فصل هفتم: سیستم های کنترل فیدبک حالت

با اندازه گیری متغیرهای حالت و فیدبک آنها در ساختار حلقه بسته می توان مقادیر ویژه سیستم را جابجا کرد و آنها را در محل های مطلوبی قرار داد. این طراحی در حوزه فضای حالت نتیجه تحقیقات آقایان برترام، روزنبراک، ریسانن و پاپوف در دهه شصت میلادی بوده است.

سیستم مرتبه n روبرو را در نظر بگیرید:

$$G(s)=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

فرض کنید که تحقق G به صورت روبرو باشد:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$
$$y(t)=Cx(t)$$

همچنبن فرض کنید که سیستم دارای قطب های ناپایدار و یا نزدیک محور عمودی باشد. می خواهیم قطبهای سیستم را از محل های نامطلوب آنها به محل های مطلوب منتقل کنیم.

فرض کنید که قطب های مطلوب حلقه بسته ریشه های معادله زیر باشند:

$$\Delta_d(s)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0=0$$

فصل هفتم: سیستم های کنترل فیدبک حالت

برای انتقال قطب ها به محل های مطلوب از فیدبک حالت روبرو استفاده می کنیم:

$$u(t) = -Kx(t)$$

که در آن K بردار بهره فیدبک حالت است و باید طراحی شود:

$$K = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$$

با جایگذاری قانون فیدبک حالت در معادله حالت سیستم داریم:

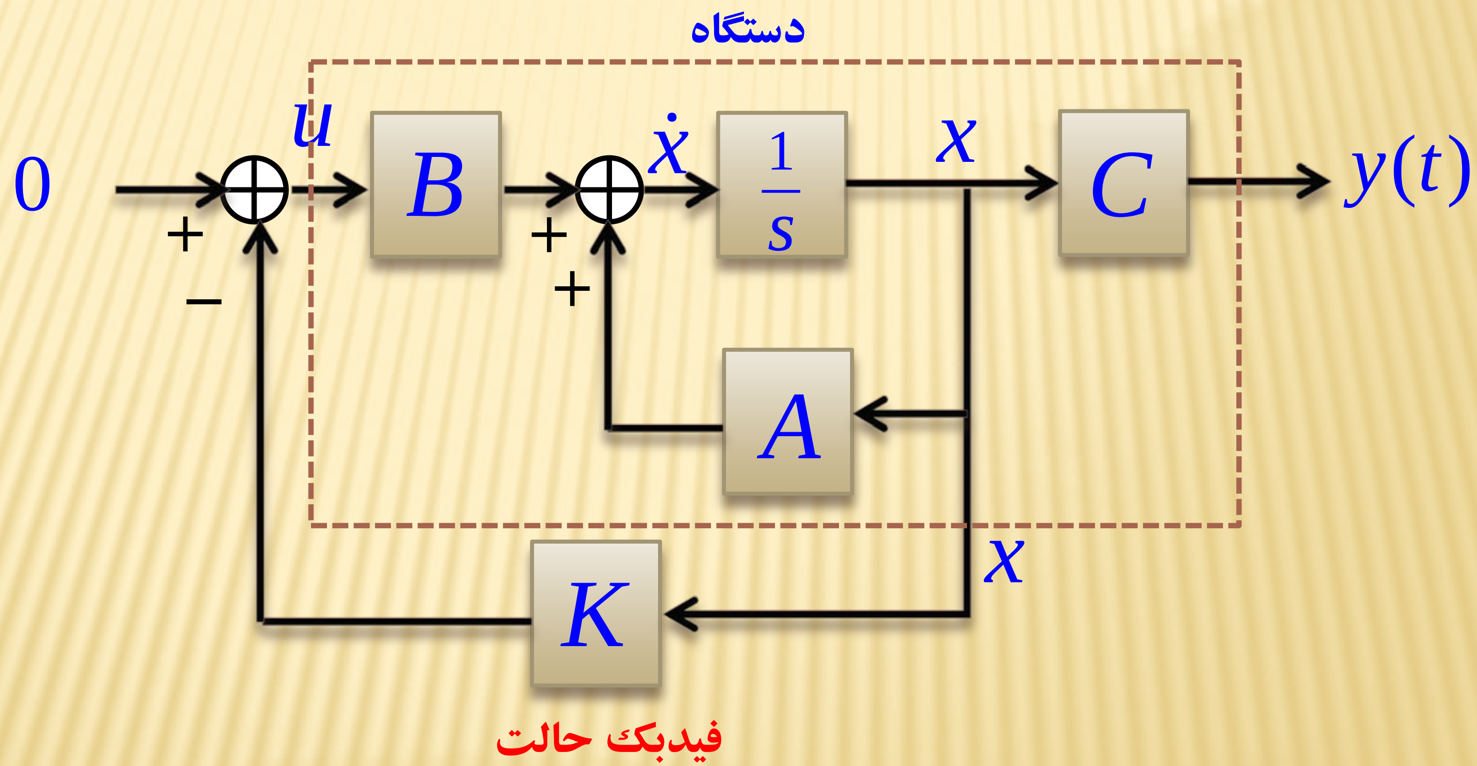
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ u(t) &= -Kx(t) \end{aligned} \Rightarrow \dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$$

