ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی (R.O.C) تبدیل z:

ویژگی 1 : R.O.C یا ناحیه همگرایی، به صورت $0 \le r_R < |z|$ ، یا به صورت $|z| < r_L < \infty$ ، یا در حالت کلی، حلقه‌ای به صورت $0 < r_R < |z| < r_L < \infty$ می باشد.

ویژگی 2 : تبدیل فوریه $x[n]$ تنها و تنها در صورتی مطلقا همگرا است که ناحیه همگرایی، دایره‌ی واحد را شامل شود .

ویژگی 3 : ناحیه همگرایی، هیچ قطبی را شامل نمی شود .

ویژگی 4 : در صورتی که $x[n]$ یک رشته با طول محدود یا به عبارتی، $n_1 < N < n_2$ باشد، ناحیه همگرایی تمام صفحه z است به جز احتمالا در $z = 0$ یا $z = \infty$.

ویژگی 5 : اگر $x[n]$ یک دنباله سمت راستی باشد یعنی $n > n_1$ باشد ، ناحیه همگرایی آن دایره‌ای است محدود به بزرگترین قطب تا بی نهایت. لازم به ذکر است، در بی نهایت بستگی به علامت n دارد .

ویژگی 6 : اگر $x[n]$ یک دنباله سمت چپی باشد ، ناحیه همگرایی آن به کوچکترین قطب محدود می شود تا $z = 0$ (مبدا). در ضمن، خود $z = 0$ بستگی به علامت n دارد.

ویژگی 7 : اگر $x[n]$ یک دنباله ای از دوطرف نامحدود (دوطرفه) باشد، ناحیه همگرایی آن حلقه ای است که از داخل و خارج به قطب محدود می شود. بدیهی است این ناحیه همگرایی، هیچ قطبی را شامل نمی شود .

ویژگی 8 : ناحیه همگرایی باید یک ناحیه متصل باشد .

خواص تبدیل z :

1- خطی بودن:

$z\{x[n]\} = X(z) \quad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

$z\{y[n]\} = Y(z) \quad R_{y^-} < |z| < R_{y^+}$

$z\{ax[n] + by[n]\} = aX(z) + bY[z] \quad R_- < |z| < R_+$

$R_- = \max\{R_x^-, R_y^-\} \qquad R_+ = \min\{R_x^+, R_y^+\}$

اگر ترکیب خطی صفری ایجاد کند که باعث حذف قطبی شود ، ناحیه همگرایی ممکن است بزرگتر از فصل مشترک باشد. وقتی ناحیه همگرایی بزرگتر می شود که یکی از قطب های محدود کننده را حذف کند .

مثال : تبدیل z و ناحیه همگرایی سیگنال $a^n u[n] - a^n u[n-1]$ را به دست آورید.

$x[n] = a^n u[n] \quad \Rightarrow \quad x(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a|$

$y[n] = a^n u[n-1] \quad \Rightarrow \quad y(z) = \frac{az^{-1}}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a|$

$X(z) - Y(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} - \frac{az^{-1}}{1-az^{-1}} = 1$

بدیهی است که $X(z), Y(z)$ ناحیه همگرایی محدود به قطب دارند، اما $X(z) - Y(z)$ ، دیگر محدود به قطب نمی باشد.

2- انتقال در زمان:

$z\{x[n]\} = X(z)$

$z\{x[n-n_0]\} = Z^{-n_0} X(z) \qquad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

بر حسب n_0 ناحیه همگرایی می تواند در 0 یا ∞ عوض شود .

اثبات : به عهده خواننده.

مثال : تبدیل z و ناحیه ی همگرایی هر یک از سیگنال‌های زیر را به دست آورید.

