



# نخستین کنفرانس ملی فناوری‌های نوین در مهندسی مکانیک و سازه

www.mechaconf.ir

## تحلیل اثر انبساط لوله و سرعت سیال بر روی ارتعاشات لوله عمودی حاوی سیال به کمک تئوری تیر تیموشینکو

علی شمس، علی سلیمانی

گروه مهندسی مکانیک، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران

:

soleimani@pmc.iaun.ac.ir

### خلاصه

در این مقاله به بررسی دینامیک لوله عمودی یکسرگردار حاوی سیال بر اساس تئوری تیر تیموشینکو پرداخته شده است. معادلات حاکم بر مساله به کمک اصل همیلتون استخراج شدند و سپس به کمک حل عددی پاسخ آنها بدست آمده است. تحلیل نتایج بر اساس تئوری تیموشینکو انجام شده است و با نتایج تیر اولر-برنولی مقایسه شده است. تأثیر سرعت های مختلف انبساط و انقباض لوله و سرعت های مختلف سیال بر روی رفتار فرکانسی و دینامیکی لوله بررسی شد است. در برخی از شرایط، رفتارهای متفاوت دینامیکی بر اساس دو نظریه اولر-برنولی و تیموشینکو بدست آمده است.

**کلمات کلیدی:** ارتعاشات، نظر به تیر تیموشینکو، لوله، سیال، انبساط و انقباض

### ۱. مقدمه

دینامیک لوله‌های حاوی سیال دارای گذشته بسیار ریشه‌داری است. سازه‌های استوانه‌ای که از داخل یا از خارج آن‌ها جریان عبور می‌کند در بسیاری از دستگاه‌های مهندسی به‌ویژه در صنایع تولید انرژی شیمیایی و پتروشیمی استفاده می‌شوند. با توجه به رشد و توسعه روزافزون صنایع مختلف، تجهیز کلیه قطعات و ملزومات موردنیاز در صنایع آب، نفت، گاز و پتروشیمی بسیار حائز اهمیت است. لوله‌های انتقال بخش عمده‌ای از ذخایر نفت و گاز استخراج شده از بستر دریا را انتقال می‌دهند. موادی که این لوله‌ها را از آن‌ها می‌سازند، توان مقاومت در برابر فشار متناوب جریان‌های عمق اقیانوس‌ها را ندارند و محققان به دنبال غلبه بر آن هستند، زیرا بدون مهار کردن این فشار، حفاری از بستر دریاها ناممکن خواهد بود. کاربردهای دیگر لوله‌ها می‌تواند در سیستم‌های لوله‌کشی، زیردریایی‌ها، مانتورینگ و میله‌های کنترل هسته راکتورها، لوله‌های مبدل حرارتی، پوسته‌ی مهار جریان در راکتورهای هسته ای، موتورهای هواپیما و پمپ‌های جت نام برد. لوله‌های عمودی حاوی سیال به‌طور گسترده در سیستم‌های صنعتی مورد استفاده قرار می‌گیرند و در برخی موارد با تغییر در سرعت سیال، طول لوله انبساط و انقباض پیدا کرده و مشکلاتی را در عمل ایجاد می‌کند. به عنوان مثال فرآیند ریخته‌گری مثال بارزی است که در آن به وضوح می‌توان انبساط و انقباض لوله را در هنگام پر کردن مخازن دید. در هنگام پر کردن مخازن باید اطمینان حاصل شود که نوک لوله همیشه نزدیک به سطح مایع باقی بماند چون انبساط و انقباض لوله در سرعت‌های متفاوت باعث پاشیده شدن سیال به اطراف می‌شود و مشکلاتی را در عمل ایجاد می‌کند. در طی دو قرن اخیر مهندسان و متخصصان دینامیک با مسائل ارتعاشات و پایداری در سیستم‌هایی مانند زنجیرهای متحرک، اره‌های نواری، تسمه‌های حامل و انتقال‌دهنده توان و الیاف منسوجات مواجه شده‌اند؛ یعنی سیستم‌هایی که در آن‌ها اساساً با یک سیستم پیوسته الاستیک یک‌بعدی سروکار داریم. بعدها مسائلی که با انتقال سیال نیز درگیر هستند به این مسائل اضافه شد. از جمله تیرها و لوله‌های حامل جریان سیال



www.mechaconf.ir

# نخستین کنفرانس ملی فناوری‌های نوین در مهندسی مکانیک و سازه



در مبدل‌های حرارتی یا لوله‌های حامل سوخت در راکتورهای هسته‌ای. مطالعه چنین سیستم‌هایی در ابتدا به سمت بررسی معادلات حرکت خطی ساده‌شده سیستم سوق پیدا کرد.

