

مدل‌سازی دینامیکی و تحلیل اثر لقی بر ارتعاشات آشوبناک یک سیستم چرخ‌دنده‌ای

علی سلیمانی^۱، سید احسان مسئله‌گو^۲، حسین سعیدی مسینه^۳

^۱استادیار، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد soleimani@pmc.iaun.ac.ir
^۲دانشجوی کارشناسی ارشد، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد masalegoo@smc.iaun.ac.ir
^۳دانشجوی کارشناسی ارشد، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد h.saeedi@smc.iaun.ac.ir

چکیده

در این پژوهش با در نظر گرفتن اثر لقی بین دندانه‌ها و خطای انتقال، مدل دینامیکی یک سیستم چرخ‌دنده‌ای استخراج شده است. با توجه به اینکه خطای انتقال استاتیکی به دلایل مختلفی از جمله خطاهای ساخت و تغییر شکل دندانه وجود می‌آید و ماهیت متناوب دارد، یک سری فوریه برای تقریب آن استفاده شده است. لقی که خطاهای نصب و سایش موجب آن می‌شود و نیز به منظور روانکاری بهتر و کاهش برهمکنش بین دندانه‌ها، لازم است که مقداری لقی بین چرخ‌دنده‌های درگیر وجود داشته باشد نیز به صورت یک تابع مدل‌سازی شده است. گشتاور تحریک به صورت سینوسی و گشتاور بار به صورت ثابت لحاظ شده است. پس از مدل‌سازی موارد ذکر شده، معادلات حاکم بر مساله استخراج شده است و با حل آنها به صورت عددی، پاسخ ارتعاشی سیستم چرخ‌دنده‌ای بدست آمده است. به منظور تحلیل اثر مقدار لقی بر ارتعاشات، پاسخ سیستم به ازای مقادیر مختلف لقی بدست آمده است. پاسخ زمانی، طیف فرکانسی و نمودار صفحه فاز برای بررسی این تاثیر رسم شده است. نتایج نشان می‌دهد که رفتار ارتعاشی مجموعه آشوبناک است و مقدار لقی تاثیر زیادی بر این رفتار آشوبناک دارد.

می‌باشند. این عوامل مختلف غیرخطی می‌توانند باعث رخداد پدیده‌های متنوع غیرخطی مانند پاسخ‌های غیرمتناوب و آشوب شوند. در همین راستا تحقیقات گسترده‌ای تا کنون انجام شده است که در ادامه برخی از آنها مورد بررسی قرار می‌گیرد. پارامتر لقی به عنوان یکی از عوامل غیرخطی در چرخ‌دنده‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. مدل دو درجه آزادی به منظور بررسی تاثیر لقی استفاده شده است [۲] و با استفاده از روش‌های عددی و تقریبی، پاسخ‌های متناوب و آشوبناک بدست آمده است. در تحقیقی دیگر [۳]، لقی و سختی متغیر به عنوان عوامل غیرخطی در نظر گرفته شده است و در پاسخ، دوشاخگی و آشوب بدست آمده است. پاسخ‌های دینامیکی و پایداری سیستم روتور-چرخ‌دنده-یاتاقان نیز مورد بررسی قرار گرفته است و رفتارهای دینامیکی غیرمتناوب زیادی بدست آمده است [۴]. هم‌چنین سیستم موتور-چرخ‌دنده با در نظر گرفتن لقی مورد بررسی قرار گرفته و پاسخ‌های متناوب و آشوبناک مشاهده شده است [۵]. در این پژوهش یک سیستم چرخ‌دنده مدل‌سازی و سپس به کمک این مدل، رفتارهای دینامیکی متنوع بررسی شده است.

مدل‌سازی دینامیکی سیستم چرخ‌دنده‌ای

مدل دینامیکی یک جفت چرخ‌دنده در شکل ۱ نشان داده شده است که بر اساس همین مدل، معادلات حاکم بر ارتعاشات سیستم استخراج می‌شوند. چرخ‌دنده‌ها به صورت دو دیسک که بیانگر اینرسی آنها می‌باشند، مدل شده‌اند و درگیری دو چرخ‌دنده به صورت فنر و دمپر مدل‌سازی شده است. در این مدل فقط ارتعاشات پیچشی چرخ‌دنده‌ها در نظر گرفته شده است و از ارتعاش عرضی شفت نگهدارنده صرف‌نظر شده است. گشتاورهای اعمالی به چرخ‌دنده‌ها T_1 و T_2 می‌باشند که با توجه به نوع ماشین محرک، گشتاور تحریک T_1 می‌تواند متناوب باشد. بر همین اساس، گشتاور تحریک T_1 به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$T_1 = T_{1m} + T_{1a} \cos(\omega_T t) \quad (1)$$

