فصل پنجم

تبدیل فور یه گسسته در زمان

۵,۱) به کمک معادله تجزیه تبدیل فوریه (۵-۹) تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را بیابید:

(الف) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$

(ب) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|n-1|}$

اندازه هر تبدیل فوریه را در یک دوره تناوب رسم کنید.

حل:

(الف) فرض کنیم $x[n]=\left(1/2\right)^{n-1} u[n-1]$ بـا اسـتفاده از معادلـه آنـالیز تبـدیل فوریـه (۵,۹)، تبدیل فوریه $x\left(e^{j\omega}\right)$ این سیگنال برابر است با:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/2\right)^{n-1} e^{-j\omega n}=\sum_{n=c}^{\infty}\left(1/2\right)^{n} e^{-j\omega(n+1)}$$

$$=e^{-j\omega} \frac{1}{\left(1-1/2\, e^{-j\omega}\right)}$$

(ب) فرض کنید $x[n]=\left(1/2\right)^{n-1}$ با استفاده از معادله آنالیز تبـدیل فوریـه (۹۵,۹، تبـدیل فوریـه $x\left(e^{j\omega}\right)$ این سیگنال عبارتست از:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\circ}\left(1/2\right)^{-(n-1)} e^{-j\omega n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/2\right)^{n-1} e^{-j\omega n}$$

مجموع دوم در طرف راست معادله فوق دقیقاً مشابه نتیجه قسمت (الف) می باشد، حال:

$$\sum_{-\infty}^{\circ}\left(1/2\right)^{-(n-1)} e^{-j\omega n}=\sum_{n=\circ}^{\infty}\left(1/2\right)^{n+1} e^{j\omega n}=\left(1/2\right) \frac{1}{1-1/2\, e^{j\omega}}$$

بنابراین:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\left(1\!\!\diagup\!2\right)\frac{1}{1-\left(1\!\!\diagup\!2\right)e^{j\omega}}+e^{-j\omega}\frac{1}{1-1\!\!\diagup\!2\,e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{\circ.75e^{-j\omega}}{1.25-\cos\omega}$$

....

۵,۲) به کمک معادله تجزیه تبدیل فوریه را در یک دوره تناوب رسم کنید.

(الف) $\delta[n-1]+\delta[n+1]$ (ب) $\delta[n+2]-\delta[n-2]$

اندازه هر تبدیل فوریه را در یک دوره تناوب رسم کنید.

حل:

(الف) فرض کنید $x[n]=\delta[n-1]+\delta[n+1]$. با استفاده از معادله آنالیز تبـدیل فوریـه (۵,۹). تبدیل فوریه $\left(e^{j\omega}\right)$ برای این سیگنال عبارتست از:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-jn}$$

$$=e^{-j\omega}+e^{j\omega}=2\cos\omega$$

(ب) فرض کنید $x[n]=\delta[n+2]-\delta[n-2]$. با استفاده از معادله آنـالیز تبـدیل فوریـه (۵,۹)، تبدیل فوریه $x\left(e^{j\omega}\right)$ این سیگنال برابر است با:

$$x\left(c^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

$$=e^{2j\omega}-e^{-2j\omega}=2j\sin(2\omega)$$

....

۵,۳) تبدیل فوریه هر یک از سیگنالهای متناوب زیر را در $-\pi\le\omega<\pi$ به دست آورید:

(الف) $\sin\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4}\right)$

(ب) $2+\cos\left(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{8}\right)$

حل:

از بخش ۵٫۲ توجه کنید که سیگنال متناوب $x[n]$ با نمایش سری فوریه زیر

$$x[n]=\sum_{K=\langle N\rangle} a_k e^{jk\left(2\pi/Nn\right)}$$

تبدیل فوریه زیر را دارد:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=2\pi a_k \delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)$$

(الف) سیگنال $x_1[n]=\sin\left(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{4}\right)$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که پریود پایه سیگنال $x_1[n]$ برابر است با $N=6$.

سیگنال را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$x_1[n]=\left(1/2j\right)e^{j\left(\pi/3n+\pi/4\right)}-\left(1/2j\right)e^{-j\left(\pi/3n+\pi/4\right)}=\left(1/2j\right)e^{j\pi/4}e^{j\frac{2\pi}{6}n}-\left(1/2j\right)e^{-j\pi/4}e^{-j\pi/3}$$

بااستفاده از این، ضرایب غیر صفر سری فوریه a_k برای $x_1[n]$ در بازه $-2\le k\le 3$ به صورت زیر بدست می آوریم:

$$a_1=\left(1/2j\right)e^{j\pi/4}\quad,\quad a_{-1}=\left(-1/2j\right)e^{-j\pi/4}$$

بنابراین در این بازه $-\pi\le\omega\le\pi$، بدست می‌آوریم:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=2\pi a_1\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{6}\right)+2\pi a_{-1}\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{6}\right)$$

$$=\left(\pi/j\right)\left(e^{j\pi/4}\delta\left(\omega-2\pi/6\right)\right)+e^{-\pi/4}\delta\left(\omega+2\pi/6\right)$$

(ب) سیگنال $x_2[n]=2+\cos\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{8}$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که پریود پایه سیگنال $x_1[n]$ برابر $N=12$ می باشد. سیگنال به صورت زیر قابل بیان می باشد.

$$x_1[n]=2+\left(1/2\right)e^{j\left(\pi/6n+\pi/8\right)}+1/2\,e^{-j\left(\pi/6n+\pi/8\right)}$$

$$=2+\left(1/2\right)e^{+j\pi/8}e^{j\pi/6n}+\left(1/2\right)e^{-j\pi/8}e^{-j\frac{\pi}{6}n}$$

از این، ضرایب غیر صفر سری فوریه a_k در بازه $-5\le k\le 6$ به صورت زیر بدست می آوریم:

$$a_{\circ}=2 \qquad \text{و} \qquad a_1=\left(\tfrac{1}{2}\right)e^{j\pi/8} \qquad \text{و} \quad a_{-1}=\left(\tfrac{1}{2}\right)e^{-j\pi/8}$$

بنابراین در بازه $-\pi \le \omega \le \pi$ بدست می آوریم:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=2\pi\, a_{\circ}\delta(\omega)+2\pi\, a_1\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{12}\right)+12\pi a_{-1}\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{12}\right)$$
$$=4\pi\delta(\omega)+\pi\left\{e^{i\pi/8}\delta\left(\omega-\pi/6\right)+e^{-j\pi/8}\delta\left(\omega+\pi/6\right)\right\}$$

....

۵,٤) با استفاده از معادله ترکیب فوریه (۵–۸) عکس تبدیل فوریه های زیر را بیابید:

(الف) $X_1\left(e^{j\omega}\right)=\sum k^{\infty}=-\infty\left\{2\pi\delta\left(\omega-2\pi k\right)+\pi\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}-2\pi k\right)+\pi\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}-2\pi k\right)\right\}$

(ب) $X_2\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}2j\ , & \circ<\omega\le\pi\\ -2j, & -\pi<\omega\le\circ\end{cases}$

حل:

(الف) با استفاده از معادله آنالیز تبدیل فوریه (۵,۸):

$$x_1[n]=\left(1/2\pi\right)\int_{-\pi}^{\pi}x_1\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}s\omega$$
$$=1/2\pi\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\pi\delta(\omega)\right)+\pi\delta\left(\omega-\pi/2\right)+\pi\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)\Big]e^{+j\omega n}d\omega$$
$$=e^{j\omega}+\left(1/2\right)e^{j\pi/2\,n}+\left(1/2\right)e^{-j(\pi/2)\pi}$$

(ب) با استفاده از معادله آنالیز تبدیل فوریه (۵,۸)؛

$$x_2[n]=\left(1/2\,\pi\right)\int_{-\pi}^{\pi}x_2\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$
$$=\left(-\frac{1}{2\pi}\right)\int_{-\pi}^{\circ}2je^{j\omega n}d\omega+\left(1/2\pi\right)\int_{\circ}^{\pi}2je^{j\omega n}d\omega$$
$$=\left(j/\pi\right)\left[-\frac{1-e^{-jn\pi}}{jn}+\frac{e^{jn\pi}}{jn}\right]$$
$$=-\left(4/n\pi\right)\sin^2\left(\pi n/2\right)$$

....

۵,۵) با استفاده از معادله ترکیب (۵-۸) عکس تبدیل فوریه $X\left(e^{j\omega}\right)$ را بیابید، که برای آن

$$\triangleleft X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{3\omega}{2} \qquad \text{و} \qquad \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|=\begin{cases}1, & \circ \le |\omega| < \dfrac{\pi}{4} \\ \circ, & \dfrac{\pi}{4} \le |\omega| \le \pi\end{cases}$$

با استفاده از نتیجه به دست آمده مقادیری از n را بیابید که در آنها $x[n]=\circ$.

حل:

از اطلاعات داده شده:

$$\begin{aligned} x[n] &= \left(1/2\pi\right)\int_{-\pi}^{\pi} x\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \\ &= \left(1/2\pi\right)\int_{-\pi}^{\pi}\left|x\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\circ\{x(e^{j\omega})\}}e^{j\omega n}d\omega \\ &= \left(1/2\pi\right)\int_{-\pi/4}^{\pi} e^{-3/2\,\omega}e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{\sin\left\{\frac{\pi}{4}\left(n-3/2\right)\right\}}{\pi\left(n-3/2\right)} \end{aligned}$$

سیگنال $x[n]$ هنگامیکه $\frac{\pi}{4}\left(n-\frac{3}{2}\right)$ یک ضریب غیرصفر π باشد و یا هنگامیکه $|n|\to\infty$، صفر خواهد بود. مقدار $\frac{\pi}{4}\left(n-\frac{3}{2}\right)$ هرگز مانند حالتی که آن یک ضریب غیرصفر π است باشد. بنابراین $x[n]=\circ$ تنها وقتی $n=\pm\infty$.

۵,۶) $X\left(e^{j\omega}\right)$ تبدیل فوریه $x[n]$ است. تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را برحسب $X\left(e^{j\omega}\right)$ بیان کنید. از خواص مندرج در جدول ۵-۱ استفاده کنید.

(الف) $x_1[n]=x[1-n]+x[-1-n]$

(ب) $x_2[n]=\dfrac{x^*[-n]+x[n]}{2}$

(ج) $x_3[n]=(n-1)^2x[n]$

حل:

در این مسئله، فرض کنیم که $x[n] \xleftrightarrow{FT} x_1(e^{j\omega})$

(الف) بااستفاده از خاصیت معکوس پذیری (٥,٣,٦ را ببنید) داریم:

$$x[-n] \xleftrightarrow{FT} x(e^{-j\omega})$$

با استفاده از خاصیت شیفت زمانی (٥,٣,٣ را ببینید) داریم:

$$x[-n-1] \xleftrightarrow{FT} e^{j\omega n} x(e^{-j\omega}) \quad \text{و} \quad x[-n+1] \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega n} x(e^{j\omega})$$

بنابراین

$$x_1[n] = x[-n+1] + x[-n-1] \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega n} x(e^{-j\omega}) + e^{j\omega n} x(e^{-j\omega})$$
$$\leftrightarrow 2x(e^{-j\omega})\cos\omega$$

(ب) با استفادهاز خاصیت معکوس پذیری (شکل S.٣,٥) داریم:

$$x[-n] \xleftrightarrow{FT} x(e^{-j\omega})$$

با استفاده از خاصیت مزدوج گیری در این مورد داریم:

$$x^*[-n] \xleftrightarrow{FT} x^*(e^{j\omega})$$

بنابراین:

$$x_2[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x^*[n] + x[n]\right) \xleftrightarrow{FT} \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x(e^{j\omega}) + x^*(e^{j\omega})\right)$$
$$\xleftrightarrow{FT} \mathrm{Re}\{x(e^{j\omega})\}$$

(ج) با استفاده ازخاصیت مشتقگیری در فرکانس (٥,٣,٨ را ببینید.) داریم:

$$nx[n] \xleftrightarrow{FT} j\frac{dx(e^{j\omega})}{d\omega}$$

بااستفاده از خاصیت مشتقگیری برای دومین بار:

$$x^2 x[n] \xleftrightarrow{FT} -\frac{d^2 x(e^{j\omega})}{d\omega^2}$$

بنابراین:

$$x_3[n] = n^2 x[n] - 2nx[n] + 1 \xleftrightarrow{FT} -\frac{d^2 x(e^{j\omega})}{d\omega^2} - 2j\frac{dx(e^{j\omega})}{d\omega} + x(e^{j\omega})$$

....

