تکلیف سری چهارم درس پردازش سیگنال‌های دیجیتالی

(Digital Signal Processing)

مدرّس: دکتر سعید نصری

۱- رشته‌ی $x[n]$ زیر، با نمونه‌برداری از سیگنال پیوسته در زمان: $x_c(t) = \cos(\Omega_0 t), \quad -\infty < t < +\infty$ به دست آمده است:

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right), \quad -\infty < n < +\infty$$

آهنگ نمونه‌برداری ۱۰۰۰ نمونه بر ثانیه است. دو مقدار مثبت Ω_0 که می‌تواند رشته‌ی $x[n]$ را به دست داده باشد، تعیین کنید.

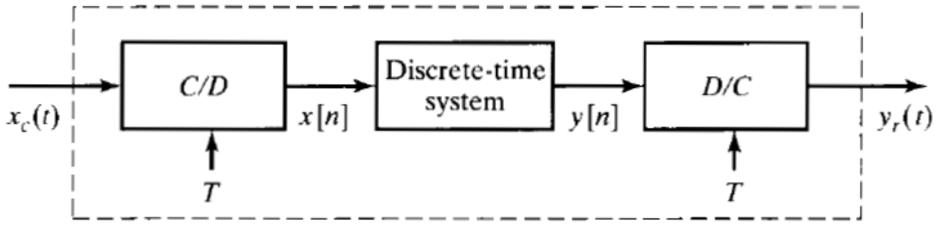
۲- سیگنال پیوسته در زمان $x_c(t) = \sin(20\pi t) + \cos(40\pi t)$ با تناوب T نمونه‌برداری شده و سیگنال گسسته در زمان زیر به دست آمده است:

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$$

الف) مقداری برای T برگزینید که با اطلاعات بالا سازگار باشد.

ب) آیا مقدار T بند قبل یکتا است؟ توضیح دهید.

۳- سیستم شکل زیر را در نظر بگیرید و فرض کنید سیستم گسسته در زمان آن یک فیلتر پایین گذر ایده‌آل با فرکانس قطع $\frac{\pi}{8}$ رادیان است.

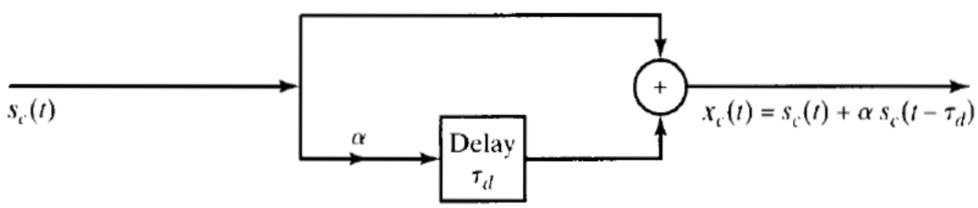


الف) اگر $x_c(t)$ به $5kHz$ باند-محدود باشد، ماکزیمم مقدار T که به ازای آن در مبدل C/D پدیده‌ی درهم‌روی بروز نمی‌کند چقدر است؟

ب) به ازای $\frac{1}{T} = 10kHz$، فرکانس قطع فیلتر پیوسته در زمان حاصل چقدر است؟

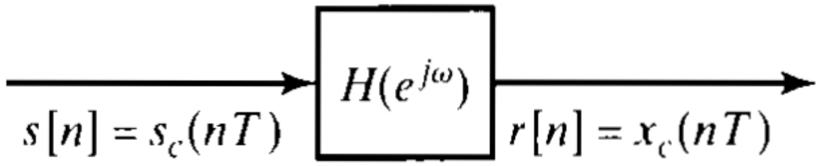
ج) بند (ب) را به ازای $\frac{1}{T} = 20kHz$ تکرار کنید.

۴- شکل زیر مدل ساده‌ی یک کانال مخابراتی چند مسیره را نشان می‌دهد. فرض کنید $s_c(t)$ باند-محدود است به نحوی که در $|\Omega| \geq \frac{\pi}{T}$ ، $s_c(j\Omega) = 0$ و $x_c(t)$ با تناوب T نمونه‌برداری شده و رشته‌ی زیر به دست آمده است.



الف) تبدیل فوریه‌ی $x_c(t)$ و تبدیل فوریه‌ی $x[n]$ را برحسب $s_c(j\Omega)$ تعیین کنید.

ب) می‌خواهیم این سیستم چند مسیره را با استفاده از یک سیستم گسسته در زمان شبیه سازی کنیم و $H(e^{j\omega})$ شکل زیر را به کار ببریم، طوری که به ازای ورودی $s[n] = s_c(nT)$ داشته باشیم $r[n] = x_c(nT)$. $H(e^{j\omega})$ را بر حسب T و τ_d بیان کنید.



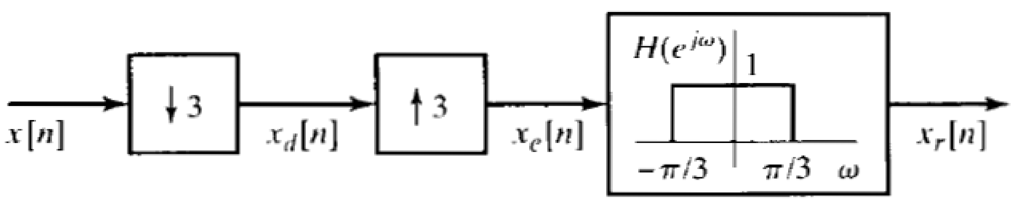
۵- یک سیستم گسسته در زمان پایدار $x[n]$ با تبدیل فوریه‌ی $X(e^{j\omega})$، که معادله‌ی $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$ را برآورده کند و تقارن زوج داشته باشد، در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که $X(e^{j\omega})$ با تناوب π متناوب است.

