فصل دوم:

تبدیل فوریه زمان گسسته[1]

توابع ویژه و مقادیر ویژه:

انگیزه بحث روی تبدیل فوریه در حالت زمان پیوسته، خاصیت جالب توابع نمایی مختلط است.

الف – حالت زمان پیوسته:

در سیستم‌های LTI ، تابع ویژه، تابعی است که فرم اولیه آن در خروجی سیستم LTI باقی می‌ماند و تنها با یک ضریب λ که به آن مقدار ویژه گفته می‌شود، در خروجی ظاهر می گردد.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{T(.)} \longrightarrow y(t) = \lambda x(t)$$

$$y(t) = T\big(x(t)\big)$$

در حوزه زمان پیوسته داریم:

$$x(t) = e^{j\Omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow H(j\Omega_0)e^{j\Omega_0 t}$$

اگر در سیستم LTI فوق، خروجی مشابه ورودی باشد، $x(t)$ را تابع ویژه[2] و $H(j\Omega_0)$ را مقدار ویژه[3] می‌نامیم. برای مثال توابعی مانند سینوس و کسینوس، توابع ویژه هستند و خروجی سیستم تنها ممکن است در دامنه یا فاز با ورودی تفاوت داشته باشد.

---

[1] Discrete time fourier transform (DTFT)
[2] Eigen function
[3] Eigen value

تذکر: برای بیان سیگنال‌ها در حوزه فرکانس، در حالت پیوسته از Ω و در گسسته از ω استفاده می‌نماییم.
طبقه قضیه ثابت می‌شود که در سیستم‌های LTI ، e^{st} یک تابع ویژه است و مقدار ویژه آن عبارت است از:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

$$e^{st} \longrightarrow \boxed{\mathrm{LTI}} \longrightarrow H(s)e^{st}$$

سیستم LTI شکل زیر را در نظر بگیرید :

$$e^{jk\Omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow H(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

حال اگر ورودی ترکیب خطی از توابع نمائی $e^{jk\Omega_0 t}$ باشد، خروجی هم ترکیبی از پاسخ ها با همان ضرایب است:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k e^{jk\Omega_0 t} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k H(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$$

k می‌تواند تغییر کند و هارمونیک‌های مختلف با ضرایب متفاوت حاصل گردد. سری فوریه برای توابع متناوب تعریف، و از روی آن برای توابع غیرمتناوب، تبدیل فوریه را تعریف می‌نماییم.

ب - حالت زمان گسسته:

در مورد زمان گسسته نیز می توانیم $e^{j\omega_0 n}$ را یک تابع ویژه برای هر سیستم LTI بدانیم.

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = H\left(e^{j\omega_0}\right).\, e^{j\omega_0 n}$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

اگر $x[n] = e^{j\omega_0 n} \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega_0(n-k)}$

$$y[n] = e^{j\omega_0 n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega_0 k}\right)$$

$H\left(e^{j\omega_0}\right)$ کمیتی ثابت نسبت به n. است. این همان مقدار ویژه است که در پیوسته به صورت $H(j\omega_0)$ یا $H(s)$ در حالت کلی نمایش داده می‌شود. بنابراین $e^{j\omega_0 n}$ برای سیستم های LTI گسسته ، یک تابع ویژه با مقدار ویژه $H\left(e^{j\omega_0}\right)$ می‌باشد.

پاسخ فرکانسی[1] :

پاسخ فرکانسی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H\left(e^{j\omega}\right) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].\, e^{-j\omega k}$$

پاسخ فرکانسی، رفتار یک سیستم LTI را در فرکانس‌های مختلف نشان می‌دهد. چون پاسخ فرکانسی کمیتی مختلط است، بنابراین دارای اندازه و زاویه می‌باشد، در نتیجه اندازه آن در اندازه ورودی ضرب، و زاویه آن با زاویه ورودی جمع می‌شود.

مثال: اگر ورودی $x[n]$ به صورت زیر باشد، خروجی سیستم LTI و پاسخ فرکانسی آن را بیابید.