۵,۷) برای هر یک از تبدیل فوریه های زیر، به کمک خواص تبدیل فوریه (جدول ۵-۱) تعیین کنید که آیا سیگنال حوزه زمان (i) حقیقی است، موهومی است، یا هیچکدام، و (ii) زوج است، فردست، یا هیچکدام. عکس تبدیل فوریه را حساب نکنید.

(الف) $X_1\left(e^{j\omega} = e^{-j\omega}\sum_{k=1}^{10}\left(\sin k\,\omega\right)\right)$ (ب) $X_2\left(e^{j\omega}\right)$

(ب) $X_2\left(e^{j\omega}\right) = j\sin(\omega)\sin(5\omega)$

(ج) $X_3\left(e^{j\omega}\right) = A(\omega) + e^{jB(\omega)}$ که در آن

$$A(\omega) = \begin{cases} 1, & \circ \le |\omega| \le \frac{\pi}{8} \\ \circ, & \frac{\pi}{8} < |\omega| \le \pi \end{cases} \qquad \text{و} \qquad B(\omega) = -\frac{3\omega}{2} + \pi$$

حل:

(الف) سیگنال $y_1[n]$ با تبدیل فوریه زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_1\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=1}^{10}\sin(k\omega)$$

مشاهده می کنیم که $Y_1\left(e^{j\omega}\right)$ حقیقی و فرد است. جدول ۵,۱ را ببینید که تبدیل فوریه سیگنال حقیقی و فرد است. بابراین، می توان گفت که تبدیل یک سیگنال موهومی خالص و مرد، حقیقی و فرد خواهد بود. با استفاده از این ملاحظه، نتیجه می گیریم که $y_1[n]$ موهومی خالص و فرد است.

توجه کنید که: $x\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\omega}Y_1\left(e^{j\omega}\right)$

بنابراین $x_1[n]$ همچنین موهومی خالص اما $x_1[n]$ نه زوج و نه فرد است.

(ب) توجه کنید که $x_2\left(e^{j\omega}\right)$ موهومی خالص و فرد است. بنابراین $x_2[n]$ بایستی حقیقی و فرد باشد.

(پ) سیگنال $y_3[n]$ با اندازه تبدیل فوریه $\left|Y_3\left(e^{j\omega}\right)\right| = A(\omega)$ و فاز تبدیل فوریه $\circ\left\{Y_3\left(e^{j\omega}\right)\right\} = -\left(3/2\right)\omega$ را در نظر بگیرید. چون $\left|Y_3\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|Y_3\left(e^{-j\omega}\right)\right|$ و $\circ\left\{Y_3\left(e^{j\omega}\right)\right\} = -\circ\left\{Y_3\left(e^{-j\omega}\right)\right\}$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که سیگنال $y_3[n]$، حقیقی است. (جدول ۵,۱ و خاصیت ۵,۳,٤ را ببینید).

حـال، سـیگنال $x_3[n]$ را بـا تبـدیل فوریـه $-Y_3(j\omega)=x_3(e^{j\omega})=Y_3(e^{j\omega})e^{j\pi}$ را در نظـر بگیرید. بااستفاده از نتیجه پاراگراف قبلی و خاصیت خطی تبدیل فوریه، می توانیم نتیجـه بگیـریم کـه $x_3[n]$، بایستی حقیقی باشد.

بدلیل اینکه تبدیل فوریه $x_3(e^{j\omega})$ موهومی خالص و حقیقی خالص نیست، سیگنال $x_3[n]$ نه فرد و نه زوج است.

....

۵٫۸) با استفاده از جدولهای ۵-۱ و ۵-۲ $x[n]$ دارای تبدیل فوریه زیر را تعیین کنید:

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}\left(\frac{\sin\frac{3}{2}\omega}{\sin}\right)+5\pi\delta(\omega),\ -\pi<\omega\le\pi$$

حل:

$$x_1[n]=\begin{cases}1 & |n|\le 1\\ \circ & |n|>1\end{cases}$$

از جدول ۵٫۲ می دانیم که:

$$x_1[n]\xleftrightarrow{FT}x_1(e^{j\omega})=\frac{\sin(3\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

با استفاده از خاصیت جمعگیری داریم:

$$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{1-e^{-j\omega}}x_1(e^{j\omega})+\pi x(e^{jc})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

بنابراین، در بازه $-\pi\le\omega\le\pi$:

$$\sum_{k=-\infty}^{n}x_1[k]\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{1-e^{-j\omega}}x_1(e^{j\omega})+3\pi\delta(\omega)$$

همچنین، در بازه $-\pi<\omega\le\pi$

$$1 \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega)$$

بنابراین در بازه: $-\pi < \omega \le \pi$

$$x[n] = 1 + \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{1-e^{-j\omega}} x_1\left(e^{j\omega}\right) - s\pi\delta(\omega)$$

سیگنال $x[n]$ تبدیل فوریه ی مطلوب را دارد. می توانیم $x[n]$ به صورت ریاضی بـه ایـن ترتیـب داشته باشیم:

$$x[n] = 1 + \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] = \begin{cases} 1 & n \le -2 \\ n+3 & -1 \le n \le 1 \\ 4 & n \ge 2 \end{cases}$$

....

۵,۹) چهار خاصیت زیر در مورد یک سیگنال $x[n]$ با تبدیل فوریه $X\left(e^{j\omega}\right)$ داده شده است.

۱. $x[n] = ۰$ در $n > ۰$

۲. $x[۰] > ۰$

۳. $g_m\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\} = \sin\omega - \sin 2\omega$

٤. $\frac{1}{2}\int_{\pi}^{\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega = 3$

حل:

از خاصیت ۵,۳,٤ در جدول ۵,۱، می دانیم که برای سیگنال حقیقی $x[n]$.

$$od\{x[n]\} \xleftrightarrow{FT} j\,\mathrm{Im}\left\{x\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

از اطالعات داده شده:

$$j\,\mathrm{Im}\left\{x\left(e^{j\omega}\right)\right\} = \int \sin\omega - \int \sin 2\omega$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)\left\{e^{j\omega} - e^{-j\omega} - e^{2j\omega} + e^{-2j\omega}\right\}$$

بنابراین:

$$od\{x[n]\} = \ell FT\left\{j\,\mathrm{Im}\left\{x\left(r^{j\omega}\right)\right\}\right\}$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)\left\{\delta[n+1] - \delta[n-1] - \delta[n+2] + \delta[n-2]\right\}$$

همچنین می دانیم که

$$odd\{x[n]\} = \frac{x[n] - x[-n]}{2}$$

و برای $n > \circ$، $x[n] = c$ است، بنابراین:

$$x[n] = 2odd\{x[n]\} = \delta[n+1] - \delta[n+2] \qquad for \quad n < \circ$$

حال، فقط بایستی $x[\circ]$ را پیدا کنیم. با استفاده از رابطه پارسئوال، داریم:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x\left(e^{j\omega}\right) \right|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| x[n] \right|^2$$

از اطلاعات داده شده، می توان نوشت:

$$3 = \left(x[\circ]\right)^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left| x[n] \right|^2 = \{x[\circ]\}^2 + 2$$

که می دهد $x[\circ] = \pm 1$. اما بدلیل اینکه $x[\circ] > \circ$، می توان نتیجه گرفت که $x[\circ] = 1$

بنابراین

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n+1] - \delta[n+2]$$

۵,۱۰) با استفاده از جدولهای ۵-۱ و ۵-۲ و این حقیقت که

$$X\left(e^{j\circ}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$$

مقدار عددی A تعریف شده در زیر را بیابید.

$$A = \sum_{n=\circ}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

حل:

از جدول ۵,۲ می دانیم که

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

با استفاده از خاصیت ۵,۳,۸ جدول ۵,۱ داریم:

$$x[n]=n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]\xleftrightarrow{FT}x\left(e^{j\omega}\right)=j\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{1}{1-\tfrac{1}{2}e^{-j\omega}}\right\}$$

$$=\frac{\tfrac{1}{2}e^{-j\omega}}{\left(1-\tfrac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=\circ}^{\infty}n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]=x\left(e^{\circ j}\right)=2$$

۵,۱۱) سیگنال $g[n]$ با تبدیل فوریه $G\left(e^{j\omega}\right)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید

$$g[n]=x_{(2)}[n]$$

سیگنال $x[n]$ دارای تبدیل فویه $X\left(e^{j\omega}\right)$ است. عدد حقیقی a را به نحوی تعیین کنید که $G\left(e^{j\omega}\right)=G\left(e^{j(\omega-a)}\right)$ و $\circ<a<2\pi$

حل:

از خاصیت بسط زمانی می دانیم که (جدول ۵,۱ خاصیت ۵,۳,۷):

$$g[n]=x_{(2)}[n]\xleftrightarrow{FT}G(j\omega)=x\left(e^{j2\omega}\right)$$

بنابراین $G\left(e^{j\omega}\right)$ خلاصه کردن $x\left(e^{j\omega}\right)$ با ضریب ۲ بدست می‌آید. از آنجایی که می‌دانیم $x\left(c^{j\omega}\right)$ با دوره تناوب 2π متناوب است. می توانیم نتیجه بگیریم که $G\left(e^{j\omega}\right)$ با پریود $\left(\tfrac{1}{2}2\pi\right)=\pi$ پریودیک است. بنابراین $\propto=\pi$, $G\left(e^{j\omega}\right)=G\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$

۵,۱۲) فرض کنید.

$$[n]=\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi\ n}\right)^2*\left(\frac{\sin\omega_c n}{\pi\ n}\right)$$

که در آن * علامت کانولوشن است و $|\omega_c|\leq\pi$. ω_c را مقیدتر کنید به نحوی که داشته باشیم

$$y[n]=\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}\right)^2$$

حل:

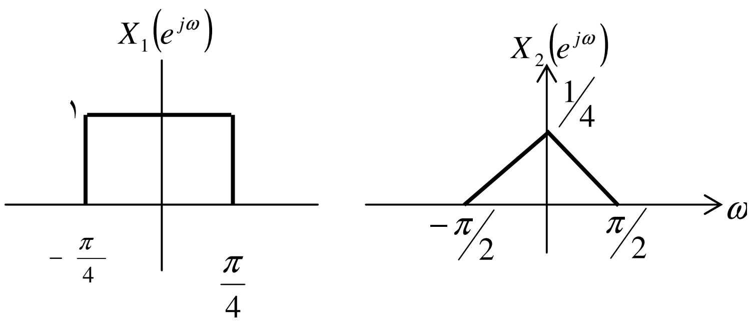
سیگنال $x_1[n]$ را به صورت زیر در نظر بگیرید.

