۱) الف)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(x[x])}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-x)}{\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\sin(x)}{2x\sin(2x)}$$ /۲۵

$\boxed{-1<x<0 \to [x]=-1}$ /۲۵

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{2}\times 1\times 1=-\frac{1}{2}$$ /۲۵ /۲۵

ب)

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}\right)\times\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}$$ /۲۵

$\boxed{\infty-\infty \text{ مبهم}}$ /۲۵

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}=\infty$$ /۲۵ /۲۵

درجه صورت بیشتر است

ج)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$ /۲۵ $\to$ /۲۵ چون $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+1}=0$

و $\sin(\frac{1}{x})$ تابعی کراندار است. /۲۵

---

۲) با توجه به تعریف $|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$ تابع در واقع $f(x)=\begin{cases}-ax+1 & x\leq 0\\ bx+a & x>0\end{cases}$ /۲۵

است با توجه به ضابطه f همه جا مشتق پذیر است مگر در $x=0$ در این نقطه اولاً باید پیوسته باشد: /۲۵

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}-ax+1=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}bx+a=a \end{array}\right\}\Longrightarrow a=1$$ /۲۵

ثانیاً باید مشتق چپ و راست برابر داشته باشد

$f'_-(0) = (-x+1)'\Big|_{x=0} = -1$

$f'_+(0) = (bx+1)'\Big|_{x=0} = b$

$\Rightarrow b = -1$ ۰/۲۵

$f'(-1) = (-x+1)'\Big|_{x=-1} = 1$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

---

۳) الف) ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$y' = (1)(x^3 - \sin^2(x^2))^4 + x\left[4(3x^2 - (2x)2\sin(x^2)\cos(x^2)) \times (x^3 - \sin^2(x^2))^3\right]$$

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$= (x^3 - \sin^2(x^2))^3\left[x^3 - \sin^2(x^2) + 12x^3 - 16x^2\sin(x^2)\cos(x^2)\right]$$

ب)

$$y' = -\frac{8\left(\frac{\sin x}{2\sqrt{4-\cos x}}\right)}{4-\cos x} = \frac{-4\sin x}{(4-\cos x)^{\frac{3}{2}}}$$

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

---

۴) مجانب افقی:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4+x^2-2x}{x^2-8+2x} = 1$$

$\rightarrow$ $y=1$ مجانب افقی ۰/۲۵

مجانب عمودی: نقاط بی‌نهایت تابع

$$x^2-8+2x = (x+4)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=2 \end{cases}$$ ۰/۲۵

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x-8} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x+4)(x-2)} = 0$$

پس $x=2$ مجانب قائم نیست ۰/۲۵

$$\lim_{x\to -4} f(x) = \lim_{x\to -4}\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x-8} = \infty$$ $\rightarrow$ $x=-4$ مجانب قائم است. ۰/۲۵

۵) چون f در $[a,b]$ پیوسته است و $f(a)f(b)<0$ بنابه قضیه مقدار میانی
عدد $c\in[a,b]$ وجود دارد که $f(c)=0$ پس حداقل یک ریشه دارد ۰/۲۵ ۰/۲۵
فرض کنید دو ریشه c و c' در این بازه وجود دارد چون $f(c)=f(c')=0$
و چون شرایط قضیه مقدار میانگین برقرار است باید عدد بین c و c' عدد c'' وجود
داشته باشد که $f'(c'')=0$ این با فرض مساله متناقض است. پس تعداد ریشه
حداکثر یک است. ۰/۲۵ ۰/۲۵

=

۶) الف)

$f'(x)=1-\cos x=0 \rightarrow \cos x=+1 \rightarrow x=2k\pi$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

در این بازه فقط $x=0$ قرار دارد.

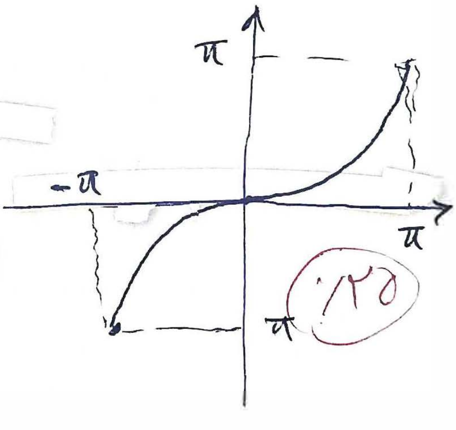
$f''(x)=\sin x=0 \rightarrow x=k\pi$ ۰/۲۵

در این بازه فقط $x=-\pi$ و $x=0$ و $x=\pi$ قرار دارند.

$\cos x\leq 1 \rightarrow f'(x)\geq 0 \rightarrow$ تابع صعودی ۰/۲۵

x	$-\pi$		0		π
f'		$+$	0	$+$	
f''	0	$-$	0	$+$	0
f	$-\pi$	$\nearrow$ $\frown$	عطف	$\nearrow$ $\smile$	π

۰/۲۵ ۰/۵



۰/۲۵

ب) تنها نقطه بحرانی درون بازه $x=0$ و نقاط مرزی $x=\pi$ و $x=-\pi$ است. ۰/۲۵ ۰/۲۵

۰/۲۵ $f(0)=0$, $f(-\pi)=-\pi$, $f(\pi)=\pi$

min max

۰/۲۵

=

۷) قرار می دهیم: $F(x,y)=x^2y+xy^3-2x$

$y'=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{2xy+y^3-2}{x^2+3xy^2}$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

شیب خط مماس $= y'\big|_P = -\dfrac{2(1)(1)+(1)^3-3}{(1)^2+3(1)(1)^2} = -\dfrac{1}{4}$ ۰/۲۵

معادله خط مماس : $y-1 = -\dfrac{1}{4}(x-1) \rightarrow y = -\dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{4}$.

۰/۲۵

---

۸)

$|1+\sqrt{3}\,i| = \sqrt{1+3} = 2$ ۰/۲۵

$\mathrm{Arg}(1+\sqrt{3}\,i) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3} \rightarrow 1+\sqrt{3}\,i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

۰/۲۵

$(1+\sqrt{3}\,i)^{30} = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^{30} = 2^{30}e^{10i\pi} = 2^{30}[\cos 10\pi + i\sin 10\pi]$

۰/۲۵

$= 2^{30}$

۰/۲۵