که در آن T_{1m} مقدار متوسط گشتاور تحریک و T_{1a} دامنه نوسان آن می‌باشد. ω_T فرکانس نوسانات گشتاور تحریک است که در این تحقیق یکبار برابر با فرکانس دوران شفت ورودی ω_1 و یکبار برابر با فرکانس درگیری چرخ‌دنده ω_m فرض شده است. مقدار گشتاور اعمالی

واژه‌های کلیدی

چرخ‌دنده، آشوب، ارتعاشات، خطای انتقال، لقی

مقدمه

چرخ‌دنده‌ها یکی از مهم‌ترین اجزا در ماشین آلات دوار صنعتی و سیستم‌های انتقال قدرت می‌باشند و به همین دلیل مدل‌سازی دینامیک حاکم بر آنها و تحلیل پاسخ ارتعاشی آنها از مباحث مهم تحقیقاتی به شمار می‌آید. برای مدتی طولانی، دینامیک سیستم‌های چرخ‌دنده‌ای با استفاده از مدل‌های خطی مورد بررسی قرار می‌گرفت [۱]. اما با بررسی‌های دقیق‌تر مشخص گردید که برای مشاهده و تحلیل پدیده‌هایی که در پاسخ ارتعاشی چرخ‌دنده‌ها رخ می‌دهد، نیاز به مدل غیرخطی می‌باشد. عوامل مختلفی باعث غیرخطی شدن مدل دینامیکی چرخ‌دنده‌ها می‌شوند که برخی از مهم‌ترین آنها شامل پس‌زنی، خطای انتقال، اصطکاک بین دندانه‌ها، سختی متغیر

به منظور روانکاری بهتر و کاهش برهمکنش بین دندانه‌ها، لازم است که مقداری لقی بین چرخ‌دنده‌های درگیر وجود داشته باشد. همچنین خطاهای نصب و سایش دندانه‌ها نیز باعث ایجاد لقی می‌شوند. برای مدل‌سازی لقی بین دو دندانه از تابع $f(u)$ به صورت زیر استفاده شده است [۸].

$$f(u) = \begin{cases} u - b & u > b \\ 0 & -b \leq u \leq b \\ u + b & u < -b \end{cases} \quad (۴)$$

بنابراین، معادلات حاکم بر سیستم چرخ‌دنده‌ای نشان داده شده در شکل ۱ به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 + R_1 c_m \dot{u} + R_1 k_m f(u) &= T_1 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 - R_2 c_m \dot{u} - R_2 k_m f(u) &= -T_2 \end{aligned} \quad (۵)$$

با استفاده از معادله (۳)، معادلات (۵) به صورت زیر ساده می‌شوند.

$$m \ddot{u} + c_m \dot{u} + k_m f(u) = F_e + F_T \quad (۶)$$

که پارامترهای این معادله به صورت زیر هستند.

$$\begin{aligned} m &= \frac{I_1 I_2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2} \\ F_e &= -m \ddot{e} \\ F_T &= m \left(\frac{T_1 R_1}{I_1} + \frac{T_2 R_2}{I_2} \right) \end{aligned} \quad (۷)$$

برای حل معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات پیچشی سیستم-چرخ‌دنده‌ای، لازم است که مقادیر پارامترهای ثابت معادله مشخص باشند. به عنوان یک مطالعه موردی، مشخصات سیستم چرخ‌دنده‌ای در جدول آورده شده است.