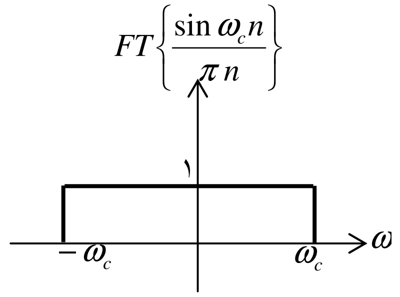
$$x_1[n]=\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}$$

از جدول ۵,۲، تبدیل فوریه $x_1[n]$ به صورت زیر خواهد بود.

$$x_1(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & \circ<|\omega|\le \pi/4\\ \circ & \frac{\pi}{4}<|\omega<\pi|\end{cases}$$

شکل $x_2[n]=\{x_1[n]\}^2$ در شکل ح۵,۱۲ رسم شده است. حال سیگنال $x_2[n]$ را به صورت $x_2[n]=\{x_1[n]\}^2$ فرض کنید. با استفاده از خاصیت ضرب (جدول ۱. خاصیت ۵,۵) تبدیل فوریه $x_2[n]$ را به صورت زیر بدست می آوریم: $x_2(e^{j\omega})=\left(1/2\pi\right)\left(x_1(e^{j\omega})\right)*(e^{j\omega})$ که این در شکل ح۵,۱۲ رسم شده است.





شکل ح۵۵,۱۲

از شکل ۵۵,۱۲ واضح است که $x_2\left(e^{j\omega}\right)$ بـه ازاء $|\omega|>\frac{\pi}{2}$ صـفر اسـت. بـا اسـتفاده از خاصـیت کانولوشن (جدول ۵,۱، خاصیت ۵,٤) می‌دانیم که:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=x\left(e^{j\omega}\right)FT\left\{\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}\right\}$$

طرحـواره $FT\left\{\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}\right\}$ در شـکل ۵۵,۱۲ نمـایش داده شـده اسـت. واضـح اسـت کـه اگـر $\frac{\pi}{2}\le\omega_c\le\pi$ باشد. در اینصورت $Y\left(e^{j\omega}\right)=x\left(e^{j\omega}\right)$.

....

۵,۱۳) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h_1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ با یک سیستم LTI علی دیگر بـا پاسـخ ضربه $h_2[n]$ موازی شده است. پاسخ فرکانسی سیستم کل عبارت است از

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{-12+5e^{-j\omega}}{12-7e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}}$$

$h_2[n]$ را بیابید.

حل:

هنامیگه دو سیستم LTI به صورت موازی با هم بسته می شوند. پاسخ ضربه سیستم کلی، مجمـوع پاسخهای ضربه ی تک تک سیستمها به صورت جداگانه می باشد؛ بنابراین:

$$h[n]=h_1[n]+h_2[n]$$

با استفاده از خاصیت خطی بودن (جدل ۵,۱، خاصیت ۵,۳,۲):

$$H\left(e^{j\omega}\right)=H_1\left(e^{j\omega}\right)+H_2\left(e^{j\omega}\right)$$

فرض شده است که $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$، بدست می آوریم:

$$H_1\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

در این صورت:

$$H_2\left(e^{j\omega}\right)=\frac{-12+5e^{-j\omega}}{12-7e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{-2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه:

$$h_2[n]=-2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

....

۵,۱٤) اطلاعات زیر در مورد سیستم، LTI و S با پاسخ ضربه $h[n]$ و پاسخ فرکانسی $H\left(e^{j\omega}\right)$ داده شده است.

۱. $\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\rightarrow g[n]$، که در آن $g[n]=0$، در $n\geq 2$ و $n<0$.

۲. $H\left(e^{j\pi/2}\right)=1$

۳. $H\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$

$h[n]$ را تعیین کنید.

حل:

از اطلاعات داده شده، تبدیل فوریه $g[n]$ که برابر $G\left(e^{j\omega}\right)$ را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$G\left(e^{j\omega}\right)=g[0]+g(1)e^{-j\omega}$$

همچنین هنگامیکه ورودی سیستم برابر $x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ باشد، خروجی سیستم $g[n]$ خواهد بود:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{G\left(e^{j\omega}\right)}{x\left(e^{j\omega}\right)}$$

از جدول ٥,٢ داریم:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

بنابراین:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\{g[\circ]+g[1]\}e^{-}$$
$$H\left(e^{j\omega}\right)=\left\{g[\circ]+g[1]e^{-j\omega}\right\}\left\{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right\}=g[\circ]+\{g\circ\}e^{-j\omega}-g[1]e^{-2j\omega}$$

بدیهی است که $h[n]$ یک دنباله ۳ جمله ای به صورت زیر است:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=h[\circ]+h[1]e^{-j\omega}+h[2]e^{-2j\omega}$$
$$H\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)=h[\circ]+h[1]e^{-j(\omega-\pi)}+h[z]e^{-2j(\omega-\pi)}$$
$$=h[\circ]-h[1]e^{-j\omega}+h[2]e^{-2j\omega}$$

مشاهده می شود که اگر تنها $h[1]=\circ$ باشد. $\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$ $H\left(e^{j\omega}\right)=H$همچنین، داریم:

$$H\left(e^{j\pi/2}\right)=h[\circ]+h[1]e^{-j\pi/2}+h[2]e^{-2j\pi/2}$$
$$=h[\circ]-h[2]$$

چون داده شده است $H\left(e^{j\pi/2}\right)=1$ داریم:

$$h[\circ]-h[2]=1 \qquad \text{(ح١-١٤-٥)}$$

حال توجه کنید که

$$g[n]=h[n]*\left\{\left(1/4\right)^{n}u[n]\right\}$$
$$=\sum_{k=c}^{2}h[k]\left(1/4\right)^{n-k}u[n-k]$$

با محاسبه مقدار در $n=2$ داریم:

$$g[2]=\circ=1/16\,h[\circ]+1/4\,h[1]+h[2]$$

بدلیل اینکه $h[1]=\circ$؛

$$\frac{1}{16}h[\circ]+h[2]=\circ \qquad \text{(ح٢-٥,١٤)}$$

با حل معادلات (ح۱-۵,۱۴) و (ح۲-۵,۱۴) همزمان داریم:

$$h[\circ]=\frac{16}{17} \quad , \quad h[2]=\frac{-1}{17}$$

بنابراین:

$$h[n]=\frac{16}{17}\delta[n]-\frac{1}{17}\delta[n-2$$

....

۵,۱۵) عکس تبدیل فوریه $Y\left(e^{j\omega}\right)$ عبارت است از

$$y[n]=\left(\frac{\sin\ \omega_c n}{\pi\ \ n}\right)^2$$

که در آن $\pi > \omega_c > \circ$. ω_c را به نحوی تعیین کنید که داشته باشیم

$$Y\left(e^{j\pi}\right)=\frac{1}{2}$$

حل:

فرض کنید که $x[n]=\sin\omega_c n/(\pi n)$. تبدیل فوریه $x[n]$ در شکل ح۵,۱۵ نشان داده شده است. توجه کنید که سیگنال $y[n]=x[n]x[n]$ داده شده است. بنابراین $Y\left(e^{j\omega}\right)$ که همان تبدیل فوریه $y[n]$ است، به صورت

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}x\left(e^{j\theta}\right)x\left(e^{j(\omega-e)}\right)d\theta$$

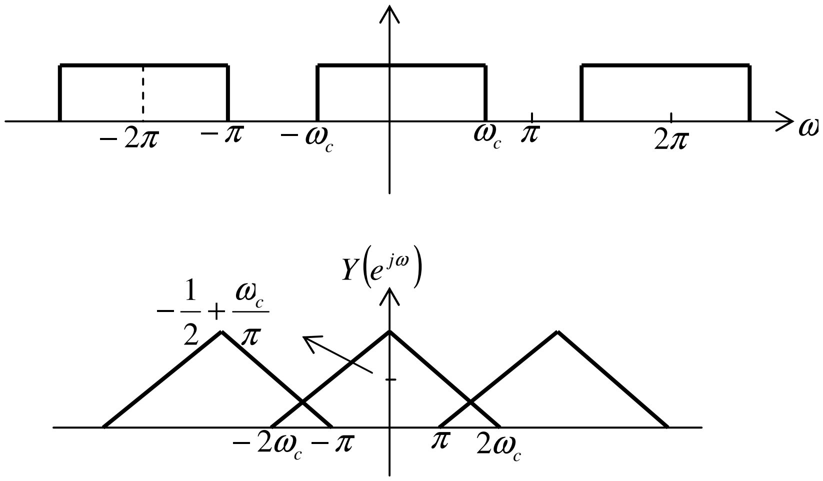
با اعمال روش استفاده شده در ۵,۱۵، می توان کانولوشن فوق را به سیگنال پریودیک با تعریف زیر، تبدیل کرد:

$$\tilde{x}\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}x\left(e^{j\omega}\right) & -\pi<\omega\leq\pi \\ \circ & \text{سایر نقاط}\end{cases}$$

بنابراین می توان نوشت:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{x}\left(e^{jt}\right)x\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$$

ابن، کانولوشن متناوب پالس مستطیلی $\tilde{x}\left(e^{j\omega}\right)$ نشان داده شده در شکل ح۵,۱۵ با موج مربعی متناوب $x\left(e^{j\omega}\right)$ می باشد. نتیجه عمل کانولوشن در شکل ح۵,۱۵ نشان داده شده است.



شکل (ح٥,١٥)

از شکل بدیهی ست که بایستی $1/2 = \left(2\frac{\omega c}{\pi}\right)+1-$ در نتیجه $\omega c=\frac{3\pi}{4}$.

٣,١٦) تبدیل فوریه یک سیگنال خاص به صورت زیرست

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=0}^{3}\frac{(1/2)^k}{1-\frac{1}{4}e^{-j(\omega-\pi/2k)}}$$

می توان نشان داد که

$$x[n]=g[n]q[n]$$

که $g[n]$ به شکل $a^n u[n]$ و $q[n]$ سیگنال متناوبی با دوره تناوب N است.

(الف) a را تعیین کنید. (ب) N را تعیین کنید.

(ج) آیا $x[n]$ حقیقی است؟

حل:

می توان نوشت:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}*\left[2\pi\sum_{k=\circ}^{3}\delta\left(\omega-\frac{\pi k}{2}\right)\right]\right\}$$

که $(*)$ کانولوشن متناوب را نشان می دهد. کانولوشن متناوب را مجدداً به صورت زیر می توان بازنویسی کرد:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{\circ}^{2\pi}G\left(e^{j\theta}\right)Q\left(e^{j(\omega-\theta)}d\theta\right)$$

,

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$Q\left(e^{j\omega}\right)=2\pi\sum_{k=\circ}^{3}\delta\left(\omega-\frac{\pi k}{2}\right) \quad ,$$

$$for \quad \circ\le\omega<2\pi$$

(الف) با گرفتن تبدیل فوریه معکوس $G\left(e^{j\omega}\right)$، (جدول ۵,۲ را مشاهده کنید.) بدست می آوریم

$$q[n]=1+\tfrac{1}{2}e^{j\left(\pi/2\right)n}+\frac{1}{4}e^{j\pi n}+\frac{1}{8}e^{j\left(3\pi/2\right)n}$$

این سیگنال با تناوب پایه ی $N=4$ متناوب است.

