فصل پنجم: تئوری تحقق

تحقق مینیمال $G(s)=\dfrac{\beta}{D(s)}$

$$G(s)=\frac{\beta}{s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n}=\frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$\Rightarrow \left(s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n\right)Y(s)=\beta U(s)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t)=y(t) \\ x_2(t)=\dot{y}(t)=\dot{x}_1(t) \\ x_3(t)=\ddot{y}(t)=\dot{x}_2(t) \\ \quad\vdots \\ x_n(t)=y^{(n-1)}(t)=\dot{x}_{n-1}(t) \end{cases} \Rightarrow \dot{x}_n(t)=-\alpha_1 x_n(t)-\cdots-\alpha_n x_1(t)+\beta u(t)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}x(t)$$

فصل پنجم: تئوری تحقق

تحقق مینیمال $G(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$

$$G(s)=\frac{\bar{\beta}_0 s^n+\bar{\beta}_1 s^{n-1}+\cdots+\bar{\beta}_{n-1}s+\bar{\beta}_n}{\bar{\alpha}_0 s^n+\bar{\alpha}_1 s^{n-1}+\cdots+\bar{\alpha}_{n-1}s+\bar{\alpha}_n}=\underbrace{\frac{\beta_1 s^{n-1}+\cdots+\beta_{n-1}s+\beta_n}{s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n}}+d$$

$$d=\lim_{s\to\infty}G(s)=\frac{\bar{\beta}_0}{\bar{\alpha}_0}$$

$$\hat{G}(s)=\frac{\beta_1 s^{n-1}+\cdots+\beta_{n-1}s+\beta_n}{s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n}=\frac{Y(s)}{U(s)}$$

الف) فرم مشاهده پذیر:

متأسفانه، با انتخاب متغیر های حالت به صورت $y^{(n-1)},\ldots,\ddot{y},\dot{y},y$ به فرم زیر نمی رسیم

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)+Du(t)\end{cases}$$

بلکه خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)+d_1u(t)+d_2\dot{u}(t)+d_3\ddot{u}(t)+\cdots\end{cases}$$

فصل پنجم: تئوری تحقق

بنابراین، باید متغیرهای حالت را به گونه ای تعیین کنیم که به فرم استاندارد معادلات حالت برسیم:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

راه حل:

$$\hat{G}(s) = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1}s + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n} \times \frac{s^{-n}}{s^{-n}} = \frac{\beta_1 s^{-1} + \beta_2 s^{-2} + \cdots + \beta_n s^{-n}}{1 + \alpha_1 s^{-1} + \cdots + \alpha_n s^{-n}} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) + (\alpha_1 Y - \beta_1 U)s^{-1} + (\alpha_2 Y - \beta_2 U)s^{-2} + \cdots + (\alpha_n Y - \beta_n U)s^{-n} = 0$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = s^{-1}\underbrace{\left[(\beta_1 U - \alpha_1 Y) + \underbrace{s^{-1}\left[(\beta_2 U - \alpha_2 Y) + \cdots + \underbrace{s^{-1}(\beta_n U - \alpha_n Y)}_{X_1(s)}\right]}_{X_{n-1}(s)}\right]}_{X_n(s)}$$

فصل پنجم: تئوری تحقق

$$\Rightarrow \begin{cases} X_n(s) = s^{-1}\left[\left(\beta_1 U - \alpha_1 Y\right) + X_{n-1}(s)\right] \\ X_{n-1}(s) = s^{-1}\left[\left(\beta_2 U - \alpha_2 Y\right) + X_{n-2}(s)\right] \\ \qquad \vdots \\ X_2(s) = s^{-1}\left[\left(\beta_{n-1} U - \alpha_{n-1} Y\right) + X_1(s)\right] \\ X_1(s) = s^{-1}\left[\beta_n U - \alpha_n Y\right] \end{cases} \xrightarrow{L^{-1}\{\bullet\}} \begin{cases} \dot{x}_n(t) = \beta_1 u(t) - \alpha_1 x_n(t) + x_{n-1}(t) \\ \dot{x}_{n-1}(t) = \beta_2 u(t) - \alpha_2 x_n(t) + x_{n-2}(t) \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_2(t) = \beta_{n-1} u(t) - \alpha_{n-1} x_n(t) + x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) = \beta_n u(t) - \alpha_n x_n(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

اگر برای تحقق فوق ماتریس مشاهده پذیری را تشکیل دهیم، خواهیم دید که رتبه کامل است. یعنی تحقق فوق همواره مشاهده پذیر است.