اولین مطالعات به‌صورت کاملاً جدی بر روی دینامیک لوله‌های حاوی سیال در سال ۱۹۳۹ انجام گرفت [۱]. نتایج قابل قبولی از این مطالعات به دست آمد اما اکثر آنها در جنگ جهانی اول از بین رفت. بعد از آن تحقیقات در زمینه لوله‌های حاوی سیال با شرایط مرزی متفاوت انجام شد [۱]. نمونه‌ی عملی این مسئله لوله‌های مخازن هستند که وقتی می‌خواهند مواد داخل مخزن را خالی کنند لوله به طور عمودی و آزادانه تحت این شرایط انبساط و انقباض پیدا کرده و حرکت می‌کند. معادله دیفرانسیل حرکت یک لوله عمودی حاوی سیال هنگامی که لوله حرکت انبساطی یا انقباضی دارد بر اساس نظریه‌ی اولر برنولی به‌دست آمده است. بر اساس نظریه اولر برنولی، یک لوله‌ی صلب را به‌صورت قطعات زنجیر متصل به هم در نظر گرفتند که یک طرف آن آزاد و طرف دیگر درگیر است [۲]. در حال حاضر مشخص است که یک لوله‌ی معلق انتقال سیال ممکن است پایداری خود را در سرعت جریان بسیار زیاد از دست بدهد. گزارش خم شدن لوله‌ها در اثر بی‌ثباتی جریان که شبیه شکست ستون‌ها در زیر بارمحوری استاتیکی می‌باشد نیز بررسی شده است [۳]. علاوه بر این ارتعاشات جانبی داخل و خارج صفحه در دامنه‌ی کوچکی از یک لوله‌ی معلق انعطاف‌پذیر انتقال سیال که به صورت افقی می‌چرخد، مورد بررسی قرار گرفته است [۴]. آن‌ها فرکانس بحرانی و سرعت جریان بحرانی سیستم معلق لوله‌ی حامل سیال را در ارتعاشات داخل و خارج صفحه مورد بحث قراردادند. در اولین تحقیق منتشر شده در مورد پایداری لوله‌های عمودی جریان‌های سیال غیر چرخشی، محاسبات بدون در نظر گرفتن شرایط بحرانی برای سیال انجام گرفته شد [۳]. نظریات کامل‌تر و آزمایشات دقیق‌تری بعدها انجام شد به‌عنوان مثال آزمایشات ارتعاشات خارج از صفحه با در نظر گرفتن شرایط بحرانی انجام گرفت [۳]. بعد از آن تحقیقات بسیار زیادی در مورد چرخش تیرهای عمودی انجام گرفت که در صنعت کاربردهای بسیار زیادی دارد مثلاً کنترل‌کننده‌های رباتیک، تیغه‌ی روتور هلیکوپتر و تیغه‌ی پروانه آن، توربین‌های بادی و ماشین‌های توربو می‌باشد. تاثیر شتاب زاویه‌ای و شتاب جریان مایع بر رفتار دینامیکی یک لوله معلق انتقال سیال چرخشی مورد مطالعه قرار گرفت [۵]. آن‌ها دریافتند که فرکانس‌های طبیعی یک لوله‌ی معلق انتقال سیال متناسب با شتاب زاویه‌ای لوله و جرم آن در هر دو جهت محوری و عرضی می‌باشد به عبارتی آن‌ها تنها پارامتر چرخش را بر روی پایداری در نظر گرفتند. همچنین با تعمیم و گسترش قانون همیلتون به سیستم‌های باز، معادله‌ی حرکت سیستم لوله‌ی منعطف انتقال سیال را بدست آوردند [۶]. در مقاله‌ای دیگر، دینامیک و پایداری یک لوله‌ی انتقال سیال براساس فرم گسترده یافته‌ی قانون همیلتون برای سیستم‌های باز، مورد بررسی قرار گرفت [۷]. مطالعات زیادی بر رفتارهای دینامیکی انبساطی و انقباضی تیرها انجام گرفته است و راه‌حل‌های تحلیلی تقریبی برای ارتعاش عرضی با شرایط مرزی متفاوت برای لوله‌ای با انبساط محوری ارائه شده است [۸]. همچنین یک مدل دینامیکی برای ارتعاش لوله در حال انبساط ارائه کردند که در آن تاثیر سختی لوله ناشی از چرخش لوله در نظر گرفته می‌شود [۹]. ارتعاش خطی در بازوی منعطف ربات که به وسیله‌ی یک لوله باریک در حال حرکت مدل‌سازی شده است [۱۰]، مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. پایداری لوله‌های حاوی سیال بر اساس نظریه‌ی تیر تیموشینکو در زوایای مختلف بر اساس روش المان محدود به کمک نرم‌افزار ANSYS با شرایط مرزی دو سر آزاد بررسی شده است [۱۱]. پایداری لوله‌های حاوی سیال بر اساس تیر تیموشینکو به روش المان محدود نیز انجام شده است [۱۲]. ارتعاش غیرخطی لوله‌های حاوی سیال ایده ال بر اساس شرایط مرزی دو سر ثابت مورد بررسی قرار گرفته است [۱۳]. اما در این تحقیق شرایط مرزی یکسر ثابت و یکسر آزاد در نظر گرفته شده است هم‌چنین لوله به صورت عمودی فرض شده تا تأثیر نیروی گرانش نیز لحاظ شود. در تحقیق حاضر تحلیل دینامیکی لوله‌ی معلق انتقال سیال که به صورت عمودی در حال انبساط و انقباض است بر اساس نظریه‌ی تیر تیموشینکو و تحلیل کمی توسط مقادیر مشخصه و آنالیز عددی با دارای شرایط مرزی یکسر ثابت یکسر آزاد است انجام گرفته تا تأثیر سرعت انبساط و انقباض، نسبت جرم و پایداری لوله‌ی انتقال سیال در حال انبساط و انقباض مورد بررسی قرار بگیرد به صورتی که در ابتدا فقط اینرسی دورانی در نظر گرفته می‌شود و سپس تغییر شکل برشی نیز اضافه شده و تأثیر آن در نتایج بدست می‌آید. مدل‌سازی تیموشینکو و این نوع مدل‌سازی سیال به همراه تیر اولر-برنولی قبلاً انجام گرفته است ولی استفاده از این نوع مدل‌سازی سیال به همراه مدل تیموشینکو برای لوله عمودی که انبساط و انقباض نیز دارد کاملاً جدید می‌باشد. این تحقیق درصدد است که با استفاده از تئوری تیر تیموشینکو در مدل‌سازی لوله‌های عمودی حاوی

