فصل سوم: سیستم های خطی

قطری سازی به کمک فرم جردن:

$$e^{Jt}=\begin{bmatrix} e^{J_{P1}t} & & & & & & 0 \\ & e^{J_{P2}t} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & e^{J_{P\alpha}t} & & & \\ & & & & e^{\lambda_{k+1}t} & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \qquad e^{J_{Pi}t}=\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{P_i-1}}{(P_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{P_i-2}}{(P_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_i t}$$

فصل چهارم: کنترل پذیری و مشاهده پذیری

کنترل پذیری و مشاهده پذیری از مهمترین مفاهیم در حوزه فضای حالت به شمار می روند که توسط کالمن در اواسط دهه پنجاه معرفی شده اند. برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}2 & 3 & 2 & 1\\ -2 & -3 & 0 & 0\\ -2 & -2 & -4 & 0\\ -2 & -2 & -2 & -5\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 2\\ -1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}7 & 6 & 4 & 2\end{bmatrix}x(t)$$

با قطری کردن سیستم فوق به معادلات زیر می رسیم:

$$\dot{z}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix}z(t)+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}z(t)$$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases}\dot{z}_1=-z_1+u(t),\\ \dot{z}_2=-2z_2,\\ \dot{z}_3=-3z_3+u(t),\\ \dot{z}_4=-4z_4,\\ y(t)=z_1+z_2\end{cases}$$

فصل چهارم: کنترل پذیری و مشاهده پذیری

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1 + u(t), & \mathbf{CO} \\ \dot{z}_2 = -2z_2, & \mathbf{\bar{C}O} \\ \dot{z}_3 = -3z_3 + u(t), & \mathbf{C\bar{O}} \\ \dot{z}_4 = -4z_4, & \mathbf{\bar{C}\bar{O}} \\ y(t) = z_1 + z_2 \end{cases}$$

$z_1(t)$ از ورودی تأثیر می گیرد و در خروجی رِؤیت می شود (مد کنترل پذیر و مشاهده پذیر)

$z_2(t)$ از ورودی تأثیر نمی گیرد ولی در خروجی رِؤیت می شود (مد کنترل ناپذیر و مشاهده پذیر)

$z_3(t)$ از ورودی تأثیر می گیرد ولی در خروجی رِؤیت نمی شود (مد کنترل پذیر و مشاهده ناپذیر)

$z_4(t)$ از ورودی تأثیر نمی گیرد و در خروجی هم رِؤیت نمی شود (مد کنترل ناپذیر و مشاهده ناپذیر)

فصل چهارم: کنترل پذیری و مشاهده پذیری

نکته دیگر:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}2 & 3 & 2 & 1\\ -2 & -3 & 0 & 0\\ -2 & -2 & -4 & 0\\ -2 & -2 & -2 & -5\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 2\\ -1\end{bmatrix}u(t) \Rightarrow G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\frac{\cancel{(s+2)}\cancel{(s+3)}\cancel{(s+4)}}{(s+1)\cancel{(s+2)}\cancel{(s+3)}\cancel{(s+4)}}$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}7 & 6 & 4 & 2\end{bmatrix}x(t) \qquad \Rightarrow G(s)=\frac{1}{(s+1)}$$

ملاحظه می شود که تنها مد کنترل پذیر و مشاهده پذیر (**CO**) در تعیین تابع تبدیل تأثیر دارد و سایر مد ها باعث حذف صفر و قطب می شوند و مرتبه تابع تبدیل را کاهش می دهند.

پس حذف هر گونه صفر و قطب نشان دهنده وجود یک مد کنترل ناپذیر و یا مشاهده ناپذیر است.

نکته: اگر مرتبه تابع تبدیل از تعداد متغیر های حالت کمتر باشد، حتما حذف صفر و قطب روی داده و لذا سیستم دارای یک مد کنترل ناپذیر و یا مشاهده ناپذیر است.

فصل چهارم: کنترل پذیری و مشاهده پذیری

سیستم کنترل ناپذیر: سیستمی که حداقل یک مد کنترل ناپذیر دارد.

سیستم رؤیت ناپذیر: سیستمی که حداقل یک مد رؤیت ناپذیر دارد.

- نکته: اگر مد کنترل ناپذیر پایدار باشد، سیستم پایدارپذیر (*Stabilizable*) نامیده می شود و در طراحی سیستم کنترل به آن مد توجهی نداریم.