ب) مقدار $x[3]$ را بیابید.

ج) فرض کنید $y[n] = x[2n]$. آیا می‌توان $x[n]$ را از روی $y[n]$، بازسازی کرد؟ توضیح دهید.

۶- سیستم زیر را در نظر بگیرید.



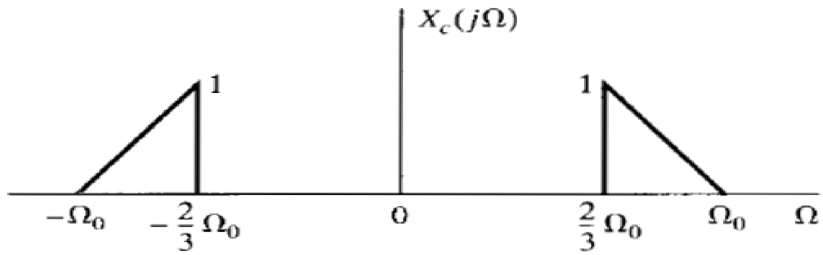
به ازای هر یک از سیگنال‌های ورودی $x[n]$ زیر تعیین کنید آیا خروجی $x_r[n] = x[n]$ است یا خیر.

a) $x[n] = \cos(\frac{\pi n}{4})$

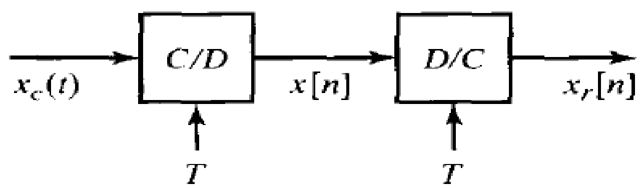
b) $x[n] = \cos(\frac{\pi n}{2})$

c) $x[n] = \left[\frac{\sin(\frac{\pi n}{8})}{\pi n}\right]^2$

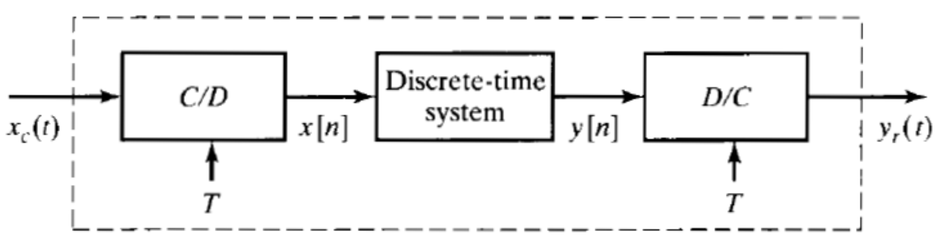
۷- سیگنال پیوسته در زمان $x_c(t)$ با تبدیل فوریه‌ی $X_c(j\Omega)$ نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید.



اگر این سیگنال به سیستم شکل زیر اعمال شود، گستره‌ی مقادیر T را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم $x_r(t) = x_c(t)$.

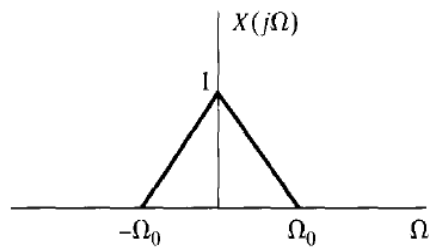


۸- سیستم شکل زیر را در نظر بگیرید.



سیگنال ورودی $x_c(t)$ دارای تبدیل فوریه‌ی نشان داده شده برای $\Omega_0 = 2\pi(1000)\text{rad/s}$ در شکل زیر است.

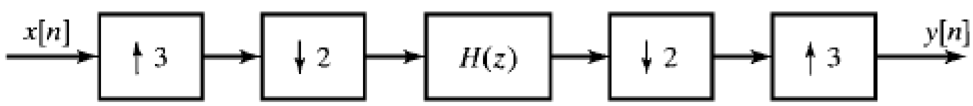
سیستم گسسته در زمان، یک فیلتر پایین گذر ایده‌آل با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$ است.



الف) مینیمم آهنگ نمونه‌برداری $F_s = \frac{1}{T}$ را به نحوی تعیین کنید که در نمونه‌برداری ورودی درهم‌روی بروز نکند.

ب) به ازای $\omega_c = \frac{\pi}{2}$، مینیمم آهنگ نمونه‌برداری را طوری تعیین کنید که $y_r(t) = x_c(t)$.

۹- نمودار بلوکی زیر، سیستمی را نشان می‌دهد که هدف، طراحی آن می‌باشد. نمودار بلوکی سیستم هم‌ارزی متشکل از سیستم‌های LTI، فشرده‌ساز و بازکننده رسم کنید.



توجه: منظور از سیستم هم‌ارز سیستمی است که به‌ازای ورودی یکسان، خروجی یکسانی ایجاد کند.

$$H(z) = \frac{z^{-6}}{-2z^{-12} + z^{-6} + 7}$$

موفق باشید