فصل پنجم: تئوری تحقق

ب) فرم کنترل پذیر:

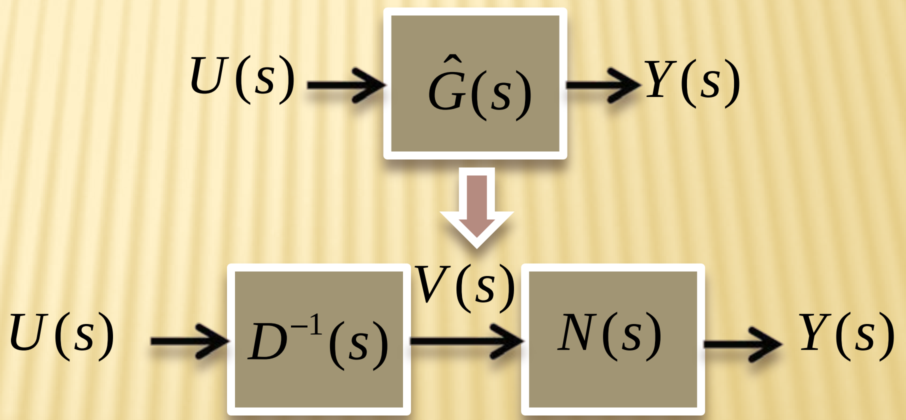
$$\hat{G}(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_1 s^{n-1}+\cdots+\beta_{n-1}s+\beta_n}{s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n}=\frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$\Rightarrow D(s)Y(s)=N(s)U(s) \Rightarrow Y(s)=N(s)\underbrace{D^{-1}(s)U(s)}_{V(s)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y(s)=N(s)V(s) \\ V(s)=D^{-1}(s)U(s) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$D(s)V(s)=U(s)$$



فصل پنجم: تئوری تحقق

$$\Rightarrow \left(s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n\right)V(s)=U(s)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t)=v(t) \\ x_2(t)=\dot{v}(t)=\dot{x}_1(t) \\ x_3(t)=\ddot{v}(t)=\dot{x}_2(t) \\ \quad\vdots \\ x_n(t)=v^{(n-1)}(t)=\dot{x}_{n-1}(t) \end{cases} \qquad X(s)=\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V(s) \\ sV(s) \\ \vdots \\ s^{n-1}V(s) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow s^nV(s)=-\alpha_1 s^{n-1}V(s)-\cdots-\alpha_{n-1}sV(s)-\alpha_nV(s)+U(s)$$

$$\xrightarrow{L^{-1}\{\bullet\}} \dot{x}_n=-\alpha_1 x_n-\cdots-\alpha_{n-1}x_2-\alpha_n x_1+u(t)$$

$$\Rightarrow Y(s)=N(s)V(s)=\left(\beta_1 s^{n-1}+\cdots+\beta_{n-1}s+\beta_n\right)V(s)=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} V(s) \\ sV(s) \\ \vdots \\ s^{n-1}V(s) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Y(s)=CX(s)$$

فصل پنجم: تئوری تحقق

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \beta_n & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \cdots & \beta_1 \end{bmatrix} x(t)$$

اگر برای تحقق فوق ماتریس کنترل پذیری را تشکیل دهیم، خواهیم دید که رتبه کامل است.
یعنی تحقق فوق همواره کنترل پذیر است.

تحقق جردن:

در این تحقق، تابع تبدیل را به کسرهای جزئی بسط می دهیم.

مثال:

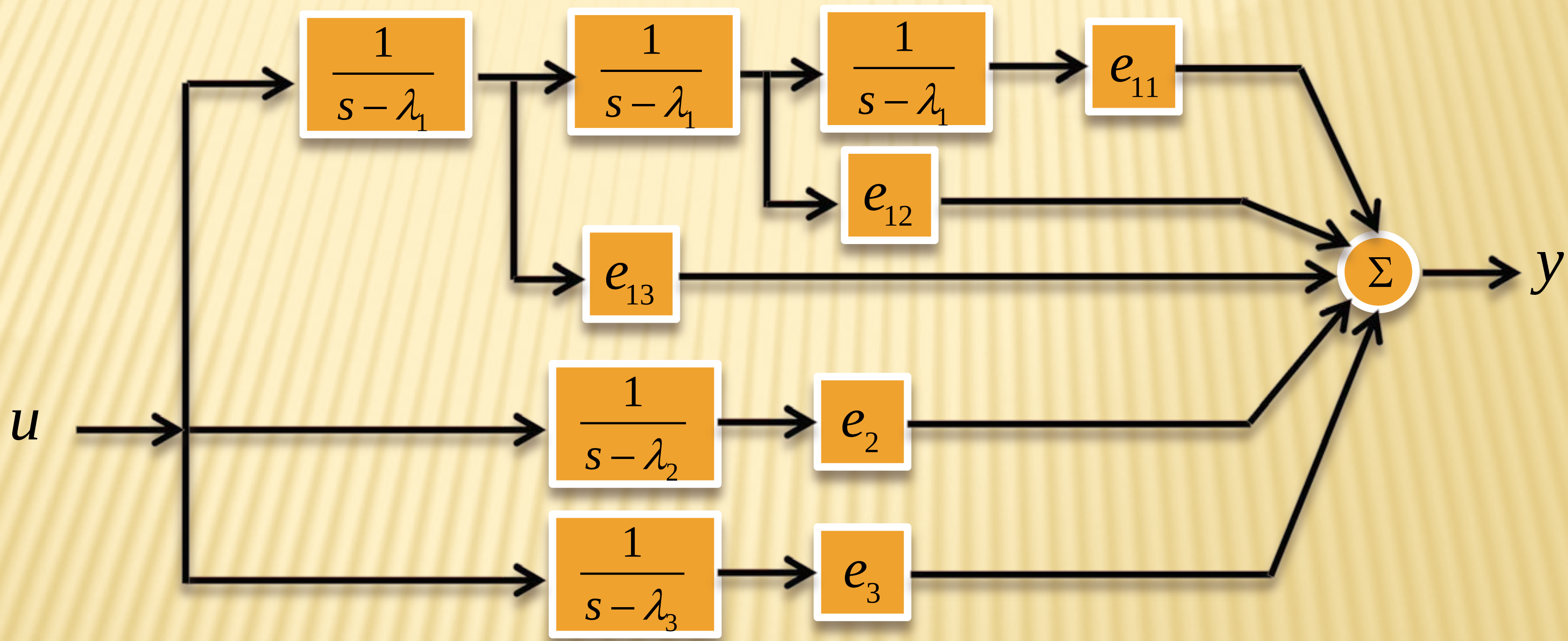
$$\hat{G}(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{N(s)}{(s-\lambda_1)^3(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)}$$

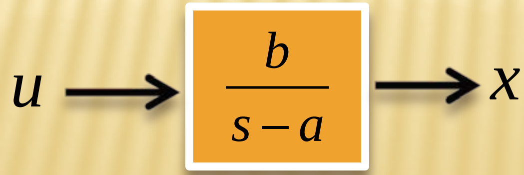
$$=\frac{e_{11}}{(s-\lambda_1)^3}+\frac{e_{12}}{(s-\lambda_1)^2}+\frac{e_{13}}{s-\lambda_1}+\frac{e_2}{s-\lambda_2}+\frac{e_3}{s-\lambda_3}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{e_{11}}{(s-\lambda_1)^3}U(s)+\frac{e_{12}}{(s-\lambda_1)^2}U(s)+\frac{e_{13}}{s-\lambda_1}U(s)+\frac{e_2}{s-\lambda_2}U(s)+\frac{e_3}{s-\lambda_3}U(s)$$