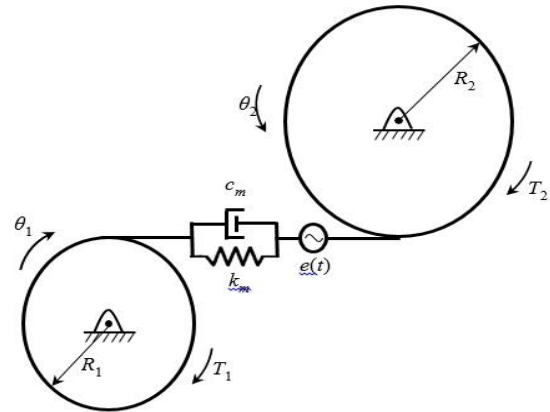
جدول ۲: مشخصات سیستم چرخ‌دنده‌ای

جرم (kg)	ممان اینرسی (kg.mm ²)	شعاع مبنا (mm)	تعداد دندانه	پارامترهای درگیری	پارامترهای تحریک
m_1	I_1	R_1	N_1	k_m	ω_1
۱/۹	۴۸۰۰	۶۰/۶۱	۴۳	۹۰۰ N/mm	۱۵۰۰ rpm
m_2	I_2	R_2	N_2	c_m	T_{1m}
۰/۷۲	۸۰۰	۳۹/۴۷	۲۸	۵۰۰ N.s/m	۳۸ N.m

نتایج

در این قسمت فرکانس گشتاور تحریک برابر با فرکانس دوران پینیون $\omega_T = \omega_1$ و دامنه گشتاور تحریک نصف متوسط آن یعنی $\frac{T_{1a}}{T_{1m}}$ در 0.5 در نظر گرفته شده است. پاسخ ارتعاشی سیستم چرخ‌دنده‌ای در این حالت و به ازای مقادیر مختلف لقی b بدست آمده است. در شکل پاسخ زمانی، طیف فرکانسی و صفحه فاز به ازای $b=0$ نشان داده شده است. در این حالت اثر غیرخطی لقی تبدیل به خطی می‌شود و به همین دلیل پاسخ ارتعاشی فقط شامل فرکانس‌های تحریک می‌باشد. فرکانس‌های موجود در این پاسخ شامل فرکانس دوران پینیون و چهار هارمونیک اول فرکانس درگیری چرخ‌دنده می‌باشند. این فرکانس‌ها در گشتاور تحریک و خطای انتقال استاتیکی وجود داشتند که در معادله به عنوان ترم‌های تحریک بودند.

بر چرخ‌دنده ۲ ثابت در نظر گرفته شده که از رابطه $T_2 = \frac{R_2}{R_1} T_{1m}$ بدست می‌آید.



شکل ۱: مدل دینامیکی یک جفت چرخ‌دنده

خطای انتقال استاتیکی $e(t)$ به دلایل مختلفی از جمله خطاهای ساخت و تغییر شکل دندانه بوجود می‌آید و یکی از عوامل مهم تولید ارتعاش در چرخ‌دنده‌ها می‌باشد. با توجه به تغییر متناوب جفت‌دندانه‌های درگیر، خطای انتقال استاتیکی نیز ماهیتی متناوب دارد و بنابراین می‌توان به کمک سری فوریه آن را مدل‌سازی نمود و در معادلات حاکم بر سیستم چرخ‌دنده‌ای به کار برد. خطای انتقال استاتیکی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$e(t) = \sum_j E_j \cos(j\omega_m t - \varphi_j) \quad (۲)$$

در معادله (۲) $\omega_m = N_1 \omega_1 = N_2 \omega_2$ فرکانس درگیری چرخ‌دنده^۲ است. E_j و φ_j نیز دامنه و فاز خطای انتقال استاتیکی هستند که به کمک اعمال تبدیل فوریه بر روی سیگنال خطا بدست می‌آیند. مقادیر E_j و φ_j برای چهار هارمونیک اول از تحلیل انجام شده در [۶] استخراج شده و در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱: نسبت دامنه و فاز برای چهار هارمونیک اول خطای انتقال استاتیکی

E_j	φ_j (rad)	j
۱۰/۹۳	۰/۹۳۵	۱
۲/۹۲	۱/۹۹	۲
۲/۷۳	۲/۵۲	۳
۲/۵۰	۲/۸۸	۴

خطای انتقال دینامیکی^۳ نیز به صورت $e_d(t) = R_1 \theta_1 - R_2 \theta_2$ تعریف می‌شود [۷] و بنابراین خطای انتقال واقعی را می‌توان به صورت زیر نوشت.