# نخستین کنفرانس ملی فناوری‌های نوین در مهندسی مکانیک و سازه

سیال رفتار ارتعاشی و پایداری این لوله‌ها را بررسی کند. تفاوت تئوری تیموشینکو و اولر برنولی در تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی می‌باشد. برای بررسی اثر این دو تفاوت به صورت جداگانه، در ابتدا فقط اثر اینرسی دورانی اضافه می‌شود (که به آن تیر ریلی گفته می‌شود) و نتایج با تیر اولر برنولی مقایسه می‌گردد. سپس اثر تغییر شکل برشی نیز اضافه شده و تأثیر آن در نتایج بدست آمده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

## ۲. استخراج معادلات حاکم بر مساله

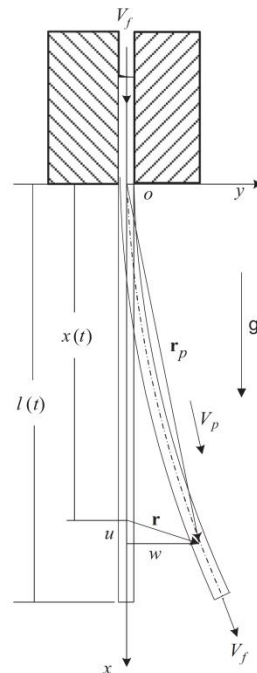
نمای یک لوله عمودی یکسر گیر دار در شکل ۱ نشان داده شده است. برای استخراج معادلات حاکم بر سیستم از روش همیلتون استفاده شده است که برای اینکار نیاز است انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی و کار مجازی محاسبه شوند.

جابه‌جایی طولی و عرضی لوله به ترتیب با  $u(x, t)$  و  $w(x, t)$  مشخص می‌شوند که رابطه زیر بین آنها برقرار است.

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 d\eta \quad (1)$$

و بردار مکان  $r_p$  یک نقطه بر خط مرکزی لوله است.

$$r_p = (x + u)i + wj \quad (2)$$



شکل ۱- لوله عمودی یکسر گیردار حاوی سیال

انرژی پتانسیل سیستم از ۲ بخش تشکیل شده است که شامل انرژی پتانسیل الاستیک که در لوله انعطاف پذیر ذخیره شده و انرژی پتانسیل ناشی از گرانش است. انرژی پتانسیل الاستیک طبق معادله زیر نوشته می‌شود.

# نخستین کنفرانس ملی فناوری‌های نوین در مهندسی مکانیک و سازه

$$U_p = \frac{1}{2} \int_0^{l(t)} \left[ p(x, t) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + EI \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + kAG \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right)^2 \right] dx \quad (3)$$

که  $p(x, t)$  تنش است و به صورت زیر بیان می‌شود.

$$p(x, t) = -\{M\ddot{l} + m(\ddot{l} + \dot{V}_f)\}[l(t) - x] \quad (4)$$

همان‌طور که مشخص است جرم و سرعت سیال بر روی تنش لوله تأثیر دارد. انرژی پتانسیل ناشی از گرانش نیز به صورت زیر است.

$$U_g = \frac{1}{2} [M + m] g \int_0^{l(t)} [l(t) - x] \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (5)$$