(ج) به راحتی می توانیم نشان دهیم که $x\left(e^{j\omega}\right)$ یک عبارت موهومی است بنابراین $x[n]$ حقیقی نیست.

۵,۱۷) سیگنال $x[n]=(-1)^n$ دارای تناوب پایه ۲ و ضرائب سری فوریه a_k است. با استفاده از خاصیت همزادی ضرائب سی فوریه b_k سیگنال $g[n]=a_n$ با دوره تناوب پایه ۲، را تعیین کنید.

حل:

با استفاده از خاصیت دوگان داریم:

$$(-1)^n \xleftrightarrow{FS} a_k \Rightarrow a_k \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{N}(-1)^{-k} = \tfrac{1}{2}(-1)^k$$

۵,۱۸) می أانیم که

$$a^{|n|} \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega + a^2} \;,\; |a| < 1$$

با استفاده از همزادی ضرائب سری فوریه سیگنال پیوسته در زمان با تناوب $T=1$ زیر را بیابید:

$$x(t) = \frac{1}{5-4\cos(2\pi t)}$$

حل:

با دانستن اینکه:

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{|n|} \xleftrightarrow{FT} \frac{1-\frac{1}{4}}{1-\cos+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5-4\cos\omega}$$

می توان از معادله آنالیز تبدیل فوریه برای نوشتن مطلب زیر استفاده کرد:

$$\frac{3}{5-4\cos\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|n|} e^{-j\omega n}$$

با جایگذاری $\omega = -2\pi$ در این معادله و جایگذاری متغیر n به جای متغیر k داریم:

$$\frac{1}{5-4\cos 2\pi t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{|k|} e^{j2\pi kt}$$

با مقایسه با معادله عکس سری تبدیل فوریه، به سرعت می توان گفت که $a_k = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{|k|}$ ضرایب سری فوریه سیگنال $\frac{1}{5-4\cos 2\pi t}$ می باشد.

۵,۱۹) سیستم LTI علی و پایدار S با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ توسط معادله تفاضلی مرتبه دوم زیر به هم مربوط می شوند.

$$y[n] - \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = x[n]$$

(الف) پاسخ فرکانسی $H\left(e^{j\omega}\right)$ سیستم S دارای خاصیت زیرست.

(ب) پاسخ ضربه $h[n]$ سیستم S رل بیلبیذو

حل:

$$\left(\frac{5^{n}}{4}\right)[n] \to n\left(\frac{4}{5}\right)^{n} u[n]$$

(الف) با گرفتن عکس تبدیل فوریه از طرفین معادله دیفرانسیل، داریم:

$$Y\left(ge^{j\omega}\right)\left[1-\frac{1}{6}e^{-j\omega}-\frac{1}{6}e^{-2j\omega}\right]=x\left(e^{+j\omega}\right)$$

بنابراین

$$H\left({}^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{6}e^{-j\omega}-\frac{1}{6}e^{-2j\omega}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}$$

(ب) با استفاده از بسط به کسرهای جزئی داریم:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{3/5}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{2/5}{1+\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

با استفاده از جدول ٥,٢ و گرفتن تبدیل فوریه معکوس، داریم:

$$h[n]=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]$$

٥,٢٠) سیستم LTI علی و پایدار S دارای خاصیت زیرست

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{n}u[n]\to n\left(\frac{4}{5}\right)^{n}u[n]$$

(الف) پاسخ فرکانسی $H\left(e^{j\omega}\right)$ سیستم S را بیابید.

(ب) معادله تفاضلی ارتباط دنده ورودی $x[n]$ به خروجی $y[n]$ را بیابید.

حل:

(الف) چون سیستم LTI مورد نظر پایدار و کازال است، سیگنال جفت ورودی ـ خروجی کافیست تا پاسخ فرکانسی سیستم را تعیین کنند. دراین مورد، ورودی برابر است با $x[n]=\left(\frac{4}{5}\right)^n u[n]$ و خروجی برابر است با $y[n]=\left(4/5\right)^n n\,u[n]$، پاسخ فرکانسی به صورت زیر است:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}$$

که $X\left(e^{j\omega}\right)$ و $Y\left(e^{j\omega}\right)$، پاسخ فرکانسی به صورت زیر است:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}$$

که $X\left(e^{j\omega}\right)$ و $Y\left(e^{j\omega}\right)$ به ترتیب تبدیلات فوریه $x[n]$ و $y[n]$ هستند. با استفاده از جدول ٥,٢ داریم:

$$x[n]=\left(\frac{4}{5}\right)^n u[n]\xleftrightarrow{FT}x\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}}$$

با استفاده از خاصیت مشتقگیری در حوزه فرکانس، (جدول ٥,١، خاصیت ٥,٣٨) داریم:

$$y[n]=n\left(\frac{4}{5}\right)^n u[n]\xleftrightarrow{FT}Y\left(e^{j\omega}\right)=j\frac{dx\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}=\frac{\frac{4}{5}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}\right)^2}$$

بنابراین:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\left(4/5\right)e^{-j\omega}}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}}$$

(ب) چون $H\left(e^{j\omega}\right)=y\left(e^{j\omega}\right)/x\left(e^{j\omega}\right)$، می توانیم بنویسیم:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)\left[1-\tfrac{4}{5}e^{-j\omega}\right]=x\left(e^{j\omega}\right)\left[\tfrac{4}{5}e^{-j\omega}\right]$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه از طرفین معادله:

$$y[n]-\frac{4}{5}y[n-1]=\frac{4}{5}x[n]$$

۵,۲۱) تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را بیابید.

(الف) $x[n]=u[n-2]-u[n-6]$

(ب) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}u[-n-1]$

(ج) $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}u[-n-2]$

(و) $x[n]=\begin{cases} n \quad , & -3\le n\le 3 \\ \circ \quad , & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

(هـ) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)(n-1)$

(ز) $x[n]=\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)+\cos(n)$

(ح) $x[n]=\sin\left(\frac{5\pi}{3}n\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{3}n\right)$

(ط) $x[n]=x[n-6]$ و در $\circ\le n\le 5$، $x[n]=u[n]-u[n-5]$

(ی) $x[n]=(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$

(ک) $x[n]=\left(\frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{2}n\right)$

حل:

(الف) سیگنال داده شده برابر است با:

$$x[n]=u[n-2]-u[n-6]=\delta[n-2]+\delta[n-3]+\delta[n-4]+\delta[n-5]$$

با استفاده از معادله آنالیز تبدیل فوریه (۵,۹) داریم:

$$x\left(e^{j\omega}\right) = e^{-2j\omega} + e^{-3j\omega} + e^{-4j\omega} + e^{-5j\omega}$$

(ب) با استفاده از معادله آنالیز تبدیل فوریه (۵,۹):

$$x\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} e^{j\omega}\right)^{n} = \frac{e^{j\omega}}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2} e^{j\omega}}$$

(ج) با استفاده از معادله آنالیز تبدیل فوریه (۵,۹):

$$x\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{-2} \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3} e^{j\omega}\right)^{n} = \frac{e^{2j\omega}}{9} \frac{1}{1-\frac{1}{3} e^{j\omega}}$$

(د) با استفاده از معادله آنالیز تبدیل فوریه (۵,۹) داریم:

$$x\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\circ} 2^{n} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) e^{-j\omega n}$$

$$= -\sum_{n=\circ}^{\infty} 2^{-n} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) e^{j\omega n}$$

$$= \frac{-1}{2j} \sum \left(\frac{1}{2} e^{jn\pi/4} e^{j\omega n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{r} e^{-\pi n/4} e^{j\omega n} \right)$$

$$= \frac{-1}{2j} \left[\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right) e^{j\pi/4} e^{j\omega}} - \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right) e^{-j\pi/4} e^{j\omega}} \right]$$

(هـ) با استفاده از آنالیز تبدیل فوریه معادله (۵,۹) داریم:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{|n|}\cos\left[\left(\tfrac{\pi(n-1)}{8}\right)\right]e^{-j\omega n}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-j\pi/8}}{1-\frac{1}{2}e^{j\pi/8}e^{-j\omega}}+\frac{e^{j\pi/8}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/8}e^{-j\omega}}\right]$$

$$+\frac{1}{4}\left[\frac{e^{j\pi/4}e^{j\omega}}{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)e^{j\pi/8}e^{j\omega}}+\frac{e^{-\pi/4}e^{j\omega}}{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)e^{-j\pi/8}e^{j\omega}}\right]$$

(و) سیگنال داده شده برابر است با:

$$x[n]=-3\delta[n+3]-2\delta[n+2]-\delta[n+1]+2\delta[n-2]+3\delta[n-3]$$

با استفاده از آنالیز تبدیل فوریه معادله (٥,٩) بدست می آوریم:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=-3e^{3j\omega}-2e^{2j\omega}-e^{j\omega}+e^{-j\omega}+2e^{-2j\omega}+3e^{-3j\omega}$$

(ذ) سیگنال داده شده برابر است با:

$$x[n]=\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\cos n=\frac{1}{2j}\left(e^{j\pi n/2}-e^{-j\pi n/2}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{jn}+e^{-jn}\right)$$

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\pi}{1}\left[\delta\left(\omega-\tfrac{\pi}{2}\right)-\delta\left(\omega+\tfrac{\pi}{2}\right)\right]+\pi\left(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\right)\,for\ \ 0\le|\omega|<\pi$$

(خ) سیگنال داده شده، برابر است با:

$$x[n]=\sin\left(5\pi n/3\right)+\cos\left(7\pi n/3\right)$$

$$=-\sin\left(\pi n/3\right)+\cos\left(\pi n/3\right)$$

$$=-\frac{1}{2j}\left[e^{j\pi n/3}-e^{-jn\pi/3}\right]+\tfrac{1}{2}\left[e^{j\pi n/3}+e^{-j\pi n/3}\right]$$

$$x\left(e^{j\omega}\right)=-\frac{\pi}{j}\left(\delta\left(\omega-\tfrac{\pi}{3}\right)-\delta\left(\omega+\tfrac{\pi}{3}\right)\right)+\pi\left(\delta\left(\omega-\tfrac{\pi}{3}\right)+\delta\left(\omega+\tfrac{\pi}{3}\right)\right)m0\le|\omega|<\pi$$

(ط) $x[n]$ سیگنالی پریودیک با دوره متناوب $N=6$ می باشد. ضرایب سری فوریه $x[n]$ به صورت زیر است:

$$a_k = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n] e^{-j(2\pi/6)n}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{4} 2\pi\left(\frac{1}{6}\right)\left[\frac{1-e^{-j\pi 5k/}}{1-e^{-j(2\pi/6)k}}\right]\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{6} - 2\pi\ell\right)$$

(ی) با استفاده از معادله آنالیز تبدیل فوریه (۵،۹) داریم:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} \xleftrightarrow{FT} \frac{4}{5-3\cos\omega}$$

با استفاده از خاصیت دیفرانسیل گیری از حوزه فرکانس بدست می آوریم:

$$n\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} \xleftrightarrow{FT} -j\frac{12\sin\omega}{(5-3\cos\omega)}$$

بنابراین:

$$x[n] = n\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} - \left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} \xleftrightarrow{FT} \frac{4}{5-3\cos\omega} - j\frac{12\sin\omega}{(5-3\cos\omega)^2}$$

(ک) داریم:

$$x_1[n] = \frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n} \xleftrightarrow{FT} x_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \pi/5 \\ 0 & \frac{\pi}{5} \le |\omega| < \pi \end{cases}$$

و نیز:

$$x_2[n] = \cos\left(\frac{7\pi n}{2}\right) = \cos(\pi n/2) \xleftrightarrow{FT} x_2(e^{j\omega}) = \pi\left(\delta(\omega - \pi/2) + \delta(\omega + \pi/2)\right)$$

در بازه $n < |\omega| \le 0$. بنابراین اگر $x[n] = x_1[n]x_2[n]$ باشد، در اینصورت:

کانولوشن متناوب $x_1(e^{j\omega})$, $x(e^{j\omega}) = x_2(e^{j\omega})$

با استفاده از مکانیزم تعیین کانولوشن پریودیک در مثال ۵،۱۵، در بازه $0 \le |\omega \le \pi|$ بدست می آوریم:

$$x(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \frac{3\pi}{10} < |\omega| < \frac{7\pi}{10} \\ 0 & other \end{cases}$$

....