- نکته: اگر مد رؤیت ناپذیر پایدار باشد، سیستم آشکارپذیر (*Detectable*) نامیده می شود و در طراحی رؤیتگر به آن مد توجهی نداریم.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1 + u(t), & \mathrm{CO} \\ \dot{z}_2 = -2z_2, & \bar{\mathrm{C}}\mathrm{O} \\ \dot{z}_3 = -3z_3 + u(t), & \mathrm{C}\bar{\mathrm{O}} \\ \dot{z}_4 = -4z_4, & \bar{\mathrm{C}}\bar{\mathrm{O}} \\ y(t) = z_1 + z_2 \end{cases}$$

$\bar{\mathrm{C}}\mathrm{O} \longrightarrow$ مد کنترل ناپذیر پایدار

$\mathrm{C}\bar{\mathrm{O}} \longrightarrow$ مد رؤیت ناپذیر پایدار

$\bar{\mathrm{C}}\bar{\mathrm{O}} \longrightarrow$ مد کنترل ناپذیر و رؤیت ناپذیر پایدار

$\Rightarrow$ سیستم هم آشکار پذیر و هم پایدار پذیر است

فصل چهارم: کنترل پذیری و مشاهده پذیری

- اگر مد کنترل ناپذیر یا رؤیت ناپذیر ناپایدار باشد، ممکن است که با یک اغتشاش سیستم ناپایدار شود و حالت ها به بی نهایت واگرا شوند.

به طور کلی، عوامل کنترل ناپذیر و مشاهده ناپذیر سیستم ها عبارتند از:

- انتخاب متغیرهای وابسته خطی به عنوان متغیر های حالت که منجر به نمایش غیر مینیمال می شود.
- وجود نیروها یا گشتاورهای داخلی در سیستم مکانیکی
- وجود تقارن ساختاری در سیستم ها
- عدم اندازه گیری متغیر های حالت
- به کار گیری روشهای مبتنی بر حذف صفر و قطب در طراحی کنترلرهای کلاسیک

فصل چهارم: کنترل پذیری و مشاهده پذیری

تعریف کنترل پذیری:

سیستم زیر را کنترل پذیر گویند، اگر سیگنال کنترل u وجود داشته باشد که بتوان حالت سیستم را از هر حالت اولیه $x(t_0)=x_0$ در زمان اولیه t_0 به هر حالت نهایی $x(t)$ در زمان t انتقال داد.

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

قضیه کنترل پذیری:

سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان n بعدی زیر

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

کاملاً کنترل پذیر است، اگر و فقط اگر ماتریس کنترل پذیری زیر مرتبه کامل باشد:

$$U=\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \longrightarrow |U|\neq 0$$

اگر مربعی باشد.

فصل چهارم: کنترل پذیری و مشاهده پذیری

مثال: کنترل پذیری سیستم زیر را تعیین کنید:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & 1 & -2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}u(t),$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

ابتدا ماتریس کنترل پذیری را تشکیل می دهیم:

$$U=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc|cc}1 & 1 & -2 & 1 & 4 & -9\\ 1 & -1 & -2 & 3 & 4 & -3\\ 1 & 0 & -2 & -2 & 4 & 6\end{array}\right]$$

باید این ماتریس رتبه کامل باشد.

چون سه سطر مستقل خطی داریم، ماتریس رتبه کامل است و سیستم کنترل پذیر است.

یادآوری: برای یک ماتریس غیر مربعی داریم:

$$A\in\Re^{n\times m}\longrightarrow Rank(A)\le\min(m,n)=\min(3,6)=3$$

فصل چهارم: کنترل پذیری و مشاهده پذیری

تعیین کنترل پذیری سیستم از روی فرم جردن:

یکی از کاربردهای مهم قطری سازی تعیین کنترل پذیری و مشاهده پذیری سیستم است:

- آخرین ردیف زیر ماتریس های B متناظر با بلوک های جردن برای ِیک مقدار ویژه یکسان، مستقل خطی باشند.
- اگر مقدار ویژه مکرری تنها یک بلوک جردن داشته باشد، آخرین ردیف زیر ماتریس متناظر آن در B باید غیر صفر باشد.
- ردیف های B برای مقادیر ویژه متمایز باید غیر صفر باشد.