در نتیجه انرژی پتانسیل کل به صورت می‌باشد.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{l(t)} \left\{ [(M + m)g + P(x, t)][l(t) - x] \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + EI \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + kAG \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right)^2 \right\} dx \quad (6)$$

انرژی جنبشی سیستم از ۲ بخش انرژی جنبشی لوله و انرژی جنبشی سیال تشکیل شده است که به صورت زیر تعریف میشوند.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{l(t)} (M\dot{r}_p \cdot \dot{r}_p + \rho I \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^{l(t)} m \dot{r}_f \cdot \dot{r}_f dx \quad (7)$$

که  $\dot{r}_p$  و  $\dot{r}_f$  به صورت زیر تعریف میشوند.

$$\dot{r}_p = \dot{l}i + \left( \dot{l} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) j, \quad \dot{r}_f = (\dot{l} + v_f)i + \left( (\dot{l} + v_f) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) j \quad (8)$$

در نتیجه انرژی جنبشی کل به صورت زیر می‌باشد.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{l(t)} \left\{ M[\dot{l}^2 + (\dot{l} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t})^2] + \rho I \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + m(\dot{l} + v_f)^2 + m[(\dot{l} + v_f) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}]^2 \right\} dx \quad (9)$$

کار مجازی نیروهای خارجی و تغییرات مومنوم به صورت زیر است.

$$\delta W = 0, \quad \delta H = \left\{ -M\dot{l} \left( \dot{l} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) \delta w - m(\dot{l} + v_f) \left[ (\dot{l} + v_f) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \right] \delta w \right\}_{x=l} \quad (10)$$

معادله دیرانسیل حرکت برای یک لوله انتقال سیال در حال انبساط و شرایط مرزی مربوطه از اصل تعمیم یافته همیلتون به دست می‌آید که به صورت معادله زیر است.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\delta W + \delta H) dt = 0 \quad (11)$$

با جایگزینی و در نظر گرفتن شرایط مرزی برای یک لوله معلق و اعمال واریاسیون<sup>۱</sup> معادله زیر به دست می‌آید.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^{l(t)} \left[ M \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \dot{l}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\dot{l} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \dot{l} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + m \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (\dot{l} + v_f)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2(\dot{l} + v_f) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (\dot{l} + v_f) \frac{\partial w}{\partial x} \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ (M + m)g(l - x) \frac{\partial w}{\partial x} + p(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + kAG \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right] \delta w dx dt = 0 \quad (12)$$

<sup>1</sup>Variation

# نخستین کنفرانس ملی فناوری‌های نوین در مهندسی مکانیک و سازه

بنابراین معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم به صورت زیر بدست می آیند.

$$M \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \dot{l}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \dot{l} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \ddot{l} \frac{\partial w}{\partial x} \right] + m \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (\dot{l} + V_f)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 (\dot{l} + V_f) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (\ddot{l} + \dot{V}_f) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (13)$$

$$- [(M + m)(g - \dot{l}) - m\dot{V}_f](l - x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + [(M + m)(g - \dot{l}) - m\dot{V}_f] \frac{\partial w}{\partial x} + kAG \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0$$

$$-\rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + kAG \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) = 0 \quad (14)$$

شرایط مرزی این مساله به صورت زیر می باشند.

$$@x = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = w = \theta = 0 \quad (15)$$

$$@x = l \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta = 0$$

برای حل معادلات حاکم بر سیستم از روش گلرکین استفاده شده است. بر اساس این روش، پاسخ سیستم به صورت زیر فرض میشود.

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x, l) \cdot q_i(t) \quad (16)$$

$q_i(t)$  مختصات تعمیم یافته،  $n$  تعداد مود سیستم و  $\varphi_i(x, l)$  تابع مقایسه می باشد که به صورت زیر بیان می شود.

$$\varphi_i(x, l) = p_{1i} \cosh \lambda_{1i} x + p_{2i} \sinh \lambda_{1i} x + p_{3i} \cos \lambda_{2i} x + p_{4i} \sin \lambda_{2i} x \quad (17)$$

که ضرایب  $p_1$  تا  $p_4$  در مرجع [۱۴] تعریف شده اند.