۵,۲۲) عبارتهای زیر تبدیل فوریه سیگنالهای گسسته در زمان هستند. سیگنال متناظر با هر کـدام را بیابید.

(الف) $X\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1, & \frac{\pi}{4}\le|\omega|\le\frac{3\pi}{4}\\ \circ, & \frac{3\pi}{4}\le|\omega|\le\pi\ ,\ \circ\le|\omega|<\frac{\pi}{4}\end{cases}$

(ب) $X\left(e^{j\omega}=1+3e^{-j\omega}+2e^{-2j\omega}-4e^{-3j\omega}+e^{-10j\omega}\right)$

(ج) $X\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\omega/2}$ در $-\pi\le\omega\le\pi$

(د) $X\left(e^{j\omega}\right)=\cos^2\omega+\sin^2 3\omega$

(هـ) $X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta\left(\omega-\frac{\pi}{4}k\right)$

(و) $X\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}^{-2j\omega}}$

(ز) $X\left(e^{j\omega}=\dfrac{e^{-j\omega}-\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}}\right)$

(ط) $X\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6 e^{-6\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$

حل:

(الف) با استفاده از عکس تبدیل فوریه (۵,۸) داریم:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-3\pi/4}^{-\pi/4}e^{j\omega n}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}e^{j\omega n}d\omega$$
$$=\frac{1}{\pi n}\left(\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)-\sin\left(\pi n/4\right)\right)$$

(ب) با مقایسه تبدیل فوریه داده شده با معادله آنالیز (۵,۸) داریم:

$$x[n]=\delta[n]+3\delta[n-1]+2\delta[n-2]-4\delta[n-3]+\delta[n-10]$$

(ج) با استفاده از معادله عکس تبدیل فوریه (۵،۸) داریم:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\omega/2}e^{j\omega n}d\omega$$
$$=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

(د) تبدیل فوریه داده شده، برابر است با:

$$x(e^{j\omega})=\cos^2\omega+\sin^2(2\omega)$$
$$=\frac{1+\cos(2\omega)}{2}+\frac{1-\cos(3\omega)}{2}$$
$$=1+\frac{1}{4}e^{2j\omega}+\frac{1}{4}e^{-2j\omega}-\frac{1}{4}e^{3j\omega}-\frac{1}{4}e^{3j\omega}$$

با مقایسه تبدیل فوریه با آنالیز معادله (۵،۸) داریم:

$$x[n]=\delta[n]+\frac{1}{4}\delta[n-2]+\frac{1}{4}\delta[n+2]-\frac{1}{4}\delta[n-3]-\frac{1}{4}\delta[n-3]$$

(هـ) آنچه داده شده است تبدیل فوریه یک سیگنال پریودیک با فرکانس پایه $\frac{\pi}{2}$ می باشد.

بنابراین پریود پایه آن ٤ می باشد. و نیز، ضریب سری فوریه این سیگنال $a_k=(-1)^k$ می باشد.
بنابراین سیگنال به صورت زیر است:

$$x[n]=\sum_{k=\circ}^{3}(-1)^k e^{jk\left(\pi/2\right)n}=1-e^{+jn\pi/2}-e^{j3\pi n/2}$$

(و) تبدیل فوریه را به صورت زیر می توان نوشت:

$$x(e^{j\omega})=e^{-j\omega}\sum_{n=c}^{\infty}\left(1/5\right)^n e^{-j\omega n}-\left(1/5\right)\sum_{n=c}^{\infty}\left(1/15\right)^n e^{-j\omega n}$$
$$=5\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/5\right)^n e^{-\omega n}-1/5\sum_{n=c}^{\infty}\left(1/5\right)^n e^{-j\omega n}$$

با مقایسه هر دو جمله ی در طرف راست معادله فوق با معادله آنالیز تبدیل فوریه (۵،۹) داریم:

$$x[n]=\left(1\!\!\diagup\!_5\right)^{n-1}u[n-1]-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}u[n]$$

(ذ) تبدیل فوریه داده شده را به شکل زیر می توان نوشت:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\frac{2/9}{1-1\!\!\diagup\!_2\,e^{-j\omega}}+\frac{7/9}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

بنابراین:

$$x[n]=\frac{2}{9}\left(1\!\!\diagup\!_2\right)^{n}u[n]+7\!\!\diagup\!_9\left(-1\!\!\diagup\!_4\right)^{n}u[n]$$

(ج) تبدیل فوریه داده دشه را به صورت زیر می توان نوشت:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=1+1\!\!\diagup\!_3\,e^{-j\omega}+1\!\!\diagup\!_3=e^{-2j\omega}+1\!\!\diagup\!_{3^3}\,e^{-j3\omega}+1\!\!\diagup\!_{3^4}\,e^{-j4\omega}+\frac{1}{3^5}e^{-j5\omega}$$

با مقایسه تبدیل فوریه با آنالیز معادله (۵,۸) داریم:

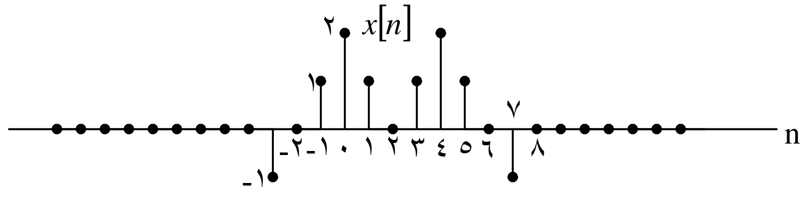
$$x[n]=\delta[n]+1\!\!\diagup\!_3\,\delta[n-1]+1\!\!\diagup\!_9\,\delta[n-2]+\frac{1}{27}\delta[n-3]$$
$$+\frac{1}{81}\delta[n-4]+\frac{1}{243}\delta[n-5]$$

۵,۲۳) $x\left(E^{J\omega}\right)$ تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ شکل م ۵-۲۳ است. محاسبات زیر را بـدون محاسـبه صریح $X\left(e^{j\omega}\right)$ انجام دهید:

(الف) $X\left(e^{j0}\right)$

(ب) $\int_{-\pi}^{\pi}\lhd X\left(e^{j\omega}\right)$

(ج) $X\left(e^{j\omega}\right)d\omega$



شکل م ۵-۲۳

(د) $X\left(e^{j\pi}\right)$

(هـ) سیگنالی با تبدیل فوریه $\Re e\{X(\omega)\}$ بیابید و آن را رسم کنید.

(و) (i) $\int_{-\pi}^{\pi}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$ (ii) $\int_{-\pi}^{\pi}\left|s\,X\left(e^{j\omega}\right)/\,d\omega\right|^2 d\omega$

حل:

(الف) از معادله (۵,۹) داریم:

$$x\left(e^{j\circ}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]=6$$

(ب) توجه کنید که $y[n]=x[n+2]$ یک سیگنال زوج است. بنابراین $Y\left(e^{j\omega}\right)$ سیگنالی حقیقی و زوج خواهد بود. این بیان می کند که $Y\left(e_{j\omega}\right)=\circ$ ⊲. بعلاوه از خاصیت شیفت تبدیل فوریه داریم: $Y(ej\omega)=e^{j2\omega}x\left(e^{j\omega}\right)$ بنابراین $c\left(e^{j\omega}\right)=e^{-2j\omega}$ ⊲

(ج) از معادله (۵,۸) داریم:

$$2\pi\times[\circ]=\int_{-\pi}^{\pi}x\left(e^{j\omega}\right)d\omega$$

بنابراین

$$\int_{-\pi}^{\pi}x\left(e^{j\omega}\right)d\omega=4\pi$$

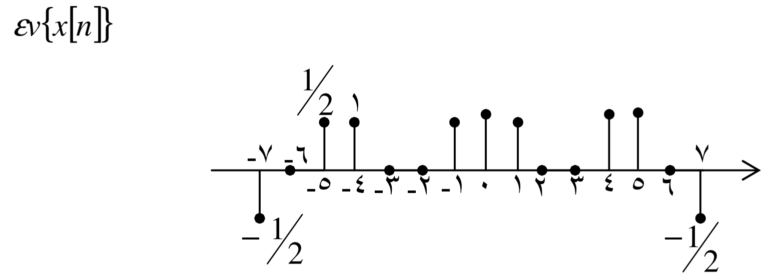
(د) از (۵,۹) داریم:

$$x\left(e^{j\pi}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n](-1)^n=2$$

(هـ) از جدول ۵,۱ داریم:

$$\varepsilon\{x[n]\}\xleftrightarrow{FT}\mathrm{Re}\left\{x\left(e^{j\omega}\right)\right\}$$

بنابراین: سیگنال مطلوب برابر است با $\varepsilon v\{x[n]\}=\{x[n]+x[-n]\}/_{\circ<}$ کـه در شـکل ح۵,۲۳. نشان داده شده است.