حال، برای جایابی تمام قطبهای حلقه بسته در مکان های مطلوب، K را به نحوی انتحاب می کنیم که:

$$\left| sI - A + BK \right| = \Delta_d(s) \Rightarrow K = ?$$

فصل هفتم: سیستم های کنترل فیدبک حالت

شکل زیر دیاگرام فیدبک حالت را نشان می دهد:



فصل هفتم: سیستم های کنترل فیدبک حالت

مثال: سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&5&0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-2\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}x(t)$$

می خواهیم با فیدبک حالت قطب های دستگاه را در محل های مطلوب زیر قرار دهیم:

$$s_{d1}=-1,\quad s_{d2}=-2,\quad s_{d3,4}=-1\pm j$$

بنابراین، چند جمله ای مشخصه مطلوب عبارت است از:

$$\Delta_d(s)=(s+1)(s+2)(s+1+j)(s+1-j)$$
$$=s^4+5s^3+10s^2+10s+4$$

$$\left|sI-A+BK\right|=\left|\begin{bmatrix}s&-1&0&0\\0&s&1&0\\0&0&s&-1\\0&0&-5&s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1&k_2&k_3&k_4\end{bmatrix}\right|$$

فصل هفتم: سیستم های کنترل فیدبک حالت

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ k_1 & s+k_2 & k_3 & k_4 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -2k_1 & -2k_2 & -5-2k_3 & s-2k_4 \end{vmatrix} = s^4+5s^3+10s^2+10s+4$$

$$\Rightarrow k_1=-1.33,\ \ k_2=-3.33,\ \ k_3=-8.16,\ \ k_4=-4.16$$

فصل هفتم: سیستم های کنترل فیدبک حالت

روش های تعیین فیدبک حالت: برای تعیین بهره فیدبک حالت از یکی از روش های زیر استفاده می کنیم:

روش اول: حل معادله روبرو:

$$\underbrace{|sI - A + BK| = \Delta_d(s)}_{\text{چند جمله ای مشخصه مطلوب}} \Rightarrow K = ?$$

روش دوم: روش آکرمن:

$$K = \underbrace{[0,0,\ldots,0,1]U^{-1}}_{\text{سطر آخر عکس ماتریس کنترل پذیری}}\Delta_d(A)$$

روش سوم: روش بس و گیورا:

$$K = (\alpha - a)\Psi^{-1}U^{-1}$$

$$\alpha = [\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0]$$

$$a = [a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0]$$

$$U = [B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & \ldots & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

مثال: سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}1 & 6 & -3\\ -1 & -1 & 1\\ -2 & 2 & 0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x(t)$$

می خواهیم با فیدبک حالت قطب های دستگاه را در محل های مطلوب زیر قرار دهیم:

$$s_{d1}=-1,\quad s_{d2}=-2,\quad s_{d3}=-3$$

ابتدا کنترل پذیری سیستم را بررسی می کنیم:

$$U=[B, AB, A^2B]=\begin{bmatrix}1 & 4 & -2\\ 1 & -1 & -3\\ 1 & 0 & -10\end{bmatrix} \Rightarrow \left|U\right|\neq 0 \Rightarrow$$ **Fully controllable**

بنابراین، چند جمله ای مشخصه مطلوب عبارت است از:

$$\Delta_d(s)=(s+1)(s+2)(s+3)=s^3+6s^2+11s+6$$

$$\Delta_d(A)=(A+I)(A+2I)(A+3I)=\begin{bmatrix}24 & 48 & -24\\ -26 & -28 & 26\\ -52 & -56 & 52\end{bmatrix}$$