پس از اعمال شرایط مرزی، معادله مشخصه سیستم برای محاسبه فرکانس های طبیعی به صورت زیر بدست می آید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1(\lambda_1^2 + a + c) & 0 & \lambda_2(-\lambda_2^2 + a + c) \\ (\lambda_1^2 - d)\lambda_1 \sinh \lambda_1 l & (\lambda_1^2 - d)\lambda_1 \cosh \lambda_1 l & (\lambda_2^2 + d)\lambda_2 \sin \lambda_2 l & (-\lambda_2^2 - d)\lambda_2 \cos \lambda_2 l \\ (\lambda_1^2 + a) \cosh \lambda_1 l & (\lambda_1^2 + a) \sinh \lambda_1 l & (-\lambda_2^2 + a) \cos \lambda_2 l & (-\lambda_2^2 + a) \sin \lambda_2 l \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

در اینجا  $\xi = \frac{x}{l(t)}$ ،  $B(\xi) = [\varphi_1(\xi), \dots, \varphi_n(\xi)]$  و  $q(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]^T$  و  $\beta = \frac{m}{M+m}$  تعریف می شود و بخش زمانی

پاسخ از معادله زیر بدست می آید.

$$M_1 \ddot{q} + G_1 \dot{q} + K_1 q = 0 \quad (19)$$

که در آن داریم:

# نخستین کنفرانس ملی فناوری‌های نوین در مهندسی مکانیک و سازه

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \int_0^1 B^T \cdot B d\xi \\
 G_1 &= 2 \frac{\dot{l}}{l} \int_0^1 (1-\xi) B^T B' d\xi + 2\beta \frac{V_f}{l} \int_0^1 B^T \dot{B} d\xi \\
 K_1 &= \left( \frac{\dot{l}}{l} \right)^2 \int_0^1 (1-\xi)^2 B^T B'' d\xi + \beta \left( \frac{V_f}{l} \right)^2 \int_0^1 B^T B'' d\xi + 2\beta \frac{\dot{l} V_f}{l^2} \left\{ \int_0^1 (1-\xi) B^T B'' d\xi - \int_0^1 B^T \dot{B} d\xi \right\} \\
 &\quad + \frac{\ddot{l} - 2\dot{l}^2}{l^2} \int_0^1 (1-\xi) B^T \dot{B} d\xi - \frac{g - \dot{l}}{l} \left\{ \int_0^1 (1-\xi) B^T B'' d\xi - \int_0^1 B^T \dot{B} d\xi \right\} \\
 &\quad + \frac{KAG}{l(M+m)} \left\{ \int_0^1 B^T C d\xi - \frac{1}{l} \int_0^1 B^T B'' d\xi \right\}
 \end{aligned} \quad (20)$$

و با استفاده از روش گلرکین برای معادله  $\theta$  نیز داریم:

$$\theta(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_{2i}(x, l) \cdot q_i(t) \quad (21)$$

که در آن داریم:

$$\varphi_i(x, l) = \dot{p}_{1i} \cosh \dot{\lambda}_{1i} x + \dot{p}_{2i} \sinh \dot{\lambda}_{1i} x + \dot{p}_{3i} \cos \dot{\lambda}_{2i} x + \dot{p}_{4i} \sin \dot{\lambda}_{2i} x \quad (22)$$

در اینجا نیز  $\xi = \frac{x}{l(t)}$  و  $C(\xi) = [\dot{\varphi}_i(\xi), \dots, \dot{\varphi}_n(\xi)]$  تعریف می‌شود. در نتیجه داریم:

$$M_2 \ddot{q} + G_2 \dot{q} + K_2 q = 0 \quad (23)$$

که در آن:

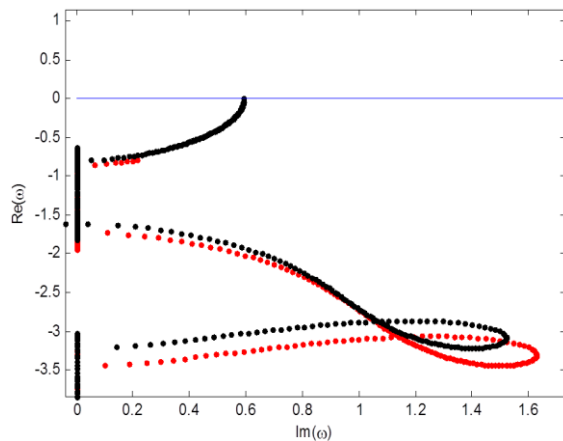
$$\begin{aligned}
 M_2 &= -\rho l \int_0^1 C^T C' d\xi \\
 G_2 &= \frac{2\rho l \dot{l}}{l} \xi \int_0^1 C^T C' d\xi \\
 K_2 &= \left( \frac{\rho l \ddot{l}}{l} - \frac{2\rho l \dot{l}^2}{l^2} \right) \xi \int_0^1 C^T C' d\xi + \left( \frac{EI}{l^2} - \frac{\rho l \dot{l}^2}{l^2} \right) \int_0^1 C^T C'' d\xi + \frac{KAG}{l^2} \int_0^1 C^T B' d\xi - KAG \int_0^1 C^T C d\xi
 \end{aligned} \quad (24)$$