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi) \qquad\qquad x[n] \longrightarrow \boxed{H\left(e^{j\omega}\right)} \longrightarrow y[n]$$

از قبل می‌دانیم که:

$$\cos(\omega) = \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2}$$

$$x[n] = \frac{A}{2} e^{j\varphi} .\, e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} .\, e^{-j\omega_0 n}$$

$$y[n] = \frac{A}{2} e^{j\varphi} .\left|He\left(^{j\omega_0}\right)\right|.\, e^{j\measuredangle H\left(e^{j\omega_0}\right)}.\, e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi}.\left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right|.\, e^{j\measuredangle H\left(e^{-j\omega_0}\right)}.\, e^{-j\omega_0 n}$$

$$y[n] = \frac{A}{2}\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|.\left(e^{j\left[(\omega_0 n+\varphi)+\measuredangle H\left(e^{j\omega_0}\right)\right]} + e^{-j\left[(\omega_0 n+\varphi)+\measuredangle H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right]}\right)$$

$$y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0 n + \varphi + \measuredangle H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)$$

فقط در یک فرکانس خاص یا همان ω_0 این خاصیت را می‌توان استفاده کرد. ملاحظه می‌شود که $H\left(e^{j\omega}\right)$ تابعی متناوب با دوره تناوب 2π است. یعنی:

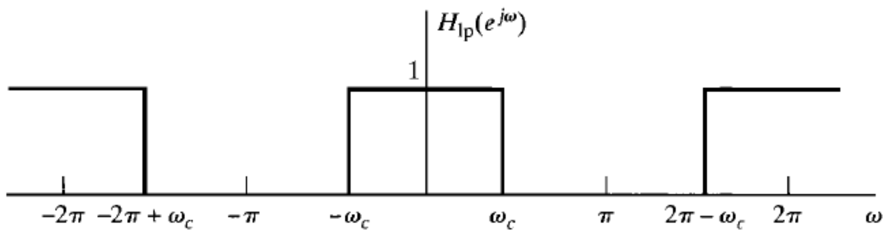
$$H\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = H\left(e^{j\omega}\right), \qquad\qquad e^{j2\pi} = 1$$

---

[1] Frequency response

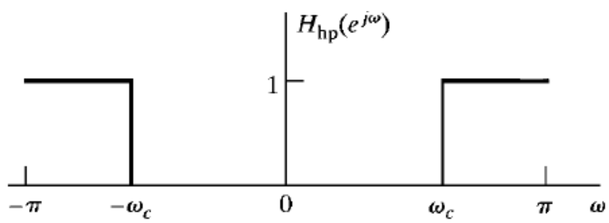
مثال: پاسخ فرکانسی فیلترهای ایده آل مختلف:

1- فیلتر پایین گذر ایده آل:



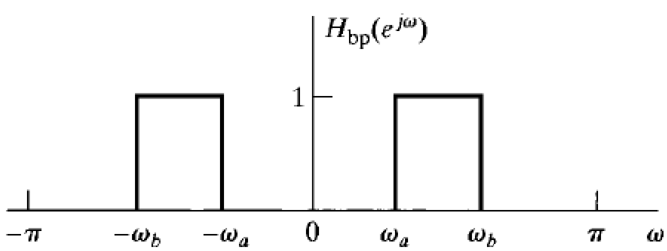
فرکانس‌های پایین، حول مضارب زوج π است و فرکانس بی‌نهایت، در حول مضارب فرد π است.

2- فیلتر بالا گذر ایده آل:



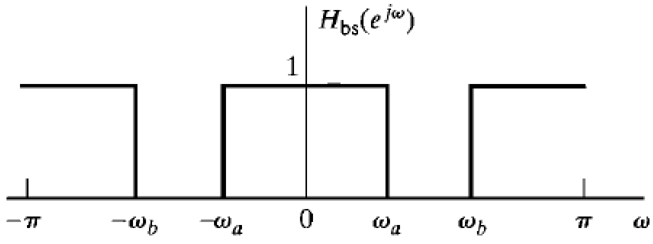
در فیلتر بالا گذر، فرکانس صفر حول مضارب 2π یعنی صفر و 4π است و فرکانس بینهایت، حول مضارب فرد π است.

3- فیلتر میان‌گذر ایده آل:



با پریود 2π تکرار می‌شود.