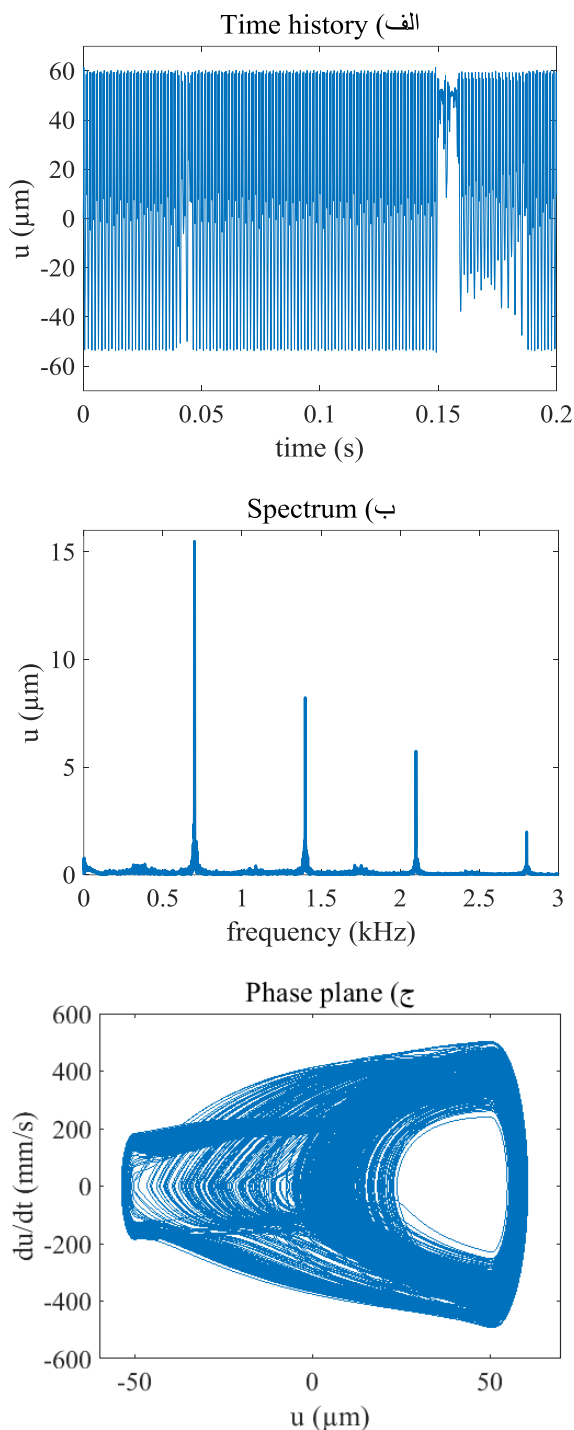
$$u = e_d(t) - e(t) = R_1 \theta_1 - R_2 \theta_2 - e(t) \quad (۳)$$