شکل ح۵,۲۳

(د) (i) از قضیه پارسئوال داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|x\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = 28\pi$$

(ii) با استفاده از خاصیت شیفت در حوزه فرکانس تبدیل فوریه داریم:

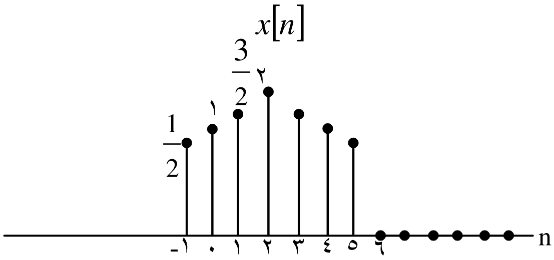
$$nx[n] \xleftrightarrow{FT} j\frac{dx\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}$$

دوباره با استفاده از قضیه پارسئوال داریم:

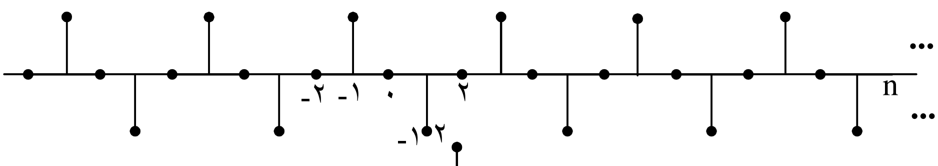
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{dx\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}\right|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2 x[n]^2 = 316\pi$$

٥,٢٤) تعیین کنید که تبدیل فوریه هر یک از سیگنالهای داده شده کدام یک از خاصیتهای زیر را دارند:

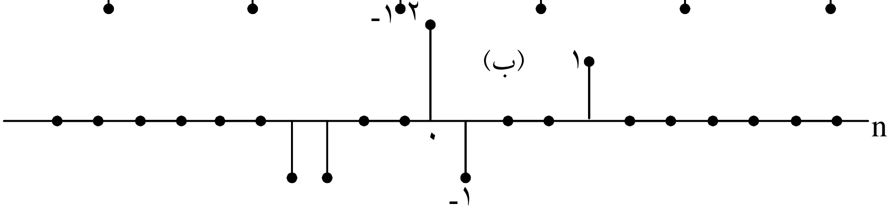
۱. $\Re e\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\} = ٠$ ۲. $g_m\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\} = ٠$



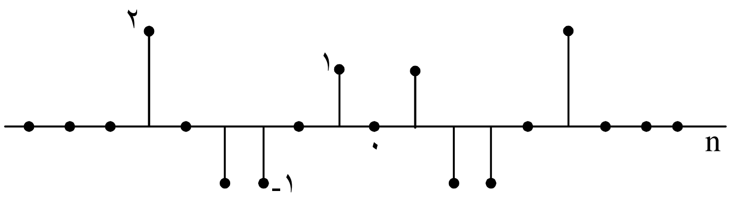
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

۳. عدد حقیقی a وجود دارد که به ازای آن $e^{ja\omega}X\left(e^{j\omega}\right)$ حقیقی است.

٤. $\int_{-\pi}^{\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| d\omega = 0$

٥. $X\left(e^{j\omega}\right)$ حقیقی است.

٦. $X\left(e^{j0}\right) = 0$

(الف) $x[n]$ شکل م ٥-٢٤ (الف)

(ب) $x[n]$ شکل م ٥-٢٤ (ب)

(ج) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

(د) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

(هـ) $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+2]$

(و) $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+3]$

(ط) $x[n]=\delta[n-1]-\delta[n+1]$

(ح) $x[n]$ شکل م ٥-٢٤ (د)

حل:

(١) برای اینکه $\mathrm{Re}\{x(e^{j\omega})\}=0$ باشد، سیگنال بایستی حقیقی و فرد باشد. تنها سیگنالهای (ب) و (ج) حقیقی و فرد هستند.

(٢) برای اینکه $\mathrm{Im}(e^{j\omega})=0$ باشد، سیگنال بایستی حقیقی و زوج باشد، تنها سیگنالهای (ت) و (چ) حقیقی و زوج هستند.

(٣) فرض کنید $Y(e^{j\omega})=e^{ja\omega}\{x(e^{j\omega})\}$، با استفاده از خاصیت شیفت زمانی تبدیل فوریه داریم: $y[n]=x[n+a]$.

اگر $Y(e^{j\omega})$ حقیقی باشد: در اینصورت $y[n]$ حقیقی و زوج خواهد بود. (فرض کنید که $x[n]$ حقیقی است.).

بنابراین $x[n]$ بایستی برحسب α باشد. که این فقط در مورد سیگنالهای (الف) و (ب) و (ت) و ث) و (ح) و (خ) صدق می کند.

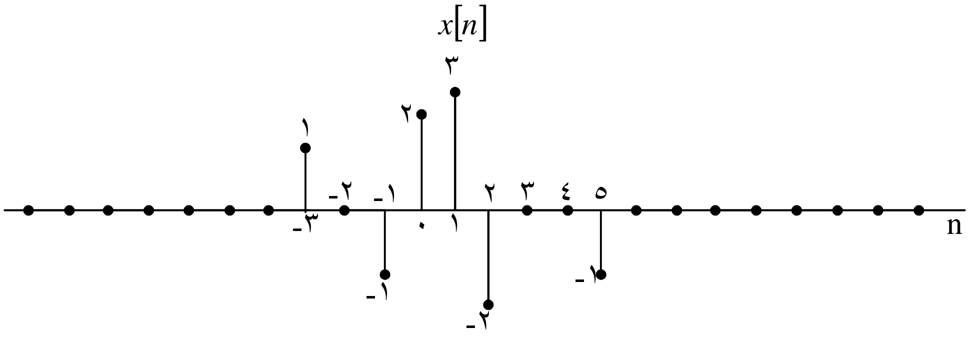
(٤) چون $\int_{-\pi}^{\pi}x(e^{j\omega})d\omega=2\pi x[0]$ است، شرط داده شده تنها در حالتی برقرار می شود که $x[0]=0$. یعنی این در مورد سیگنالهای (ب) و (ت) و (ث) و (خ) و (ج) صدق می کند.

(٥) $x(e^{j\omega})$ با پریود 2π همواره پریود یک است. بنابراین تمام سیگنالهای این شرط را برآورده می کنند.

(٦) چون $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]=x(e^{0j})$ ، شرایط داده شده تنها اگر نمونه های سیگنالهای فرد برابر صفر باشند، برآورده می شود.

این در مورد سیگنالهای (ب) و (ح) و (چ) صحیح است.

٥,٢٥) سیگنال شکل م ٥-٢٥ را در نظر بگیرید. تبدیل فوریه این سیگنال را به شکل دکارتی یر می نویسیم



شکل م ۵-۲۵

$$X\left(e^{j\omega}\right)=A(\omega)+jB(\omega)$$

تابع زمانی متناظر با تبدیل فوریه یر را پیدا کنید.

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\left[B(\omega)+A(\omega)e^{j\omega}\right]$$

حل:

اگر تبدیل فوریه $x\left(e^{j\omega}\right)$ باشد در اینصورت:

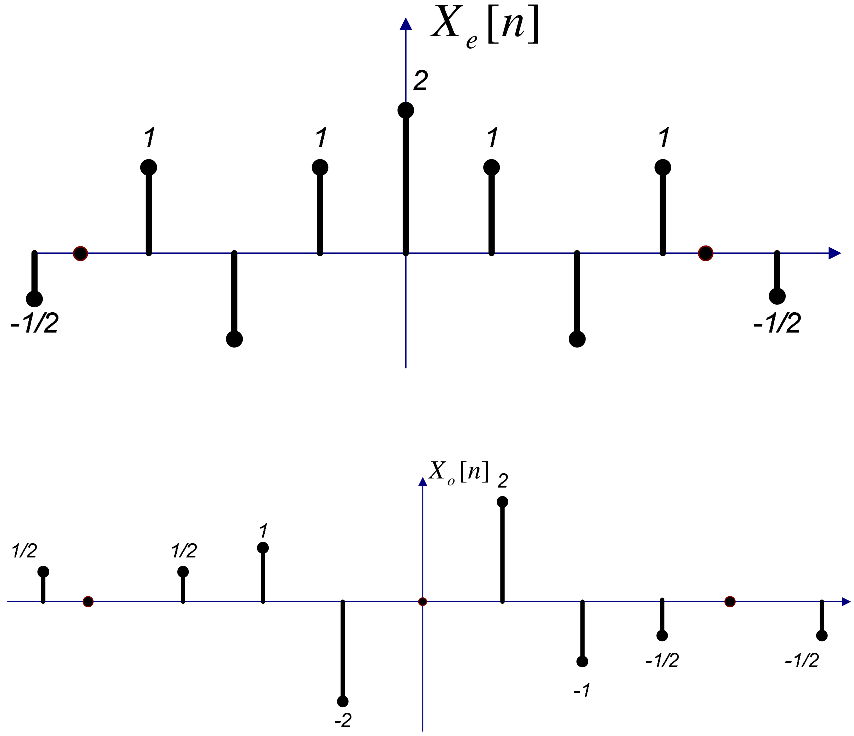
$$x_e[n]=\mathcal{E}v\{x[n]\}=\frac{x[n]+x(-n)}{2}\xleftrightarrow{FT}A(\omega)$$

,

$$x_\circ[n]=Od\{x[n]\}=\frac{x[n]-x[-n]}{2}\xleftrightarrow{FT}jB(\omega)$$

بنابراین، تبدیل فوریه $B(\omega)$ برابر است با $-jx_\circ[n]$. همچنین تبدیل فوریه معکوس $e^{j\omega}A(\omega)$ برابر است با $x_e[n+1]$. بنابراین، تابع زمانی متناظر فوریه معکوس $B(\omega)+A(\omega)e^{j\omega}$ با $x_e[n+1]-jx_\circ[n]$ خواهد بود.

که در شکل ح۲۵-۵ نمایش داده شده است.



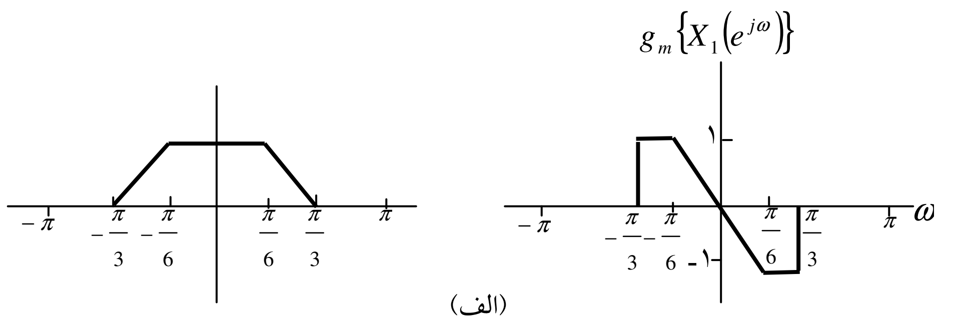
شکل ح۵–۲۵

سیگنال مطلوب $= x_e[n+1] - jx_o[n]$

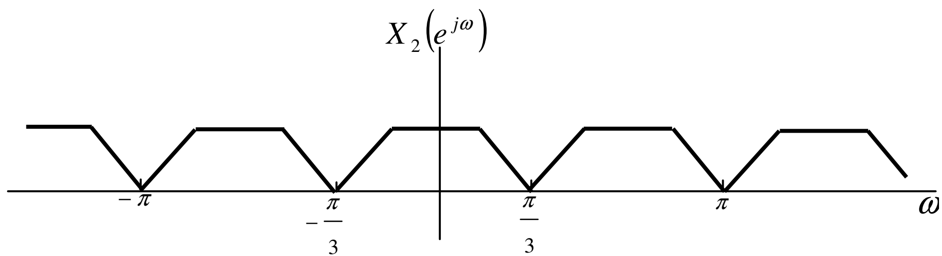
۵,۲۶) فرض کنید $x_1[n]$ سیگنالی با تبدیل فوریه $X_1(e^{j\omega})$ شکل م ۵–۲۶ (الف) است.

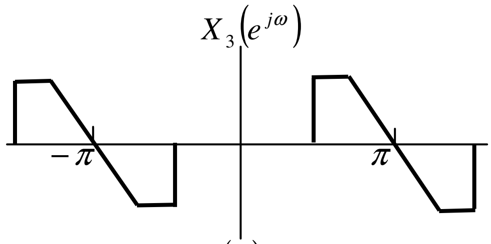
(الف) سیگنال $x_2[n]$ با تبدیل فوریه $X_2(e^{j\omega})$ شکل م ۵–۲۶ (ب) را در نظر بگیرید. $x_2[n]$ را بر حسب $x_1[n]$ بیان کنید. [راهنمایی: ابتدا $X_2(e^{j\omega})$ را برحسب $X_1(e^{j\omega})$ بنویسید و سپس خواص تبدیل فوریه را به کار برید.]

