نام و نام خانوادگی :	نام درس : / نام استاد :
شماره دانشجوئی :	تاریخ : / نمره میان ترم / پایان ترم / نهائی
رشته و گرایش :	
نیمسال اول / دوم / تابستان سال تحصیلی :	امضاء دانشجو:

حوزه معاونت آموزشی
اداره امتحانات و تکمیل
۱۴۰۰/۰۱
تکثیر سوالات امتحانی
دانشگاه واجد نجف آباد
اداره امتحانات

۱) $\lim_{x\to -3^-} \frac{5x|x-3|}{x^2-9} = \lim \frac{5x-(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to -3^-} \frac{-5x}{x+3} = \frac{-5x-3}{0^-} = -\infty$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$x<-3 \Rightarrow x+3<0$

۲) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}{4-x-(4+x)}$ (۰/۲۵)

$4-x-4-x$ (۰/۲۵)

$= \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}{-2x} = \frac{-1}{2}(\sqrt{4}+\sqrt{4}) = -\frac{4}{2} = -2$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۳) $\lim_{x\to 0^-} \frac{[x]\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\cos x}{\sin x} = \frac{-\cos 0}{\sin 0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$[x]=-1$ (۰/۲۵)

۴) مقادیر a و b را بیابید. ۱/۵ نمره

$f(x)=\begin{cases} 2x^2-5a & x<2 \\ bx+2 & x\geq 2 \end{cases}$ همه جا مشتق پذیر باشد

حل: تنها مشتق پذیری در $x=2$ (چون جمله‌ای همه جا مشتق پذیر است. پس ضابطه‌ها همه جا مشتق پذیرند)

۱) شرط پیوستگی

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 2x^2-5a = 2\times 4-5a = 8-5a = f(2)$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} bx+2 = 2b+2$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

$8-5a=2b+2$ (۰/۲۵)

۲) شرط مشتق پذیری در $x=2$

$f'(x)=\begin{cases} 4x & x<2 \\ b & x>2 \end{cases}$

$f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} 2x = 4$, $f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} f'(x) = b$ (۰/۵)

$f'_-(2) = f'_+(2) \Rightarrow b = 4$ (۰/۵)

$4 - 5a = 2b + 2$

$4 - 5a = 2 \times 4 + 2 = 10$

$-5a = 10 \Rightarrow a = -2$ (۰/۵)

۳) حل مسئله: ۲۵/ صرفه

الف) $y = x^2 \sqrt{x^2 - \cos x}$

$y' = (x^2)' \sqrt{x^2 - \cos x} + x^2 (\sqrt{x^2 - \cos x})'$ (۰/۵) مشتق حاصلضرب

$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ (۰/۵)

$y' = 2x \sqrt{x^2 - \cos x} + x^2 \frac{(x^2 - \cos x)'}{2\sqrt{x^2 - \cos x}}$ (۰/۵)

$y' = 2x \sqrt{x^2 - \cos x} + \frac{x^2 (2x^2 + \sin x)}{2\sqrt{x^2 - \cos x}}$ (۰/۵)

(۰/۵)

ب) $y = \frac{3}{(5 - \sin x^2)^4} \Rightarrow y' = \frac{0 - 4(5 - \sin x^2)'(5 - \sin x^2)^3}{(5 - \sin x^2)^8}$ (۰/۵) مشتق تقسیم (۰/۵)

$(\sin x^2)' = 2x \cos x^2$ (۰/۵)

$(\sin u)' = u' \cos u$ (۰/۵)

$y' = \frac{-4 \times -2x \cos x^2 (5 - \sin x^2)^3}{(5 - \sin x^2)^8}$ (۰/۵)

$y' = \frac{8x \cos x^2}{(5 - \sin x^2)^5}$

۴) طول و عرض نقاط مجانب افقی

$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3}$

مخرج صفر: $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0$ (۰/۵)

$x_1 = -3$ / $x_2 = 1$ (۰/۵)

$\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$ (۰/۵)

معادله مجانب افقی $y = 2$ (۰/۵)

نام و نام خانوادگی :	نام درس : / نام استاد :
شماره دانشجوئی :	تاریخ : / نمره میان ترم / پایان ترم / نهائی
رشته و گرایش :	
نیمسال اول / دوم / تابستان سال تحصیلی :	امضاء دانشجو:

واحد نجف آباد
اداره امتحانات

۵) ثابت کنید $f(x)=x^3+2x+2=0$ در بازه $[-1,0]$ دقیقاً یک ریشه دارد.