فصل پنجم: تئوری تحقق

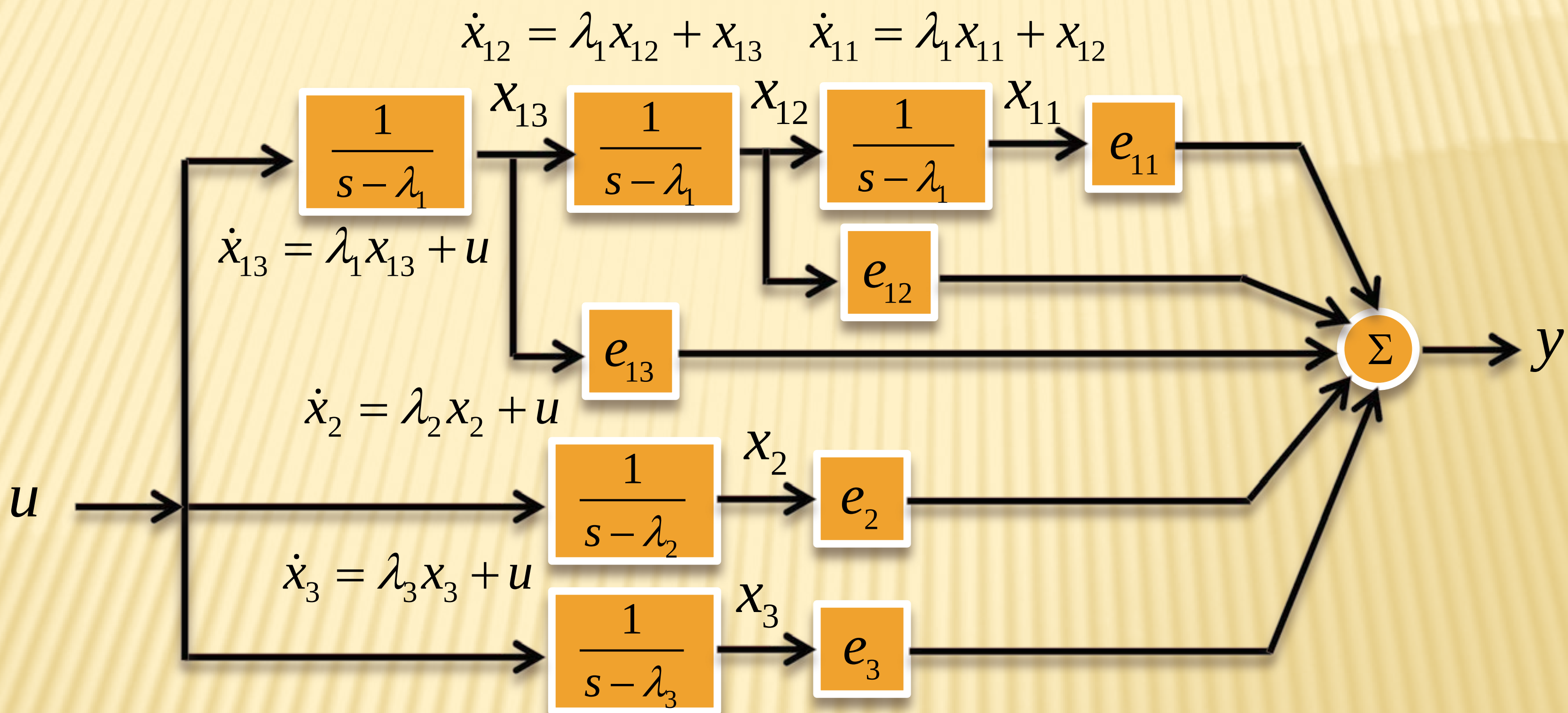
$$Y(s)=\frac{e_{11}}{(s-\lambda_1)^3}U(s)+\frac{e_{12}}{(s-\lambda_1)^2}U(s)+\frac{e_{13}}{s-\lambda_1}U(s)+\frac{e_2}{s-\lambda_2}U(s)+\frac{e_3}{s-\lambda_3}U(s)$$





$$\dot{x}=ax+bu$$

فصل پنجم: تئوری تحقق



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

این تحقق هم کنترل پذیر
است و هم مشاهده پذیر

فصل پنجم: تئوری تحقق

فرم دیگر تحقق جردن:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

تمرین یک: برای هر یک از توابع تبدیل زیر یک تحقق بنویسید:

$$G_1(s) = \frac{s+1}{s^3+2s^2+7s+4} \qquad G_1(s) = \frac{s^4+s^2}{s^4+5s^3+2s^2+7s+4}$$

تمرین دو: برای تابع تبدیل زیر یک تحقق جردن بنویسید:

$$G_2(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2(s+3)}$$

فصل پنجم: تئوری تحقق

تحقق سیستم های SIMO: تنها تحقق کنترل پذیر دارند.

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{n_1(s)}{a_1(s)} \\ \dfrac{n_2(s)}{a_2(s)} \\ \vdots \\ \dfrac{n_q(s)}{a_q(s)} \end{bmatrix}=\frac{1}{a(s)}\begin{bmatrix} b_1(s) \\ b_2(s) \\ \vdots \\ b_q(s) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_q \end{bmatrix}$$

کوچکترین مخرج مشترک

$$a(s)=s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n$$

$$b_i(s)=\beta_{i1}s^{n-1}+\cdots+\beta_{i(n-1)}s+\beta_{in}$$

حال برای $1/a(s)$ یک تحقق کنترل پذیر می نویسیم:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix} \beta_{1n} & \beta_{1(n-1)} & \cdots & \beta_{11} \\ \beta_{2n} & \beta_{2(n-1)} & \cdots & \beta_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{qn} & \beta_{q(n-1)} & \cdots & \beta_{q1} \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_q \end{bmatrix}u$$

فصل پنجم: تئوری تحقق

مثال: سیستم روبرو را در نظر بگیرید:

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}\\[2ex] \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s^2+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+2\\ s^2+1\end{bmatrix}=\frac{1}{s^4+3s^3+3s^2+3s+2}\begin{bmatrix}s+2\\ s^2+1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-2&-3&-3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}x$$

فصل پنجم: تئوری تحقق

تحقق سیستم های MISO: تنها تحقق مشاهده پذیر دارند.