4- فیلتر میان نگذر ایده آل:



مثال: پاسخ فرکانسی یک سیستم تآخیر دهنده ایده آل:

$$y[n] = x[n - n_d],$$

$$x[n] = e^{j\omega n}$$

$$y[n] = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{-j\omega n_d} e^{j\omega n} \quad \Rightarrow \quad H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}$$

قبلا دیدیم که پاسخ ضربه یک تآخیر دهنده ایده آل بصورت زیر است:

$$h[n] = \delta[n - n_d]$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} \quad \Rightarrow \quad H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_d] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_d}$$

$$H_R(e^{j\omega}) = \cos(\omega n_d), \qquad |H(e^{j\omega})| = 1,$$

$$H_I(e^{j\omega}) = -\sin(\omega n_d). \qquad \sphericalangle H(e^{j\omega}) = -\omega n_d.$$

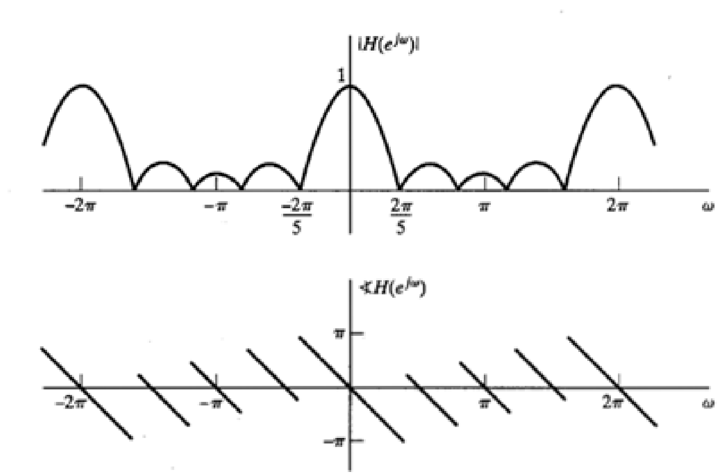
مثال: پاسخ فرکانسی سیستم میانگین متحرک:

قبلاً دیدیم که پاسخ ضربه این سیستم بصورت زیر می باشد:

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_1 + M_2 + 1} & -M_1 \le n \le M_2 \\ 0 & 0.W. \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{n=-M_1}^{M_2} e^{-j\omega n}. \qquad H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{e^{j\omega M_1} - e^{-j\omega(M_2+1)}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{e^{j\omega M_1} - e^{-j\omega(M_2+1)}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{e^{j\omega(M_1+M_2+1)/2} - e^{-j\omega(M_1+M_2+1)/2}}{1 - e^{-j\omega}} e^{-j\omega(M_2-M_1+1)/2} \\ &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{e^{j\omega(M_1+M_2+1)/2} - e^{-j\omega(M_1+M_2+1)/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} e^{-j\omega(M_2-M_1)/2} \\ &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{\sin[\omega(M_1 + M_2 + 1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(M_2-M_1)/2}. \end{aligned}$$



سری فوریه[1] پیوسته در زمان:

می دانیم سری فوریه سیگنالهای متناوب پیوسته در زمان از روابط زیر بدست می آید:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$H(e^{j\omega n})$ متناوب با دوره تناوب 2π است. بنابراین می‌توان بسط سری فوریه آن را بدست آورد:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \qquad h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

تبدیل فوریه گسسته با زمان[2]:

می توان با توجه به روابط فوق تبدیل فوریه یک سیگنال گسسته در زمان را بصورت زوج فوریه زیر تعریف نمود:

$$\mathcal{F}\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = H(e^{j\omega})$$

$$h[n] = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

شرط کافی برای وجود تبدیل فوریه آن است که $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$ مطلقاً جمع پذیر باشد؛

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}\right| < \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h[n]e^{-j\omega n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|\left|e^{-j\omega n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]| < \infty$$

[1] Fourier series
[2] Descrete Time Fourier Transform(DTFT)

که این، شرط پایداری برای یک سیستم است. ولی اگر تبدیل فوریه وجود داشته باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که سیستم پایدار است یا پاسخ ضربه مطلقاً جمع پذیر است. پس برای بررسی تبدیل فوریه $x[n]$، همین روند را ادامه می‌دهیم. تبدیل فوریه، هم برای سیگنال و هم برای سیستم، به شکل زیر است:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \qquad Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\, d\omega$$