ناحیه همگرایی: تمام صفحه $\delta[n] \overset{z}{\leftrightarrow} 1$

ناحیه همگرایی: در $z = 0$ همگرا نیست $\delta[n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} z^{-1}$

ناحیه همگرایی: در $z = \infty$ همگرا نیست $\delta[n+1] \overset{z}{\leftrightarrow} z^{+1}$

3- ضرب دنباله در عامل نمایی:

$z\{x[n]\} = X(z)\,, \qquad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

$z\{a^n\, x[n]\} = X(a^{-1}\, z)\,, \qquad |a|R_{x^-} < |z| < |a|R_{x^+}$

قطب یا صفر جدید $z \Rightarrow az$ قطب یا صفر

اگر a حقیقی باشد ، در حقیقت، محل صفرها و قطب ها در یک امتداد جا به جا می شوند. در این صورت اگر $a > 1$ باشد باز یا گسترده[1] می شود و اگر $a < 1$ باشد ، فشرده[2] می شود. اگر a مختلط باشد و $|a| = 1$ ، اندازه قطب ها و صفرها عوض نمی شود ولی دوران می کند. مثلا اگر اندازه a مساوی 1 باشد روی یک دایره به شعاع واحد دوران می کند . (اثبات : به عهده خواننده)

[1] Expand
[2] Compress

4- معکوس کردن زمان:

$z\{x[n]\} = X(z),$ $\qquad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

$z\{x[-n]\} = X\left(\frac{1}{z}\right),$ $\qquad \frac{1}{R_{x^+}} < |z| < \frac{1}{R_{x^-}}$

اثبات: به عهده خواننده

5- مشتق‌گیری در صفحه z :

$z\{x[n]\} = X(z)$ $\qquad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$

$nx[n] \overset{z}{\leftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}$

اثبات :

$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$

$\Rightarrow \frac{dx(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n\, x[n]z^{-n-1}$

$\Rightarrow -z\, \frac{dx(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, x[n]z^{-n} = z\{n\, x[n]\}$

مثال : عکس تبدیل Z عبارت زیر را بیابید.

$X(z) = \log(1 + az^{-1})\,, \qquad |z| > a$

$n\, x[n] \overset{z}{\Leftrightarrow} -z\, \frac{d}{dz}\, \log_e(1 + az^{-1})$

$= \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} = 1 - \frac{1}{1+az^{-1}} \overset{z^{-1}}{\longleftrightarrow} \delta[n] - (-a)^n\, u[n] = -(-a)^n u[n-1]$

مثال : عکس تبدیل z عبارت زیر را بیابید.

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1+az^{-1})^2}, \qquad |z| > |a|$$

$$a^n\, u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1+az^{-1}}$$

$$n\, a^n\, u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} -z\, \frac{-a\, z^{-2}}{(1+az^{-1})^2} = \frac{az^{-1}}{(1+az^{-1})^2}$$

$$\frac{az^{-1}}{(1+az^{-1})^2} \overset{z^{-1}}{\longleftrightarrow} n\, a^n u[n]$$

6- مزدوج یک دنباله مختلط:

$$x[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z)$$

$$x^*[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X^*(z^*)$$

اثبات: به عهده خواننده

7- قضیه مقدار اولیه[3] :

اگر $x[n]$ یک سیگنال علی باشد، آنگاه :

$$x(0) = \lim_{Z\to\infty} X(z)$$

اثبات:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = x(0) + \sum_{n=1}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

چون n ها مثبت است ، تمام جملات $\frac{1}{z}$ می شود. پس:

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x(0) + 0$$

[3] Initial Value Theorem

8- قضیه کانولوشن:

$$x[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z)\,, \qquad R_{x^-} < |z| < R_{x^+}$$

$$y[n] \overset{z}{\leftrightarrow} Y(z)\,, \qquad R_{y^-} < |z| < R_{y^+}$$

$$x[n] * y[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z).Y(z) \quad , \qquad\qquad R_- < |z| < R_+$$

اثبات :

$$R_- = \max\{R_x^-, R_y^-\} \;, \qquad R_+ = \min\{R_x^+, R_y^+\}$$

$$z\{x[n] * y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)]z^{-n-k+k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \,.\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k)z^{-(n-k)} = X(z).Y(z)$$

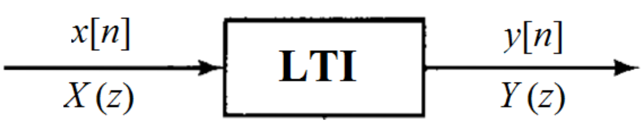
ناحیه همگرایی شامل فصل مشترک نواحی $x[n]$ و $y[n]$ است. اما اگر $Y(z)$ و $X(z)$ قطبی از همدیگر را حذف کنند، ناحیه همگرایی از فصل مشترک بیشتر خواهد شد .