(ب) بند (الف) را برای $x_3[n]$ دارای تبدیل فوریه $X_3(e^{j\omega})$ شکل م ۵–۲۶ (ج) تکرار کنید.



(الف)





(ج)

شکل م ٥-٢٦

(ج) کمیت زیر را که مرکز گرانش سیگنال $x_1[n]$ است.

$$a = \frac{n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, x_1[n]}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]}$$

معمولاً زمان تأخیر سیگنال $x_1[n]$ می نامند. a را بیابید. (برای انجام این کار لازم نیست $x_1[n]$ را

$$h[n] = \frac{\sin \pi / 6}{\pi\, n}$$

$X_4\left(e^{j\omega}\right)$ را رسم کنید.

حل:

(الف) می توان $x\left(e^{j\omega}\right)$ را به صورت زیر بیان کرد:

$$x_2\left(e^{j\omega}\right)=\operatorname{Re}\left\{x_1\left(e^{j\omega}\right)\right\}+\operatorname{Re}\left\{x_1 e^{j(\omega-2\pi/3)}\right\}$$
$$+\operatorname{Re}\left\{x_1\left(e^{j(\omega+2\pi/3)}\right)\right\}$$

بنابراین:

$$x_2[n]=\mathcal{E}v\left\{1+e^{j2\pi/3}+e^{-j2\pi/3}\right\}$$

(ب) $x_3\left(e^{j\omega}\right)$ را به صورت زیر می توانیم بیان کنیم:

$$x_3\left(e^{j\omega}\right)=\operatorname{Im}\left\{x_1\left(e^{j(\omega-n)}\right)\right\}+\operatorname{Im}\left\{x_1\left(e^{j(\pi+\omega)}\right)\right\}$$

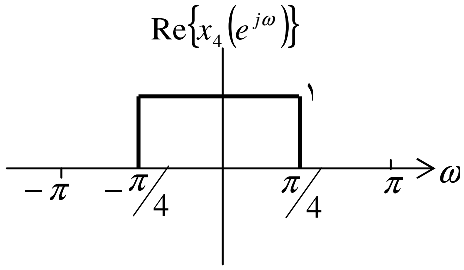
بنابراین:

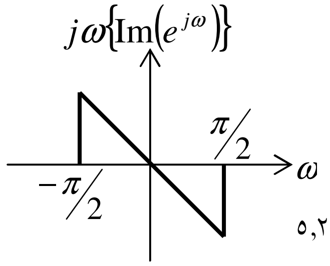
$$x_3[n]=od\{x_1[n]\}\left[e^{j\pi n}+e^{-j\pi n}\right]$$
$$=2(-1)^n od\{x_1[n]\}$$

(ج) $\propto$ را به صورت زیر می توانیم بیان کنیم:

$$\alpha=\frac{j\dfrac{dx_1\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}}{x_1\left(e^{j\omega}\right)\Big|}=\frac{j\left(-6j/\pi\right)}{1}=6/\pi$$

د) با استفاده از این حقیقت که $H\left(e^{j\omega}\right)$ پاسخ فرکانسی یک فیلتر پائین گذر با ایده آل با فرکـانس قطع π_{16}، می توان $x_4\left(e^{j\omega}\right)$ را مانند شکل ح٥,٢٦ رسم کرد:





شکل ح٥,٢٦

۵,۲۷) (الف) $x[n]$ یک رشته گسسته در زمان با تبدیل فوریه $X\left(e^{j\omega}\right)$ شکل م ۵–۲۷ است. به ازای هر یک از سیگنالهای $p[n]$ زیر تبدیل فوریه $w[n]=x[n]p[n]$ را رسم کنید:

$p[n]=\cos \pi n$ (i)

$p[n]=\cos(\pi n/2)$ (ii)

$p[n]=\sin(\pi n/2)$ (iii)

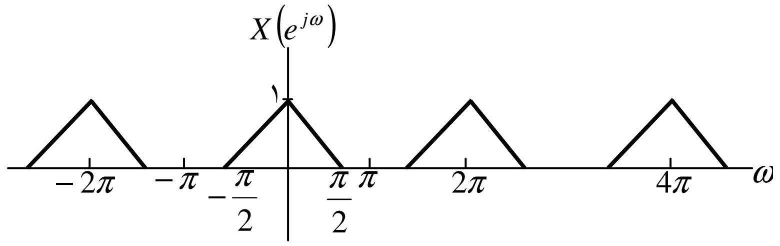
$p[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-2k]$ (iv)

$p[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]$ (v)

(ب) فرض کنید سیگنال $w[n]$ بند (الف) ورودی یک سیستم LTI، با پاسخ ضربه زیرست

$$h[n]=\frac{\sin \pi n/2}{\pi n}$$

خروجی $y[n]$ را به ازای هر یک از $p[n]$ های بند (الف) تعیین کنید.



شکل م ۲۷–۵

حل:

(الف) $w\left(e^{j\omega}\right)$ کانولوشن پریودیک $x\left(e^{j\omega}\right)$ و $p\left(e^{j\omega}\right)$ خواهد شد. تبدیلات فوریه در شکل ح۵,۲۷ نشان داده شده اند.

(ب) تبدیل فوریه $y[n]$ که برابر $Y\left(e^{j\omega}\right)$ می باشد برابر است با $Y\left(e^{j\omega}\right)=p\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$

سیتم LTI، پاسخ نمونه ی $h[n]$ یک فیلتر پائین گذر ایده آل با فرکانس قطع $\pi/2$ می باشد، بنابراین

$Y(e^{j\omega})$ برای هر انتخاب $P[n]$ در شکل ح۲۷,٥ نشان داده شده، در نتیجه $y[n]$ برای هرمورد برا بر است:

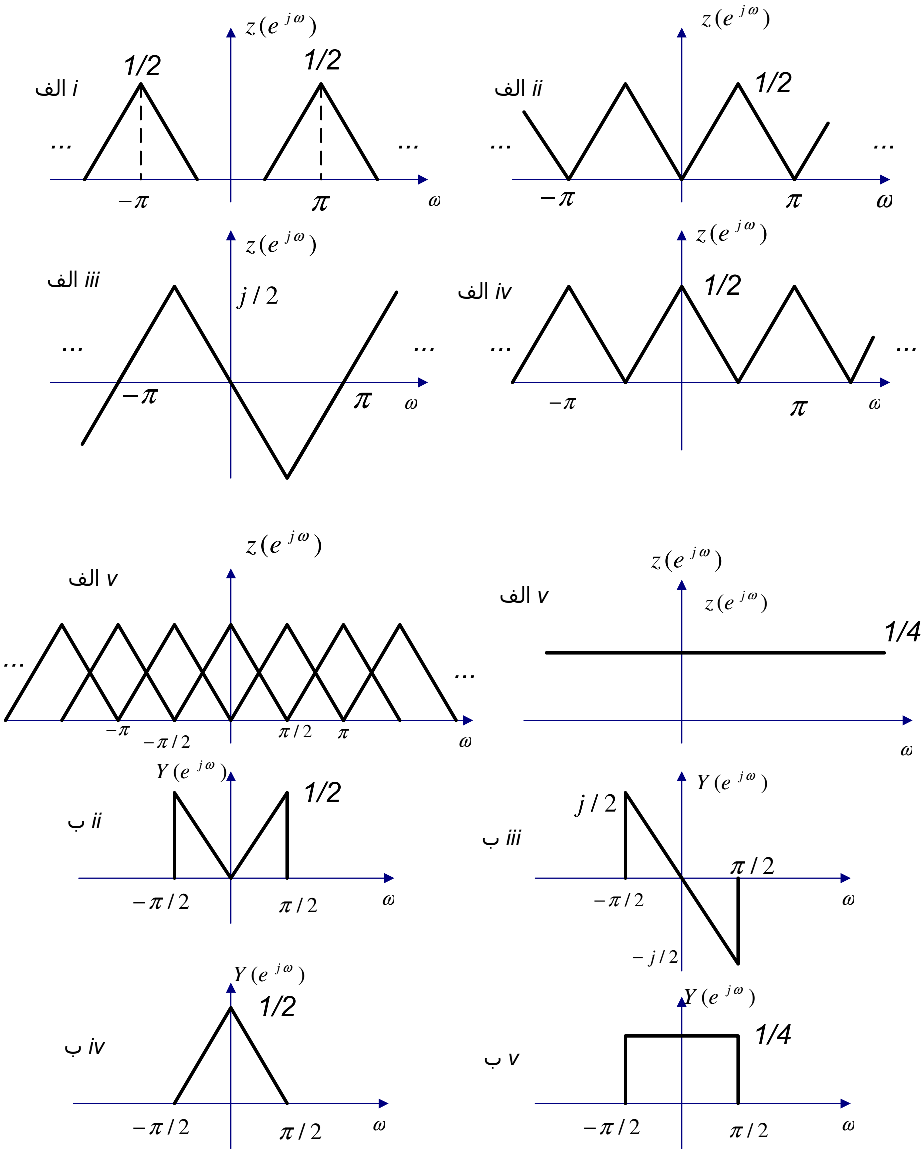
(i) $y[n]=c$

(ii) $y[n]=\dfrac{\sin\left(n\pi/2\right)}{2\pi n}-\dfrac{1-Cos\left(n\pi/2\right)}{\pi^2 n^2}$

(iii) $y[n]=\dfrac{\sin\left(n\pi/2\right)}{\pi^2 n^2}-\dfrac{1-Cos\left(n\pi/2\right)}{\pi^2 n^2}$

(iv) $y[n]=2\left[\dfrac{\sin\left(n\pi/4\right)}{\pi n}\right]^2$

(v) $y[n]=2\left[\dfrac{\sin\left(n\pi/2\right)}{\pi n}\right]^2$



الف i
الف ii
الف iii
الف iv
الف v
ب ii
ب iii
ب iv
ب v
$z(e^{j\omega})$
$Y(e^{j\omega})$
1/2
1/4
$j/2$
$-j/2$
$-\pi$
π
$-\pi/2$
$\pi/2$
ω
…

شكل ح٥,٢٧

....

۵,۲۸)" سیگنالهای $x[n]$ و $g[n]$ با تبدیل فوریه های $X\left(e^{j\omega}\right)$ و $G\left(e^{j\omega}\right)$ داده شده است. همچنین رابطه $X\left(e^{j\omega}\right)$ و $G\left(e^{j\omega}\right)$ به صورت زیر است:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X\left(e^{j\theta}\right)G\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta = 1+e^{-j\omega} \qquad \text{(م ۵-۲۸-۱)}$$

(الف) به ازای $x[n]=(-1)^n$ سیگنال $g[n]$ را چنان تعیین کنید که تبدیل فوریه $G\left(e^{j\omega}\right)$ آن معادله (م ۵-۲۸-۱) را ارضا کند. آیا جوابهای دیگری هم برای $g[n]$ وجود دارد؟

(ب) بند (الف) را به ازای $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ تکرار کنید.