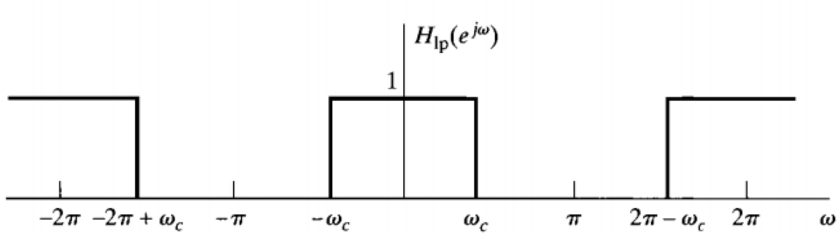
$$y[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega})e^{j\omega n}\, d\omega$$

با استفاده از قضیه تبدیل فوریه : $\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}).X(e^{j\omega})$

مثال: فیلتر پایین گذرایده آل: در زمان پیوسته یک فیلتر پایین گذر ایده آل، به صورت زیر تعریف می گردد.

$$H(j\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \Omega_c \\ 0 & oth. \end{cases}$$

در زمان گسسته، فیلتر پایین گذر با پریود 2π به صورت پریودیک خواهد بود. ولی در زمان گسسته، تبدیل فوریه سیگنالی است پریودیک با دوره تناوب 2π.



فرکانس‌های بالا گذر در مجاورت مضارب فرد π و فرکانس‌های پایین گذر، در مجاورت مضارب زوج π خواهد بود. پاسخ ضربه یک چنین سیستمی عبارت است از:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{\sin(\omega_c n)}{(\pi n)} = \frac{\omega_c}{\pi}\,\mathrm{sinc}\,(\frac{\omega_c n}{\pi})$$

$$\mathrm{sinc}\,(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{(\pi\alpha)}$$

ویژگی‌های تقارنی تبدیل فوریه:

در مقدمه چند تعریف خواهیم داشت:

تعریف 1: دنباله مزدوج متقارن[1]: $x_e[n]$ را دنباله مزدوج متقارن یا هرمیتی گوییم، هرگاه:

$$x_e[n] = x_e^*[-n]$$

واضح است که اگر $x_e[n]$ حقیقی باشد:

$$x_e^*[-n] = x_e[-n] \Rightarrow x_e[n] = x_e[-n]$$

یعنی $x_e[n]$ یک دنباله زوج می‌باشد.

تعریف 2: دنباله مزدوج نامتقارن: $x_o[n]$ را دنباله مزدوج نامتقارن می‌نامیم، هرگاه:

$$x_o[n] = -x_o^*[-n]$$

اگر $x_o[n]$ حقیقی باشد، آنگاه $x_o[n]$ یک دنباله فرد خواهد بود.

نکته: هر دنباله اختیاری $x[n]$ را می‌توان به صورت مجموع دو دنباله مزدوج متقارن و نامتقارن نوشت:

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

$$\begin{cases} x_e[n] \triangleq \dfrac{1}{2}\{x[n] + x^*[-n]\} \\ x_o[n] \triangleq \dfrac{1}{2}\{x[n] - x^*[-n]\} \end{cases}$$

$x_e[n]$ دنباله مزدوج متقارن و $x_o[n]$ دنباله مزدوج نامتقارن است.(اثبات: به عهده خواننده)

همین کار را می‌توان درحوزه فرکانس نیز انجام داد:

$$X(e^{j\omega}) = Xe^{(e^{j\omega})} + Xo^{(e^{j\omega})}$$

$$X_e(e^{j\omega}) \triangleq \frac{1}{2}\{X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})\}$$

$$X_o(e^{j\omega}) \triangleq \frac{1}{2}\{X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})\}$$

[1] Conjugate symmetric string

اگر فرض کنیم:

$$x[n] \overset{f}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

ویژگی تقارنی 1:

$$x^*[n] \overset{f}{\leftrightarrow} X^*(e^{-j\omega})$$

اثبات:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \Rightarrow X^*(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]e^{j\omega n} \Rightarrow X^*(e^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]e^{-j\omega n} = f\{x^*[n]\}$$