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{n_1(s)}{a_1(s)} & \frac{n_2(s)}{a_2(s)} & \cdots & \frac{n_p(s)}{a_p(s)}\end{bmatrix}=\frac{1}{a(s)}\begin{bmatrix}b_1(s) & b_2(s) & \cdots & b_p(s)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e_1 & e_2 & \cdots & e_p\end{bmatrix}$$

کوچکترین مخرج مشترک

$$b_i(s)=\frac{a(s)}{a_i(s)}n_i(s)$$

$$a(s)=s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n$$

$$b_i(s)=\beta_{i1}s^{n-1}+\cdots+\beta_{i(n-1)}s+\beta_{in},\ \ i=1,2,\ldots,p$$

برای تک تک زیر سیستم ها همانند مشاهده پذیر SISO عمل کنید:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_n\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-1}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}b_1(s) & & b_p(s)\\ \downarrow & & \downarrow\end{array}\\ \begin{bmatrix}\beta_{1n} & \cdots & \beta_{pn}\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \beta_{12} & \cdots & \beta_{p2}\\ \beta_{11} & \cdots & \beta_{p1}\end{bmatrix}\end{array}u,$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}e_1 & e_2 & \cdots & e_{p-1} & e_p\end{bmatrix}u$$

فصل پنجم: تئوری تحقق

تحقق سیستم های MIMO:

$$G(s)=\begin{bmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1p}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{q1}(s) & \cdots & G_{qp}(s) \end{bmatrix}$$

$$G_{ij}(s)=\frac{b_{ij}(s)}{a_{ij}(s)}=\frac{\beta_1^{ij}s^{n-1}+\cdots+\beta_{n-1}^{ij}s+\beta_n^{ij}}{s^n+\alpha_1^{ij}s^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}^{ij}s+\alpha_n^{ij}}$$

برای تک تک سطرها مخرج مشترک می گیریم و تحقق مشاهده پذیر می نویسیم:

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{b_{1j}(s)}{a_1(s)} \\ \vdots \\ \dfrac{b_{qj}(s)}{a_q(s)} \end{bmatrix},\quad j=1,2,\ldots,p \quad\Rightarrow\quad \dot{x}(t)=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_n \end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_p \end{bmatrix}u(t)$$

$$y=\begin{bmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_q \end{bmatrix}x(t)$$

فصل پنجم: تئوری تحقق

مثال: یک تحقق برای سیستم زیر بنویسید:

$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3}\\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s^2+4s+3}\begin{bmatrix}s+3 & 2s+2\end{bmatrix}\\ \frac{1}{s+1}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_1=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & -4\end{bmatrix}\quad B_1=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\quad C_1=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_2=\begin{bmatrix}-1\end{bmatrix}\quad B_2=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\quad C_2=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & -3 & 0\\ 1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

حل تمرین و پرسش کلاسی:

مثال یک: سیستم زیر را قطری کنید:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}x(t)$$

همانطور که ملاحظه می شود، ماتریس A به فرم کامپنیون است:

$$|\lambda I-A|=\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-2$$

$$T=\begin{bmatrix}1&1&1\\\lambda_1&\lambda_2&\lambda_3\\\lambda_1^2&\lambda_2^2&\lambda_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&1&4\end{bmatrix}$$

$$\Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&1&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

$$\bar{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&1&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1.5&0.5\\0&-2&-1\\0&0.5&0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.5\\-1\\0.5\end{bmatrix}$$

حل تمرین و پرسش کلاسی:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1.5\\-1\\0.5\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1&0&-1\end{bmatrix}x(t)$$

$$\bar{C}=CT=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\end{bmatrix} \Rightarrow$$

مثال دو: سیستم زیر را در نظر بگیرید:

آیا این سیستم کنترل پذیر و پایدار پذیر است؟ چرا؟

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}x(t)$$

ابتدا ماتریس کنترل پذیری را تشکیل می دهیم:

$$U=\begin{bmatrix}B&AB&A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} \Rightarrow rank(U)=1$$

چون ماتریس کنترل پذیری رتبه کامل نیست، پس سیستم کنترل ناپذیر است. برای تحلیل پایدار پذیری باید زیر فضای کنترل ناپذیر را بدست آوریم.