نتیجه: در ضرب چند جمله‌ای یا سری توانی $X(z)$ و $Y(z)$ ضرایب چند جمله‌ای برابر است با کانولوشن ضرایب چند جمله ای های $X(z)$ و $Y(z)$.

جدول زیر خلاصه ای از خواص تبدیل z را نمایش می دهد.

Section Reference	Sequence	Transform	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	R_x
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_{x_1}
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_{x_2}
3.4.1	$ax_1[n]+bx_2[n]$	$aX_1(z)+bX_2(z)$	Contains $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
3.4.2	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R_x, except for the possible addition or deletion of the origin or ∞
3.4.3	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\|z_0\|R_x$
3.4.4	$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	R_x, except for the possible addition or deletion of the origin or ∞
3.4.5	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
	$\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z)+X^*(z^*)]$	Contains R_x
	$\mathcal{J}m\{x[n]\}$	$\frac{1}{2j}[X(z)-X^*(z^*)]$	Contains R_x
3.4.6	$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$1/R_x$
3.4.7	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Contains $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
3.4.8	Initial-value theorem: $x[n]=0,\quad n<0 \qquad \lim\limits_{z\to\infty} X(z)=x[0]$		

تابع سیستم[4]:



$$Y(z) = X(z) * H(z)$$

$H(z)$ را تابع سیستم می نامند. تابع سیستم برابر تبدیل z پاسخ ضربه‌ی سیستم ($H(z) = z\{h[n]\}$) است که همان مقدار ویژه است که در ابتدای فصل، معرفی گردید. بنابراین :

[4] System function

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\, z^{-n}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

پس تابع سیستم برابر است با تبدیل z خروجی به تبدیل z ورودی (برای هر ورودی دلخواه). اگر $|z| = 1$ باشد، تابع سیستم و پاسخ فرکانسی یکسان می شود. یعنی:

$$H(z) = H(e^{j\omega})$$

بررسی پایداری و علی بودن سیستم با توجه به تابع سیستم :

الف) پایداری: درفصل اول دیدیم که شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم آن است که :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

اما این شرط، همان شرط وجود تبدیل فوریه برای یک سیگنال است. از طرفی می دانیم تبدیل z همان تبدیل فوریه، به ازای $|z| = 1$ است . پس شرط فوق، معادل این است که بایستی برای پایداری سیستم، دایره واحد در ناحیه همگرایی قر ار بگیرد .

ب) علی بودن : برای این که یک سیستم علی باشد باید ناحیه همگرایی خارج یک دایره باشد . چرا که سیگنال علی، یک سیگنال سمت راستی است . نقطه بی نهایت باید در داخل ناحیه همگرایی باشد زیرا توان های مثبت ندارد .

شرط لازم و کافی برای پایداری و علیت آن است که همه قطب های $H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ در داخل یک دایره واحد قرار بگیرند .

معادله تفاضلی یک سیستم بر اساس تبدیل z :

هرسیستم LTI و علی توسط یک معادله دیفرانسیل (معادله تفاضلی) بیان می شود:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x(n-k)\ , \qquad \text{(I)}$$

$$H(z) = z\{h[n]\} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

تبدیل z از رابطه (I) $\Rightarrow \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{-k}}$

شرط لازم و کافی برای این که یک معادله دیفرانسیلی بیان کننده یک سیستم LTI علی باشد، آن است که سیستم، در آرامش اولیه به سر ببرد .