^۱ Static transmission error

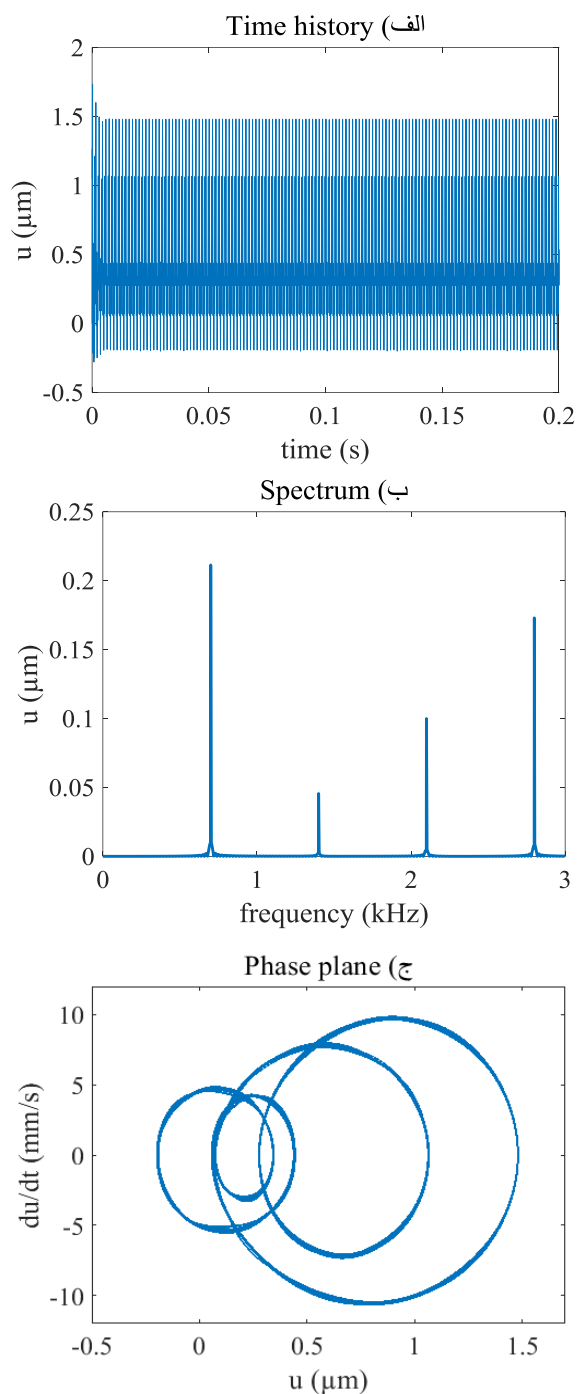
^۲ Gear meshing frequency

^۳ Dynamic transmission error

اطراف هارمونیک‌های فرکانس درگیری هستند. در صفحه فاز با افزایش مقدار لقی، جذب مسیرها با آشوب بیشتری به سمت جاذب-هاتفاق افتاده است.



شکل ۳: الف) پاسخ زمانی، ب) طیف فرکانسی و ج) صفحه فاز به ازای $b=50 \mu\text{m}$



شکل ۲: الف) پاسخ زمانی، ب) طیف فرکانسی و ج) صفحه فاز به ازای $b=0$

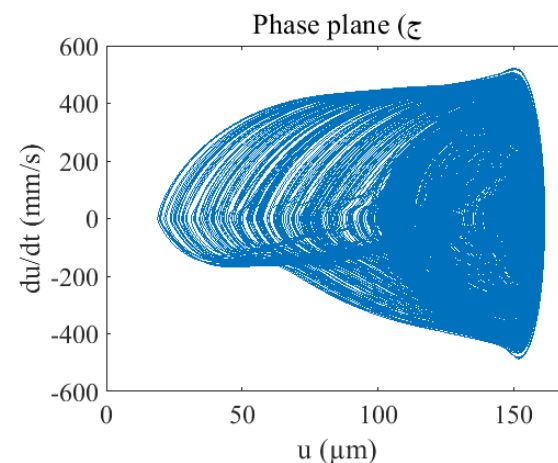
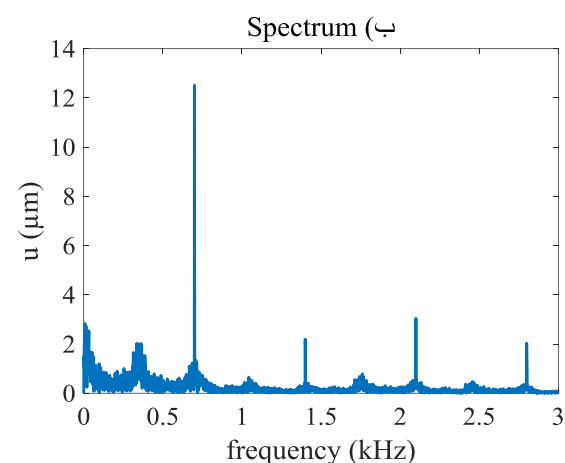
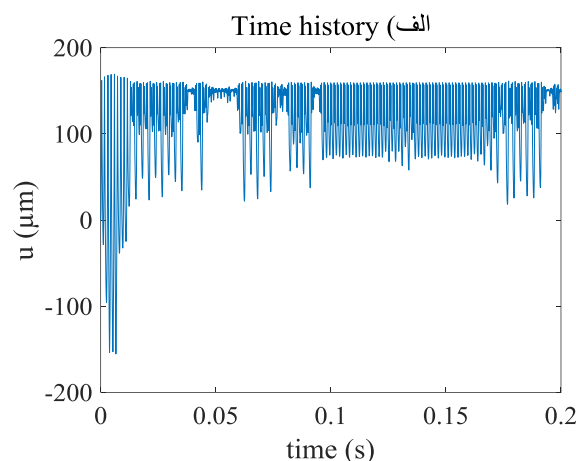
با افزایش مقدار لقی به ۵۰ و ۱۵۰ میکرومتر، رفتارهای غیرخطی در پاسخ ارتعاشی سیستم ظاهر می‌شوند. پاسخ زمانی، طیف فرکانسی و صفحه فاز برای لقی ۵۰ و ۱۵۰ میکرومتر به ترتیب در شکل ۳ و شکل ۴ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش مقدار لقی، تاثیر فرکانس دوران پنینون نسبت به هارمونیک‌های فرکانس درگیری بیشتر شده است. در زمانی که دنده‌ها در حال طی کردن لقی هستند درگیری وجود ندارد و بنابراین با افزایش مقدار لقی، زمان درگیری کمتر خواهد شد و بنابراین تاثیر فرکانس درگیری نیز در پاسخ کاهش می‌یابد. وجود رفتار غیرخطی نیز در طیف فرکانس و صفحه فاز مشخص است. با افزایش لقی، فرکانس‌های بیشتری در طیف فرکانسی ظاهر شده‌اند که معمولاً به صورت باندهای کناری