حل تمرین و پرسش کلاسی:

با توجه به اینکه رتبه ماتریس B یک است پس $m=1$

بنابراین، برای تشکیل ماتریس T یک بردار دلخواه از ماتریس کنترل پذیری و دو بردار دیگر را به طور دلخواه طوری انتخاب می کنیم که با اولی مستقل خطی باشند.

$$T=\left[\begin{array}{c:cc}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{array}\right]$$ ماتریس تبدیل همانندی

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\hat{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\hat{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\qquad \hat{C}=CT=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

حل تمرین و پرسش کلاسی:

$$\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_C(t)\\ \dot{\hat{x}}_{\bar{C}}(t)\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\hat{A}_C \qquad \hat{A}_{12}\\ \left[\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 1\\ \hline 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{array}\right]\\ \qquad\quad \hat{A}_{\bar{C}}\end{array}\begin{bmatrix}\hat{x}_C(t)\\ \hat{x}_{\bar{C}}(t)\end{bmatrix}+\begin{array}{c}\hat{B}_C\\ \left[\begin{array}{c}1\\ \hline 0\\ 0\end{array}\right]\\ \end{array}u(t)$$

$$y(t)=\begin{array}{c}\hat{C}_C \quad \hat{C}_{\bar{C}}\\ \left[\begin{array}{c|cc}2 & 1 & 1\end{array}\right]\end{array}x(t)$$

بنابراین، زیرسیستم کنترل پذیر عبارت است از:

$$\dot{\hat{x}}_{\bar{C}}(t)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\hat{x}_{\bar{C}}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}u,\quad y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\hat{x}_{\bar{C}}(t)$$

$$\left|\lambda I-\hat{A}_{\bar{C}}\right|=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ -1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda+1=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{-1\pm j\sqrt{3}}{2}$$

چون قسمت حقیقی مقادیر ویژه زیر سیستم کنترل ناپذیر منفی است، پس زیر سیستم کنترل ناپذیر پایدار است و لذا، سیستم فوق پایدار پذیر خالت ایت.

حل تمرین و پرسش کلاسی:

کوئیز (سؤال یک): معادلات حالت و خروجی سیستمی عبارت است از:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

الف: رؤیت پذیری سیستم را بررسی کنید.

ب: اگر سیستم رؤیت نا پذیر باشد، زیر فضای رؤیت پذیری و رؤیت ناپذیری را تعیین کنید.

ج: آیا سیستم آشکار پذیر است؟ چرا؟

کوئیز (سؤال دو): یک تحقق برای سیستم های زیر بنویسید::

$$G_1(s)=\frac{5s+2}{(s+1)^2(s+2)^2(s+3)} \qquad G_2(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s^2+1} & \dfrac{2}{s^2+3}\\ \dfrac{1}{s^2+s+1} & \dfrac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

فصل ششم: تحلیل پایداری

یکی از مهمترین مشخصه های سیستم های کنترل حلقه بسته می باشد. طراحی سیستم کنترل حلقه بسته باید به گونه ای انجام شود که سیستم حلقه بسته پایدار بماند. همانطور که از درس کنترل خطی به خاطر دارید، پاسخ گذرا شامل مدهای نمایی به فرم $e^{-\lambda_i t}$ می باشد. چنانچه سمت حقیقی مقادیر ویژه λ_i منفی باشد، این مدهای نمایی به سمت صفر همگرا می شوند، و پاسخ کراندار می ماند و سیستم پایدار می باشد. ولی اگر قسمت حقیقی مقادیر ویژه مثبت باشد، $e^{-\lambda_i t}$ به بی نهایت می رود، پاسخ واگرا می شود و سیستم ناپایدار خواهد بود.

تعریف پایداری: سیستم $\dot{x} = f(x)$ را در نظر بگیرید. نقطه تعادل به مفهوم لیاپانوف پایدار است اگر هر تراجکتوری از سیستم از یک همسایگی در مبدأ شروع شود در اطراف مبدأ باقی بماند.

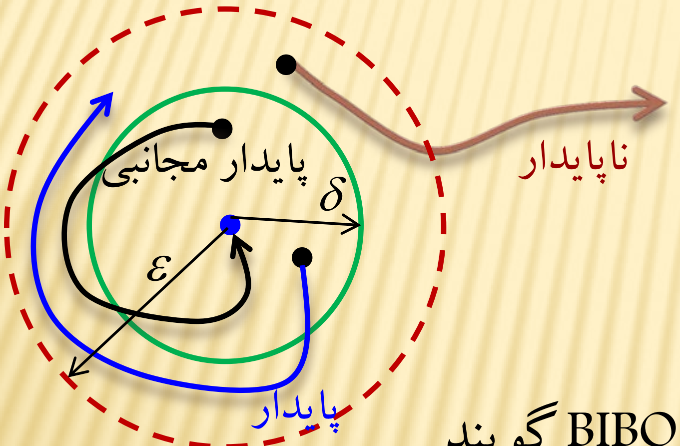
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 : \left\| x(t_0) - x_e \right\| \le \delta \Longrightarrow \left\| x(t) - x_e \right\| \le \varepsilon$$

فصل ششم: تحلیل پایداری

تعریف پایداری مجانبی : نقطه تعادل سیستم $\dot{x} = f(x,t)$ پایدار مجانبی است اگر اولاً به مفهوم لیاپانوف پایدار باشد، ثانیاً $x(t)$ با گذشت زمان به صفر همگرا شود.