### ۳. نتایج و بحث

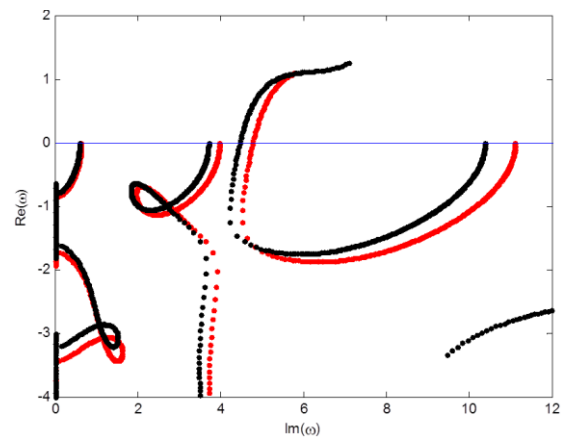
خیلی از قوانین عمومی لوله‌های حاوی سیال به وسیله‌ی تئوری اولر برنولی به دست آمده است. شکل ۲، نمودار آرگاند برای لوله‌ای  $\beta = 0.5$  گرانش صفر است با این تفاوت که خطوط مشکی بر اساس نظریه اولر برنولی و خطوط قرمز رنگ بر اساس نظریه تیموشینکو می‌باشد. این نکته قابل توجه است که در غیاب هرگونه اتلاف و برای  $u = 0$  خصوصیات فرکانسی سیستم همانند فرکانس یک تیر عمودی بر اساس اولر برنولی می‌باشد. اما رفتار

# نخستین کنفرانس ملی فناوری‌های نوین در مهندسی مکانیک و سازه

فرکانسی به صورت کاملاً عمومی وقتی سرعت افزایش پیدا می‌کند کاملاً پیچیده می‌شود. برای سرعت‌های پایین برای تمام مودها  $Im(\omega) > 0$  است. این نشان‌دهنده این است که تأثیر سیال بر روی حرکات سیستم به سمت مستهلک شدن می‌رود. اما برای حالتی که دو انتها مفصل یا بسته است سیستم نیز ایمن می‌باشد و خصوصیات فرکانسی به سمت واقعی میل پیدا می‌کند. لوله تیموشینکو نسبت به اولر برنولی در سرعت پایین‌تر یا بالاتر ناپایدار شده و همچنین از آنجا که خطوط قرمز نسبت به سیاه سمت راست‌تر قرار دارد، پس فرکانس‌های سیستم تیموشینکو در تمامی مودها نسبت به اولر-برنولی بیشتر است چراکه محور افقی محور فرکانس است و محور عمودی نشان‌دهنده میرایی سیستم است، در نتیجه میرایی پیش‌بینی شده برای تیموشینکو کمتر است چون نسبت به اولر-برنولی پایین‌تر است.



شکل ۳- نمودار آرگانند مُد اول، اولر برنولی (مشکی) و تیموشینکو (قرمز)



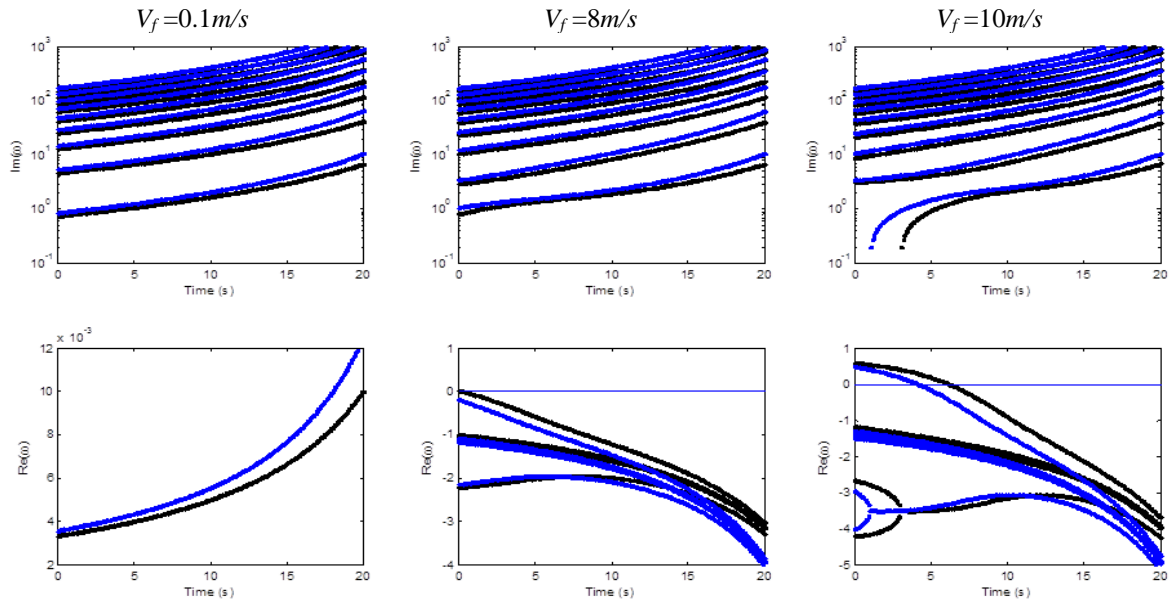
شکل ۲- نمودار آرگانند، اولر برنولی (مشکی) و تیموشینکو (قرمز)