فصل هفتم: سیستم های کنترل فیدبک حالت

روش آکرمن:

$$\Rightarrow\ K=\left[0,0,1\right]U^{-1}\Delta_d(A)=\left[0,0,1\right]\begin{bmatrix}1 & 4 & -2\\ 1 & -1 & -3\\ 1 & 0 & -10\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}24 & 48 & -24\\ -26 & -28 & 26\\ -52 & -56 & 52\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ K=\left[0.0278,\ 0.1111,\ -0.1389\right]\begin{bmatrix}24 & 48 & -24\\ -26 & -28 & 26\\ -52 & -56 & 52\end{bmatrix}$$

بنابراین، فیدبک حالت عبارت است از:

$$\Rightarrow\ K=[5,\ 6,\ -5] \quad \Rightarrow\ u(t)=-Kx(t)=5x_1(t)+6x_2(t)-5x_3(t)$$

فصل هفتم: سیستم های کنترل فیدبک حالت

روش بس و گیورا:

چند جمله ای مشخصه سیستم:

$$\Delta(s) = |sI - A| = s^3 - 3s + 2 = (s-1)^2(s+2)$$

$$\downarrow$$

$$a = [0, -3,\ 2]$$

$$\Delta_d(s) = (s+1)(s+2)(s+3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

$$\downarrow$$

$$\alpha = [6, 11, 6]$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad U = [B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad K = [6,\ 14,\ 4]\Psi^{-1}U^{-1} = [5,\ 6,\ -5]$$

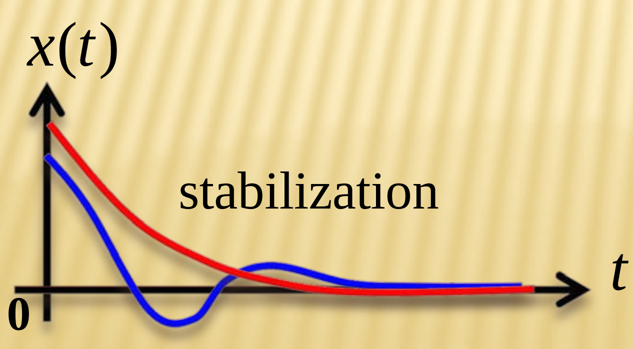
فصل هفتم: سیستم های کنترل فیدبک حالت

نکته یک: صفر های حلقه بسته همان صفرهای حلقه باز هستند و در نتیجه فیدبک حالت بر روی صفرهای سیستم تأثیر گذار نیست و تنها محل قطب ها را تغییر می دهد.

نکته دو: تحت فیدبک حالت کنترل پذیری سیستم حفظ می شود ولی تضمینی برای حفظ شدن مشاهده پذیری وجود ندارد. با توجه به آنکه صفرهای سیستم تحت فیدبک حالت تغییری نمی کنند، چنانچه فیدبک حالت باعث جابجایی قطب ها به محل صفرها شود، مشاهده پذیری از بین می رود.

طراحی کنترل کننده ردیاب:

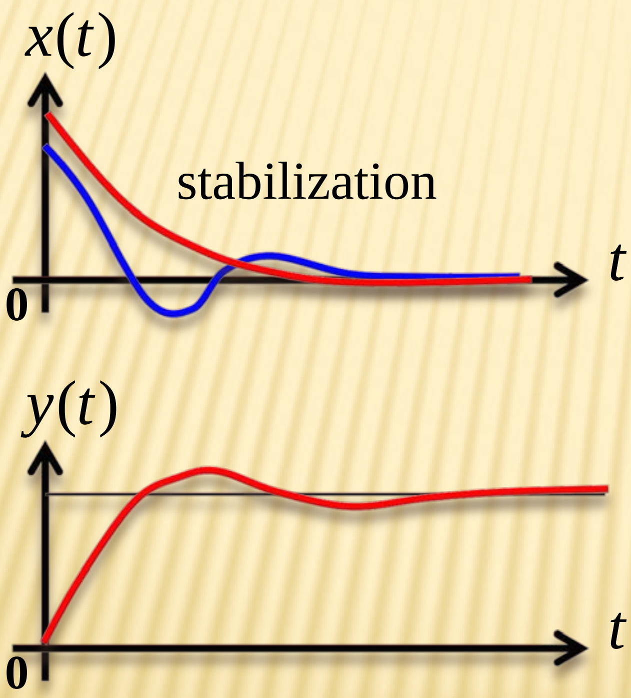
تا الان ورودی مرجع را صفر در نظر گرفتیم و با فیدبک حالت وادار کردیم که حالت ها به صورت مجانبی به صفر همگرا شوند. به این مسأله در کنترل، **پایدارسازی** گفته می شود.