به بزرگترین محدوده ای $\|x(t_0) - x_e\| \le \rho$ که به ازای آن پایداری مجانبی داشته باشیم، حوزه جذب گفته می شود.

تعریف پایداری مجانبی کلی: نقطه تعادل سیستم به طور کلی پایدار مجانبی است اگر اولاً به مفهوم لیاپانوف پایدار باشد، ثانیاً به ازای تمام شرایط اولیه، $x(t)$ با گذشت زمان به صفر همگرا شود.



تعریف پایداری BIBO: سیستم بدون شرایط اولیه را پایدار BIBO گویند اگر و تنها اگر برای هر ورودی کراندار، خروجی آن نیز کراندار باشد.

فصل ششم: تحلیل پایداری

قضیه پایداری: نقطه تعادل سیستم $\dot{x} = Ax(t)$ پایدار است اگر و تنها اگر:

الف: قسمت حقیقی کلیه مقادیر ویژه A غیر مثبت باشد؛

ب: آن دسته از مقادیر ویژه A که جزء حقیقی صفر دارند، ریشه مکرر نباشند. یعنی در فرم تبدیل شده جردن ماتریس A، مرتبه بلوک های جردن آن مقادیر ویژه یک باشد.

قضیه پایداری: نقطه تعادل سیستم $\dot{x} = Ax(t)$ پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر:

قسمت حقیقی کلیه مقادیر ویژه A اکیداً منفی باشد.

فصل ششم: تحلیل پایداری

پایداری سیستم های غیر خطی: سیستم غیر خطی تغییر ناپذیر با زمان $\dot{x} = f(x)$ را در نظر بگیرید:

این سیستم با به کار گیری بسط تیلور و صرف نظر کردن از جملات مرتبه بالاتر به صورت زیر خطی می شود:

$$\dot{x} = A\,x(t) \qquad A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

سیستم غیر خطی فوق حول نقطه تعادلش پایدار است، اگر قسمت حقیقی کلیه مقادیر ویژه A منفی باشد.

به کمک روش فوق که روش غیر مستقیم لیاپانوف نامیده می شود، نمی توان در مورد پایداری کلی نتیجه ای گرفت.

فصل ششم: تحلیل پایداری

روش دوم لیاپانوف: سیستم غیر خطی تغییر ناپذیر با زمان $\dot{x} = f(x)$ را در نظر بگیرید.

این سیستم در نزدیکی نقطه تعادلش پایدار مجانبی است اگر تابع اسکالر $V(x)$ وجود داشته باشد که شرایط زیر را برقرار سازد:

الف: $V(x)$ حول مبدأ پیوسته و دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد.

ب: برای $x \neq 0$ داشته باشیم: $V(x) > 0$ و $V(0) = 0$

ج: برای $x \neq 0$ داشته باشیم: $\dot{V}(x) < 0$

الکساندر لیاپانوف ریاضی‌دان و فیزیک‌دان روسی بود. او به خاطر توسعه نظریه پایداری سیستم‌های دینامیکی و نیز سهم عمده اش در نظریه احتمالات و فیزیک ریاضی شهرت دارد. وی در سال ۱۹۱۸ در گذشته است.

فصل ششم: تحلیل پایداری

مثال یک: پایداری سیستم غیر خطی تغییر ناپذیر با زمان زیر را بررسی کنید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

تابع لیاپانوف زیر را به عنوان تابع انرژی سیستم در نظر می گیریم:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2$$

از تابع لیاپانوف مشتق گرفته و معادلات سیستم را در آن جایگذاری می کنیم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= -x_1^2 - 2x_1x_2^2 + (2x_1x_2^2 - 2x_2^4) \\ &= -x_1^2 - 2x_2^4 < 0 \end{aligned}$$

چون مشتق تابع لیاپانوف اکیداً منفی است، لذا انرژی سیستم در حال کاهش است و چون انرژی مثبت است، انرژی سیستم به سمت صفر می رود. درنتیجه، حالات سیستم نیز به سمت صفر همگرا می شود و سیستم پایدار مجانبی خواهد بود.