نکته: اگر $h[n]$ معلوم باشد، کلیه خواص سیستم مشخص است . همچنین، اگر $H(z)$ و ناحیه همگرایی مشخص باشد ، همه خواص سیستم، باز هم مشخص است. از طرفی، اگر .R.O.C و صفرها و قطب ها مشخص باشند، کلیه خواص سیستم مشخص است .

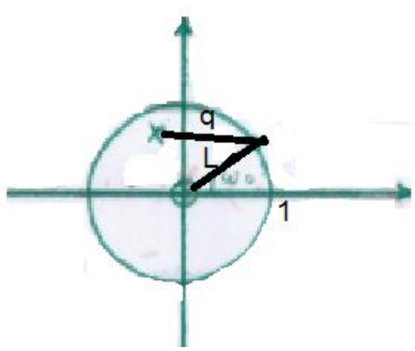
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M} a_k\, z^{-k}} = \frac{A\ \prod_{r=1}^{M}(1-c_r\, z^{-1})}{B\ \prod_{r=1}^{N}(1-b_r\, z^{-1})}$$

بنابراین با مشخص بودن صفرها و قطب ها می توان $H(j\omega)$ را به دست آورد .

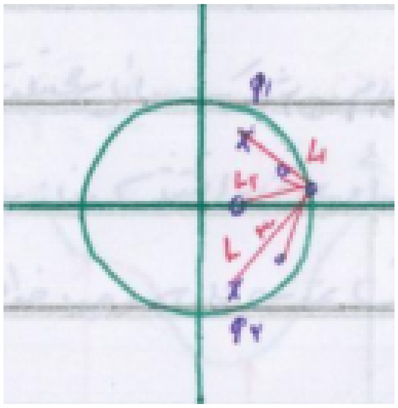
مثال : $H(z) = \frac{1\times z}{1-c_r\, z^{-1}\times z} \Rightarrow H(z) = \frac{z}{z-c_r} \Rightarrow \left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{L_1}{q_1}$

فاصله صفر تابع از دایره به شعاع واحد: L_1

فاصله قطب تابع از دایره به شعاع واحد: q_1



مثال :



$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \frac{L_1\, L_2\, L_3}{q_1 q_2}$$

در مجاورت صفرها ، min محلی و در مجاورت قطب ها max محلی وجود دارد .

تبدیل z دو بعدی :

$x[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$

$x[m,n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z_1, z_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[m,n] z_1^{-m}\, z_2^{-n}$

z_1 و z_2 کمیت های مختلط هستند .

$z_1 = r_1 e^{j\omega_1}\ ,\quad z_2 = r_2 e^{j\omega_2}$

$z\,\{x(m,n)\} = X\left(r_1 e^{j\omega_1}\, , r_2 e^{j\omega_2}\right)$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m,n) r_1^{-m}\, e^{-j\omega_1 m} \,.\, r_2^{-n}\, e^{-j\omega_2 m}$$

$= f\{x(m,n)\, r_1^{-m} \,.\, r_2^{-n}\}$

بخش های ناحیه همگرایی نیز شبیه یک بعدی است .

$x(m,n) = x_1(m).\, x_2(n)$

$X(z_1, z_2) = X_1(z).\, X_2(z)$

خاصیت کانولوشن :

$$x(m,n) * y(m,n) \overset{z}{\leftrightarrow} X(z_1,z_2).Y(z_1,z_2)$$

$$x(m,n) \longrightarrow \boxed{h(m,n)} \longrightarrow y(m,n)$$

$$y(m,n) = x(m,n) * h(m,n)$$

$$Y(z_1,z_2) = X(z_1,z_2).H(z_1,z_2)$$

تبدیل z یک طرفه :

اگر حدود سیگما از صفر تا مثبت بی نهایت باشد، تبدیل z یک طرفه خواهد بود؛ ولی اگر حدود سیگما از منفی بی نهایت تا مثبت بی نهایت باشد، تبدیل z دوطرفه خواهد شد. مثلا برای سیگنال های علی که سمت راستی هستند، تبدیل z یک طرفه و دو طرفه یکسان خواهد بود.