ویژگی تقارنی 2:

$$x^*[-n] \overset{f}{\leftrightarrow} X^*(e^{j\omega})$$

ویژگی تقارنی 3:

$$\mathrm{Re}\,\{x[n]\} \overset{f}{\leftrightarrow} X_e(e^{j\omega})$$

اثبات:

$$\mathrm{Re}\,\{x[n]\} = \frac{1}{2}\{x[n] + x^*[n]\} \overset{f}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\{X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})\} = X_e(e^{j\omega})$$

ویژگی تقارنی 4:

$$j\mathrm{Im}\,\{x[n]\} \overset{f}{\leftrightarrow} X_o(e^{j\omega})$$

ویژگی تقارنی5:

$$x_e[n] \overset{f}{\leftrightarrow} \mathrm{Re}\,\{X(e^{j\omega})\}$$

اثبات:

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x^*[-n]\}$$

با استفاده از ویژگی 2 داریم:

$$f\{x_e[n]\} = \frac{1}{2}\{X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})\} = \mathrm{Re}\,\{X(e^{j\omega})\}$$

ویژگی تقارنی 6:

$$x_o[n] \overset{f}{\leftrightarrow} j\,\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}$$

این ویژگی، دوگان ویژگی 4 است (اثبات ویژگیهای اثبات نشده به عهده خواننده).

ویژگی تقارنی 7:

اگر $x[n]$ یک دنباله حقیقی باشد؛ آنگاه $X_o(e^{j\omega}) = 0$ می‌باشد.

$$x[n] = x^*[n] \Rightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \Rightarrow X_o(e^{j\omega}) = 0 \Rightarrow x[n] \overset{f}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

نتیجه‌گیری از ویژگی 7: دنباله حقیقی $x[n]$ باشد، آنگاه:

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \Rightarrow \mathrm{Re}\,\{X(e^{j\omega})\} + j\,\mathrm{Im}\,\{X(e^{j\omega})\} = \mathrm{Re}\,\{X^*(e^{-j\omega})\} + j\,\mathrm{Im}\,\{X^*(e^{-j\omega})\}$$
$$= \mathrm{Re}\,\{X(e^{-j\omega})\} - j\,\mathrm{Im}\,\{X(e^{-j\omega})\}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\,\{X(e^{j\omega})\} = \mathrm{Re}\,\{X(e^{-j\omega})\} \\ \mathrm{Im}\,\{X(e^{j\omega})\} = -\,\mathrm{Im}\,\{X(e^{-j\omega})\} \end{cases}$$

یعنی قسمت حقیقی تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی، تابعی زوج از فرکانس است و قسمت موهومی تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی، تابعی فرد از فرکانس است.

ویژگی تقارنی 8:

اگر $x[n]$ یک دنباله حقیقی باشد، آنگاه:

$$\text{حقیقی}\; x[n] \Rightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

$$|X(e^{j\omega})|e^{j\measuredangle X(e^{j\omega})} = |X^*(e^{-j\omega})|e^{j\measuredangle X^*(e^{-j\omega})}$$

$$\begin{cases} |X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \\ \measuredangle X(e^{j\omega}) = -\measuredangle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$$

نتیجه: اندازه تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی، تابعی زوج از فرکانس است. فاز تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی، تابعی فرد از فرکانس است.

جدول زیر خلاصه ای از ویژگیهای تقارنی تبدیل فوریه می باشد.

TABLE 2.1 SYMMETRY PROPERTIES OF THE FOURIER TRANSFORM

Sequence $x[n]$	Fourier Transform $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$ (conjugate-symmetric part of $X(e^{j\omega})$)
4. $j\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$ (conjugate-antisymmetric part of $X(e^{j\omega})$)
5. $x_e[n]$ (conjugate-symmetric part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega}) = \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n]$ (conjugate-antisymmetric part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega}) = j\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}$
The following properties apply only when $x[n]$ is real:	
7. Any real $x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (Fourier transform is conjugate symmetric)
8. Any real $x[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (real part is even)
9. Any real $x[n]$	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (imaginary part is odd)