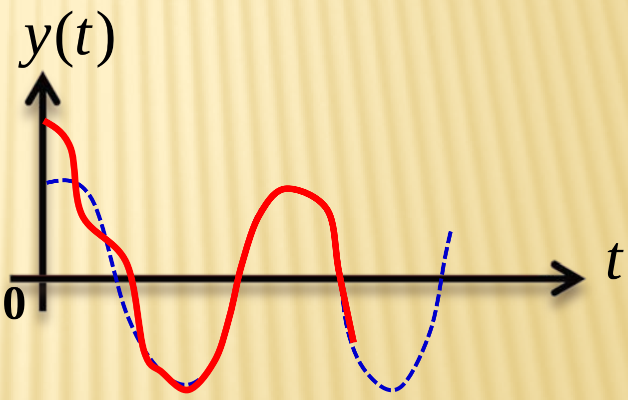
فصل هفتم: سیستم های کنترل فیدبک حالت

طراحی کنترل کننده ردیاب:

وقتی ورودی مرجع غیر صفر باشد، و بخواهیم خروجی ورودی مرجع ثابت را دنبال کند، مسأله را **رگولاسیون** می نامیم. اگر بخواهیم خروجی ورودی مرجع متغیر با زمان را دنبال کند، مسأله را **ردیابی** می گوییم.



Regulation or set point tracking



Tracking problem

فصل هفتم: سیستم های کنترل فیدبک حالت

طراحی کنترل کننده ردیاب:

برای حل مسأله ردیابی ورودی را به صورت زیر انتخاب می کنیم:

$$\boxed{u(t) = Kx(t) + pr(t)}$$

بهره فیدبک حالت   بهره فیدفوروارد

با جایگذاری در معادله حالت و خروجی داریم:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (sI - A - BK)X(s) = x(0) + BpR(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(s) = (sI - A - BK)^{-1}x(0) + (sI - A - BK)^{-1}BpR(s) \\ Y(s) = CX(s) + DKX(s) + DpR(s) \end{cases}$$

فصل هفتم: سیستم های کنترل فیدبک حالت

طراحی کنترل کننده ردیاب:

$$Y(s)=(C+DK)\Big((sI-A-BK)^{-1}x(0)+(sI-A-BK)^{-1}BpR(s)\Big)+DpR(s)$$

$$\text{if}\quad x(0)=0 \quad\Longrightarrow\quad G_{cl}(s)=\frac{Y(s)}{pR(s)}=(C+DK)(sI-A-BK)^{-1}B+D$$

تابع تبدیل حلقه بسته

می توان ثابت کرد که برای $R(s)=\frac{r_d}{s}$ داریم:

$$Y(s)=(C+DK)(sI-A-BK)^{-1}\left(x(0)I+(-A-BK)^{-1}Bpr_d\right)$$

$$+G_{cl}(0)pr_ds^{-1}$$

در نتیجه، حروجی سیستم حلقه بسته به صورت زیر محاسبه می شود:

$$y(t)=(C+DK)e^{(A+BK)t}\left(x(0)I+(A+BK)^{-1}Bpr_d\right)+G_{cl}(0)pr_d$$

با گذشت زمان جمله اول صفر می شود:

$$\lim_{x\to\infty}y(t)=G_{cl}(0)pr_d$$

فصل هفتم: سیستم های کنترل فیدبک حالت

طراحی کنترل کننده ردیاب:

با گذشت زمان جمله اول صفر می شود:

$$\lim_{x\to\infty} y(t) = G_{cl}(0)\, p r_d$$

نهایتاً، برای آنکه خروجی ورودی پله با دامنه r_d را دنبال کند، باید داشته باشیم:

$$G_{cl}(0)\, p r_d = r_d \;\Rightarrow\; p = \frac{1}{G_{cl}(0)}$$

در نتیجه، کنترلر به صورت زیر بازنویسی می شود:

