^2|}$$

۰/۲۵ ۰/۲۵

د) $\int \dfrac{e^x dx}{(e^{2x}+1)^2} = \int \dfrac{du}{(u^2+1)^2} \;\underset{\text{تغییر متغیر مثلثاتی}}{=}\; \int \dfrac{\sec^2 t\, dt}{\sec^4 t} = \int \cos^2 t\, dt$ ۰/۲۵

$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$ ۰/۲۵

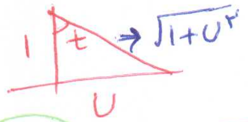
$u = \tan t \Rightarrow du = \sec^2 t\, dt$ ۰/۲۵

$\sqrt{u^2+1} = \sec t$

$\underset{\text{دو برابر کمان}}{\overset{\text{بنابر رابطه } \cos}{=}}\; \int \dfrac{1+\cos 2t}{2}dt = \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4}\sin 2t$ ۰/۲۵

$\sin 2t = 2\sin t\cos t \qquad u = \tan t \Rightarrow \sin t = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ و $\cos t = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ ۰/۲۵

$\Rightarrow \sin 2t = \dfrac{2u}{1+u^2}$



$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}u + \frac{u}{2(1+u^2)} = \boxed{\frac{1}{2}\tan^{-1}(e^x) + \frac{e^x}{2(1+e^{2x})}}$$

۰/۲۵

۳) همگرایی مطلق یا مشروط یا واگرایی (۲ نمره)

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n!}{(3n+2)!} \;\Rightarrow$ آزمون نسبت $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{(n+1)!}{(3(n+1)+2)!}}{\dfrac{n!}{(3n+2)!}}$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)\,n!}{(3n+5)(3n+4)(3n+3)(3n+2)!}}{\dfrac{n!}{(3n+2)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(3n+5)(3n+4)(3n+3)} = 0 < 1$$

۰/۲۵

$\Rightarrow$ سری همگرای مطلق است. ۰/۲۵

ب) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1-2\sin n}{n^3}\right) \;\Rightarrow$ مقایسه حدی $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| = \lim\left|\dfrac{\frac{1-2\sin n}{n^3}}{\frac{1}{n^2}}\right| = \lim\left|\dfrac{1-2\sin n}{n}\right| = 0$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

مقایسه با $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ ۰/۲۵ $\Rightarrow$ دو سری از یک نوع‌اند. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ همگراست $\Rightarrow$ سری همگرای مطلق است. ۰/۲۵

سری ۲ بزرگ

۴) بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n+3}}$ ۱/۵ نمره

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{n+3}}}{\frac{1}{\sqrt{n+4}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+4}}{\sqrt{n+3}} = 1 \Rightarrow |x-a|<R$$

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\Rightarrow |x-5|<1 \Rightarrow -1<x-5<1 \Rightarrow 4<x<6$$ ۰/۲۵

$x=4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}$ همگرا است (سری متناوب و آزمون لایب نیتز) ۰/۲۵

$x=6 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}$ واگرا است: مقایسه با $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ۰/۲۵ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{بازه همگرایی } [4,6)}$

۵) به کمک سری مکلورن $\int_0^{x} \sin t^2\,dt$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \sin t^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (t^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\int_0^{x}\sin t^2\,dt = \int_0^{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{4n+2}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}\Bigg|_0^{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

۶) جوابهای معادله $z^3+8=0$

$$z^3=-8 \Rightarrow z=(-8)^{\frac{1}{3}} = 2(-1)^{\frac{1}{3}} = 2(e^{\pi i})^{\frac{1}{3}}$$ ۰/۲۵ $k=0,1,2$

$$= 2e^{\frac{2k\pi+\pi i}{3}} = 2\left(\cos\frac{2k\pi+\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi+\pi}{3}\right)$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \quad z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$$ ۰/۲۵

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

۷) الف) $f(x)=\int_{\frac{1}{2}}^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt$ معکوس پذیر و $(f^{-1})'(0)$ را بیابید

$f'(x) = \cos x\sqrt{1-\sin^2 x} > 0 \Rightarrow$ معکوس پذیر ۰/۲۵ $(f^{-1})'(0) \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$$x=\frac{\pi}{6} \Rightarrow (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{6})} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{\frac{4}{3}}$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

ب) حد زیر را بیابید $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$y = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)$$ ۰/۲۵

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0} \overset{\text{هوپیتال}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1 \Rightarrow \ln y = 1$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\Rightarrow \boxed{y = e^1 = e}$$ ۰/۲۵

نمره ۳