مثال:

$$x[n] = a^n u[n] \quad \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \quad X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \qquad |a| < 1$$

خواص تبدیل فوریه:

با فرض اینکه:

$$x[n] \overset{f}{\leftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)$$

خاصیت 1: خطی بودن تبدیل فوریه:

$$x_1[n] \overset{f}{\leftrightarrow} X_1\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x_2[n] \overset{f}{\leftrightarrow} X_2\left(e^{j\omega}\right)$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \overset{f}{\leftrightarrow} aX_1\left(e^{j\omega}\right) + bX_2\left(e^{j\omega}\right)$$

خاصیت 2: شیفت زمانی و فرکانسی:

$$x[n] \overset{f}{\rightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x[n-n_d] \overset{f}{\leftrightarrow} e^{-j\omega n_d}.X\left(e^{j\omega}\right)$$

همچنین، دوگان آن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$e^{j\omega_o n}\, x[n] \overset{f}{\leftrightarrow} X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$$

خاصیت 3: وارونگی زمانی[1]:

$$x[n] \overset{f}{\leftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right) \qquad \Rightarrow \qquad x[-n] \overset{f}{\leftrightarrow} X\left(e^{-j\omega}\right)$$

اگر $x[n]$ حقیقی باشد، قضیه به صورت زیر در می‌آید:

$$x[-n] \overset{f}{\leftrightarrow} X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

خاصیت 4: مشتق‌گیری فرکانس:

$$x[n] \overset{f}{\leftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right) \quad \Rightarrow \quad nx[n] \overset{f}{\leftrightarrow} j\,\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}$$

با استفاده از تعریف، از طرف دوم مشتق می‌گیریم و طرف اول را می‌یابیم. (اثبات: به عهده خواننده)

[1] Time inverse

خاصیت 5: قضیه پارسوال:

$$x[n] \overset{f}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

$$y[n] \overset{f}{\leftrightarrow} Y(e^{j\omega})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}).Y^*(e^{-j\omega})d\omega$$

در حالت خاص، اگر $x[n] = y[n]$ باشد، داریم:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

خاصیت 6: قضیه کانولوشن:

$$x[n] \overset{f}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

$$h[n] \overset{f}{\leftrightarrow} H(e^{j\omega})$$

$$y[n] = x[n] * h[n] \overset{f}{\leftrightarrow} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}).H(e^{j\omega})$$

اثبات:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$\Rightarrow\ Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]\right)e^{-j\omega n}$$

تغییر متغیر : $n - k \triangleq n'$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]. \sum_{n'=-\infty}^{\infty} h[n']e^{-j\omega(n'+k)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega k} . \sum_{n'=-\infty}^{\infty} h[n']e^{-j\omega n'} = X(e^{j\omega}).H(e^{j\omega})$$

خاصیت 7: مدولاسیون یا پنجره زنی[1] :

اگر داشته باشیم:

$$x[n] \overset{f}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

$$w[n] \overset{f}{\leftrightarrow} W(e^{j\omega})$$

$$y[n] = x[n].w[n] \quad \Rightarrow \quad Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(e^{j\theta})w(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

در اینجا مشاهده می‌شود که ضرب در حوزه زمان، به کانولوشن در حوزه فرکانس تبدیل شده است. دقیقاً عکس آن چیزی که در قضیه کانولوشن دیدیم.

جدول زیر خلاصه ای از خواص تقارنی تبدیل فوریه را نشان می دهد.

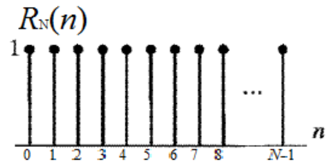
TABLE 2.2 FOURIER TRANSFORM THEOREMS

Sequence $x[n]$ $y[n]$	Fourier Transform $X(e^{j\omega})$ $Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
2. $x[n - n_d]$ (n_d an integer)	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ if $x[n]$ real.
5. $nx[n]$	$j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
Parseval's theorem:	
8. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 d\omega$	
9. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$	

[1] Windowing

مثال: پنجره مستطیلی: یک نوع پنجره پرکاربرد در زمان:

$$R_{\mathrm{N}}(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & Oth.\end{cases}$$



مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را به کمک خواص تبدیل فوریه به دست آورید.

$$x[n]=\ a^n\,u[n-5]$$

$$x_1[n]=\ a^n u[n]\overset{f}{\leftrightarrow}X_1\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}},\qquad |a|<1$$

$$x_2[n]=\ a^{n-5}u[n-5]\overset{f}{\leftrightarrow}X_2\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j5\omega}.\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$x[n]=\ a^5.x_2[n]\overset{f}{\leftrightarrow}X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{a^5.e^{-j5\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

جدول زیر برخی از تبدیل فوریه های سیگنالهای مهم را نشان می دهد.

TABLE 2.3 FOURIER TRANSFORM PAIRS

Sequence	Fourier Transform
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. $1\quad(-\infty<n<\infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
4. $a^n u[n]\quad(\|a\|<1)$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega+2\pi k)$
6. $(n+1)a^n u[n]\quad(\|a\|<1)$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n\sin\omega_p(n+1)}{\sin\omega_p}u[n]\quad(\|r\|<1)$	$\frac{1}{1-2r\cos\omega_p e^{-j\omega}+r^2e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & \|\omega\|<\omega_c,\\ 0, & \omega_c<\|\omega\|\le\pi\end{cases}$
9. $x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le M\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\omega}2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)+\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$

تبدیل فوریه دو بعدی:

ابتدا جند تعریف مقدماتی را خوا هیم دید:

تابع پله دو بعدی:

$$u(M,N) = \begin{cases} 1 & M \geq 0, \quad N \geq 0 \\ 0 & Oth. \end{cases}$$

تابع ضربه دوبعدی:

$$\delta(M,N) = \begin{cases} 1 & M = 0, \quad N = 0 \\ 0 & Oth. \end{cases}$$

دنباله جدایی پذیر[1]:

دنباله‌ای را جداپذیر گویند که بتوان آن‌را به صورت حاصلضرب دو دنباله جدا از هم نوشت. یعنی:

$$x(M,N) = x_1(M).x_2(N)$$

سیگنال دو بعدی را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از ضربه‌های دوبعدی نمایش داد:

$$x(M,N) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(k,r)\delta(M-k, N-r)$$

دریک سیستم خطی دو بعدی : $y(M,N) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(k,r)\, h_{k.r}(M,N) = x(M,N) * h(M,N)$

$$\delta(M-k\,, N-r) \xrightarrow{\text{پاسخ ضربه دو بعدی}} h_{k.r}(M,N)$$

درسیستم‌های خطی تغییر ناپذیر با زمان (LTI):

$$y(M,N) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(k,r)\, h(M-k\,, N-r)$$

تابع ویژه سیستم‌های دو بعدی عبارت است از:

$$e^{j(\omega_1 M + \omega_2 N)}$$

پاسخ فرکانسی:

[1] Seperatable

$$H\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right) = \sum_{M=-\infty}^{\infty} \sum_{N=-\infty}^{\infty} h(M,N) e^{-j(\omega_1 M + \omega_2 N)}$$

تبدیل فوریه دو بعدی با همان استدلال‌هایی که برای یک بعدی گفته شده است، بیان می‌گردد:

$$h(m,n) \overset{f}{\leftrightarrow} H\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right) \Rightarrow h(m,n) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi}\int H\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right) e^{j(\omega_1 M + \omega_2 N)} d\omega_1\, d\omega_2$$

درمورد هر سیگنال $x(m,n)$، می‌توان تبدیل فوریه را تعریف کرد:

$$x(m,n) \overset{f}{\leftrightarrow} X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right)$$

$$\begin{cases} X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m,n) e^{j(\omega_1 M + \omega_2 N)} \\ x(m,n) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi}\int X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right) e^{j(\omega_1 M + \omega_2 N)} d\omega_1\, d\omega_2 \end{cases}$$

$$x(m,n) \longrightarrow \boxed{h(m,n)} \longrightarrow y(m,n) = x(m,n) * h(m,n)$$

$$Y\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right) = X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right) . H\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right)$$

تبدیل فوریه دو بعدی، برای مثال در پردازش تصویر که در دو بعد x و y است، کاربرد دارد.