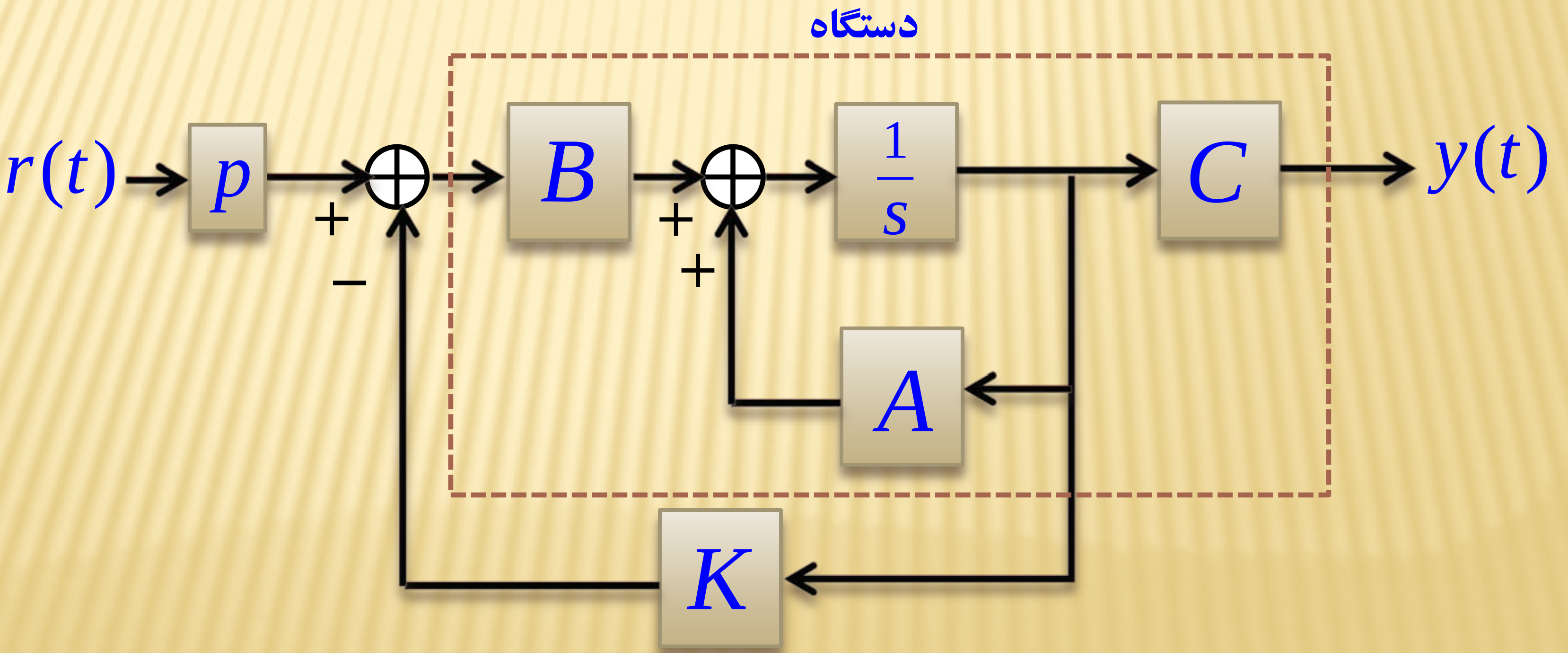
$$u(t) = \underbrace{Kx(t)}_{\text{Feedback control}} + \underbrace{\frac{1}{G_{cl}(0)} r(t)}_{\text{Feedforward control}}$$

$$G_{cl}(0) = (C + DK)(-A - BK)^{-1} B + D$$

فصل هفتم: سیستم های کنترل فیدبک حالت

طراحی کنترل کننده ردیاب:

توجه کنید که با تنظیم مقدار K قطب ها را از مبدأ دورتر می کنیم، جمله $e^{(A+BK)t}$ سریعتر به صفر همگرا می شود و خروجی با سرعت بیشتری ورودی مرجع را دنبال می کند. ولی از طرفی هم با دورتر کردن قطب ها از مبدأ ممکن است که بهره فیدبک حالت بزرگ تر شود و سیگنال های کنترل تولید شده بزرگ تر گردد و عملگرها را به اشباع ببرد.



فصل هفتم: سیستم های کنترل فیدبک حالت

طراحی کنترل کننده ردیاب:

تمرین: سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & 3 & -1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

برای سیستم یک کنترل کننده ردیاب چنان طراحی کنید که پاسخ سیستم حلقه بسته به ورودی پله واحد، میرایی بحرانی شود.

زمان: بیست دقیقه