حل)

$f(-1)=(-1)^3+2(-1)+2=-1-2+2=-1<0$ (۰/۲۵)

$f(0)=0+2>0$ (۰/۲۵) $f(-1)<0<f(0)$

$\exists c \quad f(c)=0$ (۰/۲۵)

حداقل یک ریشه دارد. قضیه مقدار میانی

$f'(x)=3x^2+2>0$ ⇒ تابع اکیداً صعودی (۰/۲۵) ⇒ قضیه رل (۰/۲۵)

حداکثر یک ریشه دارد. ⇒ دقیقاً یک ریشه دارد.

۶) مثال

$f(x)=x^3-3x^2$

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0$ (۰/۲۵) $\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$ (۰/۲۵)

x		0		2	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	ماکزیمم نسبی	↘	مینیمم نسبی	↗

$x=0 \to f(0)=0$

$x=2 \to f(2)=2^3-3\times 2^2=-4$

ماکزیمم نسبی $A\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ (۰/۲۵) مینیمم نسبی $B\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}$ (۰/۲۵)

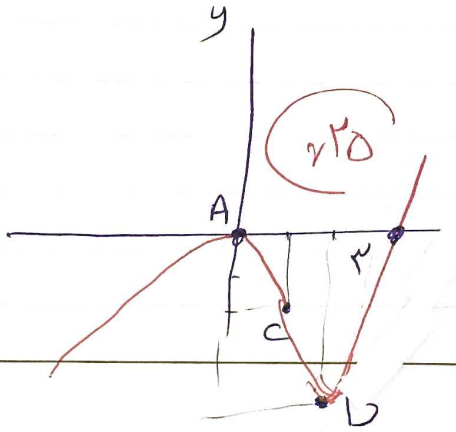
$f''(x)=6x-6=0 \Rightarrow 6x=6 \Rightarrow x=1$ (۰/۲۵)

x		1	
y''	$-$	0	$+$
y	∩	-2	∪

نقطه عطف

$x=1 \Rightarrow f(1)=1^3-3(1)^2=-2$

نقطه عطف $C\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ (۰/۲۵)



(۰/۲۵)

x		0		1		2	
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$	0	$+$		$+$
y	∩		∩		∪		∪

(۰/۲۵)

۶) نقطه بحرانی تابع $f(x)=x^3-3x^2$ در بازه $[-1,1]$

$$f'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0, x=2$$

$2 \notin [-1,1]$ (۲ نمره)

$x=0 \longrightarrow f(0)=0$ (۲ نمره)

$x=1 \quad f(1)=-2$

$x=-1 \quad f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2=-1-3=-4$ (۲ نمره)

$A\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ مینیمم مطلق (۱ نمره)

$D\begin{bmatrix}-1\\-4\end{bmatrix}$ ماکزیمم مطلق

۷) خط مماس بر $x^3-y^3=3-3y^2$ در نقطه $A\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ را بیابید.

$$f(x,y)=x^3-y^3-3+3y^2=0 \qquad F_x=3x^2 \qquad F_y=-3y^2+6y$$

$$y'=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{-3x^2}{-3y^2+6y} \quad (۲ نمره)$$

$$m=y'(A)=\frac{-3(1)^2}{-3\times1-6}=\frac{-3}{-9}=\frac{1}{3} \quad (۲ نمره)$$

$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y+1=\frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3} \quad (۲ نمره)$$

(۲ نمره)

۸) معادله $z^3-3i=0$ را حل کنید.

$$z^3=3i \Rightarrow z=2(i)^{\frac{1}{3}}$$

$$i=e^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$ (۲ نمره)

$$=\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$i^{\frac{1}{3}}=\cos\left(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3}\right)=\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{6}\right)$$ (۲ نمره)

$$k=0 \Rightarrow z_1=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$

$$k=1 \longrightarrow z_2=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$$

$z=z_1, z_2$ (۲ نمره)

$$z_1^2=z_2^2=i$$

$z=\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}-i$

$$(\sqrt{3}+i)^2=(-\sqrt{3}-i)^2=3+2i$$