فصل چهارم: کنترل پذیری و مشاهده پذیری

مثال: کنترل پذیری سیستم زیر را تعیین کنید:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1 & 0\\ \boxed{0 \quad 1}\\ 0 & 0\\ \boxed{1 \quad 0}\\ 0 & 0\\ \boxed{1 \quad 1}\\ \boxed{0 \quad 0}\end{bmatrix}u(t),$$

مد کنترل پذیر

مستقل خطی

مد کنترل پذیر

مد کنترل ناپذیر

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x(t)$$

فصل چهارم: کنترل پذیری و مشاهده پذیری

تفکیک زیر سیستم های کنترل پذیر و کنترل ناپذیر:

با به کار گیری تبدیل همانندی می توان زیر فضای کنترل پذیر و کنترل ناپذیر را از هم تفکیک نمود:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

تبدیل همانندی: $x(t) = T\, z(t)$

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{A}z(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) = \hat{C}z(t) + \hat{D}u(t) \end{cases}$$

$$\hat{A} = T^{-1}AT, \;\; \hat{B} = T^{-1}B$$

$$\hat{C} = CT, \; \hat{D} = D$$

$$\begin{array}{r} \text{زیر سیستم کنترل پذیر} \\ \text{زیر سیستم کنترل ناپذیر} \end{array} \begin{pmatrix} \dot{z}_C \\ \dot{z}_{\bar{C}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \hat{A}_C & \hat{A}_{12} \\ \hline 0 & \hat{A}_{\bar{C}} \end{array}\right) \begin{pmatrix} z_C \\ z_{\bar{C}} \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c} \hat{B}_C \\ \hline 0 \end{array}\right) u(t)$$

$$y(t) = \left(\begin{array}{c|c} \hat{C}_C & \hat{C}_{\bar{C}} \end{array}\right) \begin{pmatrix} z_C \\ z_{\bar{C}} \end{pmatrix}$$

فصل چهارم: کنترل پذیری و مشاهده پذیری

تفکیک زیر سیستم های کنترل پذیر و کنترل ناپذیر:

زیر سیستم کنترل پذیر

زیر سیستم کنترل ناپذیر

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_C \\ \dot{z}_{\bar{C}} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \hat{A}_C & \hat{A}_{12} \\ \hline 0 & \hat{A}_{\bar{C}} \end{array}\right) \begin{pmatrix} z_C \\ z_{\bar{C}} \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c} \hat{B}_C \\ \hline 0 \end{array}\right) u(t)$$

$$y(t) = \left(\begin{array}{c|c} \hat{C}_C & \hat{C}_{\bar{C}} \end{array}\right) \begin{pmatrix} z_C \\ z_{\bar{C}} \end{pmatrix}$$

محاسبه ماتریس تبدیل T:

$$T = \left[\underbrace{v_1 \ v_2 \ldots v_m}_{} \ \Big| \ \underbrace{v_{m+1} \ldots v_n}_{}\right]$$

m ستون دلخواه مستقل خطی از ماتریس کنترل پذیری U

n-m بردار دلخواه که با $v_1, v_2, \ldots v_m$ مستقل خطی باشند...

فصل چهارم: کنترل پذیری و مشاهده پذیری

تفکیک زیر سیستم های کنترل پذیر و کنترل ناپذیر:

مثال: کنترل پذیری سیستم زیر را تعیین کنید:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}u(t),$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}x(t)$$

$$\begin{cases}m=2\\n=3\end{cases}$$

$$U=\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}0&1\\1&0\\0&1\end{matrix}}&\begin{matrix}1&1\\1&0\\1&1\end{matrix}\end{bmatrix}$$

$$\qquad B \qquad\qquad AB$$

نکته: $if\ \ Rank(B)=m \quad\Rightarrow\ U=[B, AB, \ldots, A^{n-m}B]$

$$T=\begin{array}{c}\begin{matrix}v_1&v_2&v_3\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$

ستون دلخواه مستقل خطی m

$$\hat{A}=T^{-1}AT=\left[\begin{array}{cc:c}1&0&0\\1&1&0\\ \hdashline 0&0&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\hat{A}_C&\hat{A}_{12}\\0&\hat{A}_{\bar{C}}\end{bmatrix}$$

فصل چهارم: کنترل پذیری و مشاهده پذیری

$$T = \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ \end{array}$$
$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \hat{A}_C & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{\bar{C}} \end{bmatrix}$$

m ستون دلخواه مستقل خطی

$$\hat{B} = T^{-1}B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \hat{B}_C \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{C} = CT = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} C_C & C_{\bar{C}} \end{bmatrix}$$

در نتیجه زیر فضای کنترل پذیر عبارت است از:

$$\dot{z}_C(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} z_C(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} z_C(t)$$

فصل چهارم: کنترل پذیری و مشاهده پذیری

و زیر فضای کنترل ناپذیر عبارت است از:

$$\dot{z}_{\bar{C}}(t) = z_{\bar{C}}(t)$$
$$y(t) = z_{\bar{C}}(t)$$

$\longrightarrow$ چون زیر فضای کنترل ناپذیر ناپایدار است، لذا سیستم پایدار پذیر نیست.