فرکانس دوران پینیون و دامنه گشتاور تحریک نصف متوسط آن است، انجام شده است. پاسخ ارتعاشی سیستم چرخ‌دنده‌ای در این حالت و به ازای مقادیر مختلف لقی بدست آمد.

در حالت بدون لقی، اثر غیرخطی لقی تبدیل به خطی می‌شود و به همین دلیل پاسخ ارتعاشی فقط شامل فرکانس‌های تحریک می‌باشد. فرکانس‌های موجود در این پاسخ شامل فرکانس دوران پینیون و چهار هارمونیک اول فرکانس درگیری چرخ‌دنده می‌باشند. با اضافه شدن لقی و افزایش آن، رفتارهای غیرخطی در پاسخ ارتعاشی سیستم ظاهر شدند و تاثیر فرکانس دوران پینیون نسبت به هارمونیک‌های فرکانس درگیری بیشتر گردید. در زمانی که دنده‌ها در حال طی کردن لقی بودند درگیری وجود نداشت و بنابراین با افزایش مقدار لقی، زمان درگیری کمتر گردید و بنابراین تاثیر فرکانس درگیری نیز در پاسخ کاهش یافت. وجود رفتار غیرخطی نیز در طیف فرکانس و صفحه فاز مشخص شد. با افزایش لقی، فرکانس‌های بیشتری در طیف فرکانسی ظاهر شده‌اند که معمولاً به صورت باندهای کناری اطراف هارمونیک‌های فرکانس درگیری می‌باشند. در صفحه فاز با افزایش مقدار لقی، حرکت مسیرها و جذب آنها به سمت جاذب‌ها با آشوب بیشتری اتفاق افتاده است.

مراجع و منابع

- [1] H.N. Ozguven, D.R. Houser, Mathematical models used in gear dynamics-a review, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 121, No. 3, pp. 383–411, 1988.
- [2] C. Padmanabhan, R. Singh, Spectral coupling issues in a two-degree-of freedom system with clearance non-linearities, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 155, No.2, pp. 209–230, 1992
- [3] K. Sato, S. Yamamoto, T. Kawakami, Bifurcation sets and chaotic states of a geared system subjected to harmonic excitation, *Computational Mechanics*, Vol. 7, pp. 173–182, 1991.
- [4] S.Theodossiades, S.Natsiavas, ongeared rotor dynamic systems with oil journal bearings, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 243, No. 4, pp. 721-745, 2001.
- [5] S. Theodossiades, S. Natsiavas, Periodic and chaotic dynamics of motor-driven gear-pair systems with backlash, *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 12, pp. 2427-2440, 2001.
- [6] G. Bonori, F. Pellicano, Non-smooth dynamics of spur gears with manufacturing errors, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 306, pp. 271–283, 2007.
- [7] A. Kahraman, R. Singh, Nonlinear dynamics of a geared rotor- bearing system with multiple clearances, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 144, No. 3, pp. 469–506, 1991.



شکل ۴: الف) پاسخ زمانی، ب) طیف فرکانسی و ج) صفحه فاز به ازای $b=150\mu\text{m}$

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله، مدل‌سازی دینامیکی و تحلیل پاسخ ارتعاشی یک سیستم چرخ‌دنده مورد بررسی قرار گرفت. تحلیل ارتعاشات این سیستم چرخ‌دنده در حالتی که فرکانس گشتاور تحریک برابر با