نمودار شکل ۳ اولین مود دیاگرام آرگانند فرکانسی که توسط نظریه‌ی اولر برنولی و تیموشینکو به دست آمده است را نشان می‌دهد. این نمودار نشان می‌دهد که مقادیر فرکانسی برای سرعت‌های صفر کاملاً به نظریه‌ی اولر برنولی نزدیک است. علاوه بر این ما می‌توانیم بفهمیم که با افزایش مقادیر سرعت، فرکانس ارتعاشی نظریه تیموشینکو مقادیر نسبت به اولر برنولی افزایش پیدا می‌کند. در ضمن می‌توانید گفت که در سرعت‌های کم، نتایج لوله تیموشینکو با لوله اولر برنولی همخوانی دارد و اختلاف آن‌ها ناچیز است، اما در سرعت‌های بالاتر این اختلاف بیشتر می‌شود.

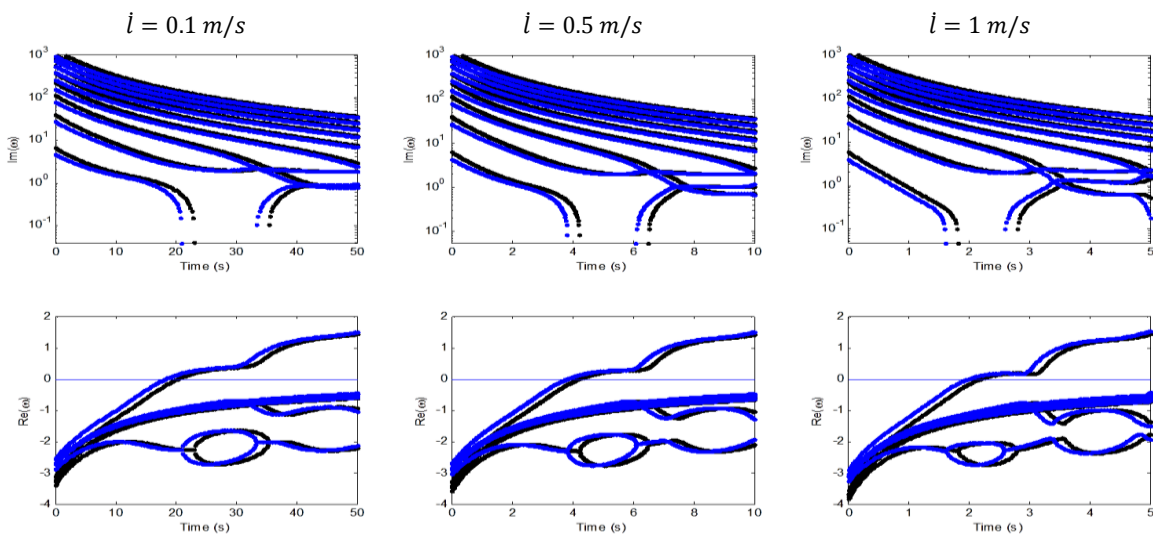
نمودارهای شکل ۴، دیاگرام‌های فرکانسی آرگانند برای سرعت‌های مختلف انبساط و انقباض را نشان می‌دهند. در اولین مود ارتعاشی، لوله تیموشینکو با میرایی بالاتر و فرکانس نوسانی بیشتر شروع به حرکت کرده و این حالت را تا پایان مود اول حفظ می‌کند اما در مود دوم و سوم، میرایی تیموشینکو کاهش پیدا کرده اما فرکانس نوسانی تیموشینکو همچنان بالاتر است. در ابتدای مود سوم ناپایداری در تیموشینکو دیرتر اتفاق می‌افتد اما فرکانس نوسانی در لوله تیموشینکو تا پایان مود سوم بالا باقی می‌ماند. در شکل ۵ همان‌طور که مشخص است در لوله تیموشینکو در زمان کمتری سیستم ناپایدار شده و فرکانس بحرانی نیز کاهش پیدا می‌کند.