فصل ششم: تحلیل پایداری

قضیه پایداری کلی: سیستم غیر خطی تغییر ناپذیر با زمان $\dot{x} = f(x)$ را در نظر بگیرید.

این سیستم در نزدیکی نقطه تعادلش پایدار مجانبی کلی است اگر تابع اسکالر $V(x)$ وجود داشته باشد که شرایط زیر را برقرار سازد:

الف: $V(x)$ حول مبدأ پیوسته و دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد.

ب: برای $x \neq 0$ داشته باشیم: $V(x) > 0$ و $V(0) = 0$

ج: برای $x \neq 0$ داشته باشیم: $\dot{V}(x) < 0$

د: وقتی $\|x\| \to \infty$ داشته باشیم: $V(x) \to \infty$

شرط فوق را شرط بطور شعاعی بی کران می نامند.

فصل ششم: تحلیل پایداری

مثال دو: پایداری سیستم غیر خطی تغییر ناپذیر با زمان زیر را بررسی کنید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

این مسأله را حل کنید (زمان: پانزده دقیقه) و سپس با راه حل اسلاید بعدی مقایسه کنید.

فصل ششم: تحلیل پایداری

مثال دو: پایداری سیستم غیر خطی تغییر ناپذیر با زمان زیر را بررسی کنید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

تابع لیاپانوف زیر را به عنوان تابع انرژی سیستم در نظر می گیریم:

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

از تابع لیاپانوف مشتق گرفته و معادلات سیستم را در آن جایگذاری می کنیم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= -2x_1^2 - 2x_2^2 + 2(x_1^2 + x_2^2)^2 \\ &= 2\left(x_1^2 + x_2^2\right)\left((x_1^2 + x_2^2) - 1\right) \end{aligned}$$

مشتق تابع لیاپانوف اکیداً منفی است اگر شرط زیر برآورده شود:

$$(x_1^2 + x_2^2) - 1 < 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 < 1$$

یعنی اگر شرایط اولیه در داخل دایره واحد قرار گیرند، سیستم بر طبق تئوری لیاپانوف پایدار مجانبی است.

فصل ششم: تحلیل پایداری

تحلیل پایداری سیستم های خطی با روش دوم لیاپانوف:

سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان $\dot{x} = A\,x(t)$ را در نظر بگیرید.

تابع لیاپانوف $V(x) = x^T P x$ را در نظر بگیرید.

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (Ax)^T P x + x^T P A x$$
$$= x^T (A^T P + PA) x = -x^T Q x$$

متقارن: $P = P^T$

مشخصاً، برای اینکه مشتق تابع لیاپانوف منفی باشد، باید یک ماتریس Q مثبت معین وجود داشته باشد.

یعنی در معادله $A^T P + PA = -Q$ که معادله لیاپانوف نامیده می شود، به ازای یک P مثبت معین یک Q مثبت معین وجود داشته باشد تا طبق قضیه لیاپانوف سیستم خطی پایدار مجانبی باشد. ولی ممکن است که سیستم پایدار باشد ولی به ازای یک P مثبت معین، یک Q مثبت معین یافت نشود. روش معقول آن است که یک Q مثبت معین انتخاب کنیم و از معادله $A^T P + PA = -Q$ تعیین کنیم که آیا P مثبت معین هست یا خیر؟ اگر P مثبت معین بود، آنگاه V یک تابع لیاپانوف است و سیستم پایدار مجانبی خواهد بود.

فصل ششم: تحلیل پایداری

توجه: ماتریس P یک ماتریس مثبت معین است اگر تمام کهادهای اصلی اش مثبت باشند.

مثال سه: پایداری سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان زیر را بررسی کنید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - x_2 \end{cases}$$

تابع لیاپانوف زیر را به عنوان تابع انرژی سیستم در نظر می گیریم:

$$V(x) = x^T P x$$

معادله لیاپانوف را حل می کنیم:

$$A^T P + PA = -Q = -I$$

یک انتخاب ساده ماتریس Q ماتریس همانی است.

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ضرب این ماتریس ها را انجام دهید (ده دقیقه) و چک کنید که آیا P مثبت معین است یا خیر...!

فصل ششم: تحلیل پایداری

تمرین: به ازای چه مقدار از k سیستم زیر پایدار است؟

زمان: پانزده دقیقه

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} k-1 & -2 \\ 2 & k+1 \end{bmatrix}x(t)$$

فصل ششم: تحلیل پایداری

تمرین: به ازای چه مقدار از k سیستم زیر پایدار است؟

زمان: پانزده دقیقه

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} k-1 & -2 \\ 2 & k+1 \end{bmatrix}x(t)$$