# نخستین کنفرانس ملی فناوری‌های نوین در مهندسی مکانیک و سازه

www.mechaconf.ir



شکل ۳- نمودار قسمت‌های موهومی و حقیقی  $\lambda$  مد ارتعاشی لوله‌ی عمودی حاوی سیال با  $l(t) = 3 - 0.1t$ ،  $\beta = 0.2$ ،  $\gamma = 0$  و سرعت‌های سیال مختلف، اولر-برنولی (مشکی) و تیموشینکو (آبی)



شکل ۴- نمودار قسمت‌های حقیقی و موهومی  $\lambda$  مد ارتعاشی لوله‌ی عمودی حاوی سیال با  $l(t) = 1 + \dot{l}t$ ،  $\beta = 0.2$ ،  $\gamma = 0$  و سرعت‌های مختلف انقباض و انبساط، اولر-برنولی (مشکی) و تیموشینکو (آبی)





#### ۴. نتیجه گیری

خیلی از قوانین عمومی لوله‌های حاوی سیال به وسیله‌ی تئوری اولر برنولی به دست آمده است اما روش تیموشینکو به خاطر اینکه علاوه بر نیروی دورانی نیروی برشی را هم در نظر می‌گیرد بسیار دقیق‌تر از روش اولر برنولی است. مطالعات نشان داده است که برای تمام سیستم‌های لوله‌های واقعی  $\varphi$  صفر می‌باشد و تأثیر این نیرو بر روی دینامیک سیستم تقریباً صفر است و فرکانس بحرانی با ضریب سختی رابطه مستقیم داشته به‌ویژه برای مودهای ابتدای حرکت. پارامتری که در رفتار لوله‌های حاوی سیال نقش کلیدی بازی می‌کند پارامتر نسبت جرم یا همان  $\beta$  می‌باشد. در نمودار آرگاند دیاگرام مقدار  $\beta$  بسیار مهم است به طوری که با تغییر کوچکی در مقدار  $\beta$  شکل نمودارها کاملاً عوض می‌شود. نیروی جاذبه اساساً رفتار دینامیکی سیستم‌های با ناپایداری نوسانی را تغییر نمی‌دهد اما چون مساحت زیر این نمودار گراف پایداری اساساً میزان پایداری سیستم را نشان می‌دهد چون با افزایش گاما مساحت زیر نمودار نیز افزایش پیدا کرده بود نشان می‌دهد که با افزایش گاما پایداری سیستم نیز افزایش پیدا می‌کند هم‌چنین با افزایش بتا سرعت بحرانی نیز افزایش پیدا می‌کند یعنی سیستم پایدارتر می‌شود.



## مراجع

1. Païdoussis, M.P., Li, X.G., (1993), "Pipes conveying fluid: a model dynamical problem," *Journal of Fluids and Structures*, **7**(2), pp137–204.
2. Benjamin, T.B. (1961), "Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid," *Proceedings of the Royal Society*, **261**(1307), pp457–486.
3. Gregory, R.W., Païdoussis, M.P., (1966), "Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid," *Proceedings of the Royal Society*, **293**(1435), pp512–527.
4. Panussis, D.A., Dimarogonas, A.D., (2000), "Linear in-plane and out-of-plane lateral vibrations of a horizontally rotating fluid-tube cantilever," *Journal of Fluids and Structures*, **14**(1), pp1–24.
5. Yoon, H.I., Son, I.S., (2007), "Dynamic response of rotating flexible cantilever pipe conveying fluid with tip mass," *International Journal of Mechanical Sciences*, **49**(7), pp.878–887.
6. Kheiri, M., Païdoussis, M.P., Amabili, M., (2014), "Dynamics of a pipe conveying fluid flexibly restrained at the ends," *Journal of Fluids and Structures*, **49**, pp360–385.
7. Kheiri, M., Païdoussis, M.P., (2014), "On the use of generalized Hamilton's principle for the derivation of the equation of motion of a pipe conveying fluid," *Journal of Fluids and Structures*, **50**, pp.18–24.
8. Al-Bedoor, B.O., Khulief, Y.A., (1996), "An approximate analytical solution of beam vibrations during axial motion," *Journal of Sound and Vibration*, **192**(1), pp159–171.
9. Al-Bedoor, B.O., Khulief, Y.A., (1996), "Vibrational motion of an elastic beam with prismatic and revolute joints," *Journal of Sound and Vibration*, **190**(2), pp195–206.
10. Wang, P.K.C., Wei, J.D., (1987), "Vibrations in a moving flexible robot arm," *Journal of Sound and Vibration*, **116**(1), pp149–160.
11. Wang, L.H., Hu, Z.D., Ju, J.W., (2009), "Hamiltonian dynamic analysis of an axially translating beam featuring time-variant velocity," *Acta Mechanica*, **206**(3–4), pp149–161.
12. Taleb, I.A., Misra, A.K., (1981), "Dynamics of an axially moving beam submerged in a fluid," *Journal of Hydronautics*, **15**(1), pp62–66.
13. Gosselin, F.G., Païdoussis, M.P., Misra, A.K., "Stability of a deploying/extruding beam in dense fluid," *Journal of Sound and Vibration*, **299**(1–2), pp123–142.

۱۴. شمس، ع.، (۱۳۹۷)، "تأثیر ارتعاشات لوله عمودی حاوی سیال به کمک تئوری تیر تیموشینکو،" پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی واحد نجف آباد، نجف آباد.