حل:

فرض کنید

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left(e^{if}\right)G\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$$
$$=1+e^{-j\omega}=Y\left(e^{j\omega}\right)$$

با اعمال عکس تبدلات فوریه داریم:

$$g[n]x[n]=\delta[n]+\delta[n-1]=y[n]$$

$$y[n]=\frac{-j}{2(1-j)}\left(\frac{j}{2}\right)^n u[n]+\frac{1}{2(1+j)}\left(\frac{-j}{2}\right)^n u[n]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

(ii) در این مورد:

$$y[n]=\frac{Cos\left(n\pi/2\right)}{3}\left[4-\left(1/2\right)^n\right]u[n]$$

(ج) در اینجا:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=-3e^{-2j\omega}-e^{j\omega}+1-2e^{-j2\omega}$$
$$+6e^{-j\omega}+2e^{-2j\omega}-2e^{-3j\omega}+4e^{-j5\omega}$$
$$+3e^{j5\omega}+e^{j4\omega}-e^{+j3\omega}+2e^{j\omega}$$

بنابراین:

$$y[n]=3\delta[n+5]+\delta[n+4]-\delta[n+3]-3\delta[n+2]+\delta[n+1]+\delta[n]+5\delta[n-1]$$
$$-2\delta[n-3]+4\delta[n-5]$$

....

۵٫۳۰) (الف) پاسخ فرکانسی به این سیتم در شکل ح۵٫۳۰ نشان داده شده است.

(ب) تبدیل فوریه $x(e^{j\omega})$ برای $x(t)$ در شکل ح۵٫۳۰ نشان داده شده است.

(i) پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ در شکل ح۵٫۳۰ نشان داده شده است، بنابراین $y[n]=Sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)$

(ii) پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ در شکل های ح۵٫۳۰ به نمایش درآمده است پس:

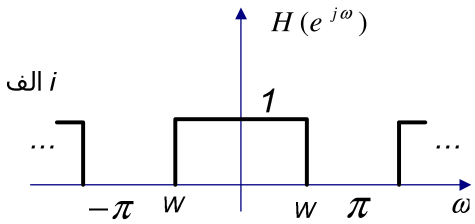
$$y[n]=2\ Sin\left(n\pi/8\right)-2Cos\left(n\pi/4\right)$$

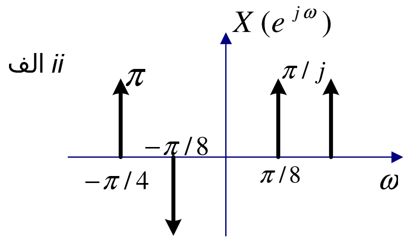
(iii) پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ در شکل ح۵٫۳۰ نمایش داده شده است پس:

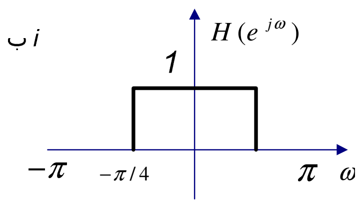
$$y[n]=1/6\ Sin\left(n\pi/8\right)-1/4\ Cos\left(n\pi/4\right)$$

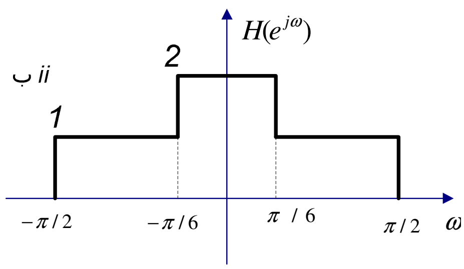
(iv) پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ در شکل ح۵٫۳۰ به نمایش درآمده است. بنابراین:

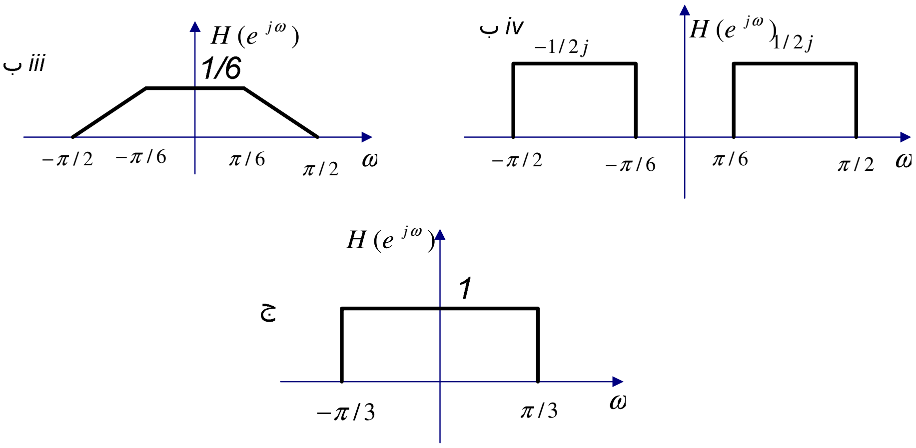
$$y[n]=-Sin\left(\pi n/4\right)$$





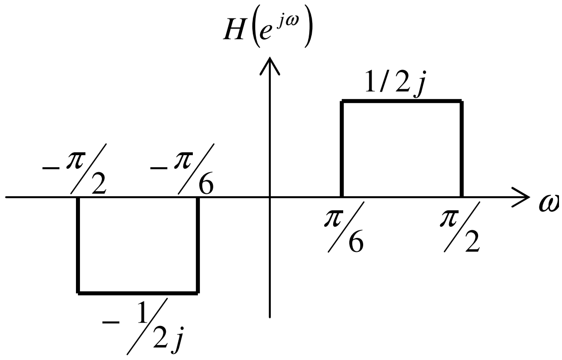






شکل (ح۵,۳۰)

(توجه کنید که در شکل (بiv) مقدار $-\frac{1}{2j}$ به این معناست که شکل در حالت اصلی بـه شـکلی که در زیر آمده است بوده اما با یک انعکاس به سمت بالای محـور x هـا یـک ضـریب (−) بـه خـود گرفته است.) یعنی :



(ج) پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ در شکل ح۵,۳۰ آمده است.

(i) سیگنال $x[n]$ با پریود ۸ متناوب است. ضرایب سری فوریه سیگنال عبارتست از:

$$a_k = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} x[n] e^{-j(2\pi/8)kn}$$

تبدیل فوریه سیگنال برابر است با:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - 2k\pi/8\right)$$

تبـدیل فوریـه $Y\left(e^{j\omega}\right)$ خروجـی عبارتـست از $Y\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$، بنـابراین؛ در بـازه $|\omega| \le \pi$

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = 2\pi\left[a_0\delta(w) + a_1\delta\left(w - \pi/4\right) + a_{-1}\delta\left(\omega + \pi/4\right)\right]$$

بنابراین:

$$y[n] = a_0 + a_1 e^{j\pi n/4} + a_{-1} e^{-j\pi/4}$$
$$= 5/8 + \left[\left(1/4\right) + \left(1/2\right)\left(1/\sqrt{2}\right)\right] Cos\left(n\pi/4\right)$$

(ii) سیگنال $x[n]$ با پریود ۸، متناوب است. ضرایب سری فوریه سیگنال برابرند با:

$$a_k = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} x[n] e^{-j(2\pi/8)kn}$$

تبدیل فوریه سیگنال برابر است با:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, a_k \delta(\omega - 2k\pi/8)$$

تبدیل فوریه $Y\left(e^{j\omega}\right)$ خروجی برابر می باشد با: $Y\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$، بنـابرین مطلـب؛ در بازه $0 \le |\omega| \le \pi$:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = 2\pi\left[a_0\delta(\omega) + a_1\delta\left(\omega - \pi/4\right) + a_{-1}\delta\left(\omega + \pi/4\right)\right]$$

بنابراین:

$$y[n] = a_0 + a_1 e^{j\pi n/4} + a_{-1} e^{-j\pi/4} = 1/8 + \frac{1}{4} Cos\left(n\pi/4\right).$$

(iii) در این مورد $x\left(e^{j\omega}\right)$ تبدیل فوریه $x(t)$ می باشد، بنابراین:

$$y[n] = a_0 + a_1 e^{j\pi n/4} + a_{-1} e^{-j\pi/4} = 1/8 + \left[\left(1/4\right) - \left(1/2\right)\left(1/\sqrt{2}\right)\right] Cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

(iv) در این مورد خروجی برابر است با:

$$y[n]=h[n]*x[n]=\frac{Sin\left(\pi/3(n-1)\right)}{\pi(n-1)}+\frac{Sin\left(\pi/3(n+1)\right)}{\pi(n+1)}$$

....

۵٫۳۱) یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ و پاسخ فرکانسی $H\left(e^{j\omega}\right)$ دارای این ویژگی است که

به ازای $-\pi \le \omega_\circ \le \pi$ $\quad \cos\omega_\circ n \rightarrow \omega_\circ \cos\omega_\circ n,$

الف) $H\left(e^{j\omega}\right)$ را بیابید.

ب) $h[n]$ را بیابید.

حل:

با استفاده از اطلاعات داده شده؛ واضح است که هنگامیکه ورودی سیستم یک نهایی مختلط با فرکانس $\omega_\circ$ باشد، خروجی نیز یک نهایی مختلط با همان فرکانس اما با اسکیل یافتن به اندازه $|\omega_\circ|$ خواهد بود.

$$H\left(e^{j\omega}\right)=|\omega| \qquad for \quad \circ\le|\omega\le\pi|$$

ب) با گرفتن تبدیل فوریه معکوس پاسخ فرکانسی داریم:

$$\begin{aligned}
h[n]&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H\left(e^{j\omega}\right)e^{+j\omega n}d\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\circ}-\omega e^{j\omega n}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\circ}^{\pi}\omega e^{j\omega n}d\omega\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}\omega Cos(\omega n)d\omega\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}\omega Cos(\omega n)d\omega\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{Cos(n\pi)-1}{n^2}\right]
\end{aligned}$$

....

۵٫۳۲) $h_1[n]$ و $h_2[n]$ را پاسخ ضربه هی دو سیستم LTI علی با پاسخ فرکانسی $X_1(e^{j\omega})$ و $X_2(e^{j\omega})$ فرض کنید. آیا معادله زیر در حالت کلی درست است یا نه؟ برای جواب خود دلیلی بیاورید.

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H_1(e^{j\omega})d\omega\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H_2(e^{j\omega})\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})d\omega$$

از معادله نقیض (۵٫۸) داریم:

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_1(e^{j\omega})d\omega\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_2(e^{j\omega})d\omega\right]=h_1[\circ]h_2[\circ]$$

همچنین چون

$$h_1[n]*h_2[n]\xleftrightarrow{FT} H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})$$

داریم:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})d\omega$$
$$=\left[h_1[n]*h_2[n]\right]_{n=\circ}$$

بنابراین، با قرار دادن مقدار فوق داریم:

$$h_1[\circ]h_2[\circ]=\left[h_1[n]*h_2[n]\right]_{n=\circ}$$

چون $h_1[n]$ و $h_2[n]$ سببی هستند، این بایستی صحیح باشد.

۵٫۳۳) سیستم LTI علّی توصیف شده با معادلهٔ تفاضلی زیر را در نظر بگیرید.

(الف) پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ این سیستم را بیابید.

(ب) پاسخ سیستم به ورودیهای زیر را بیابید.

(i) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

(ii) $x[n]=\left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n]$

(iii) $x[n]=\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]$

$x[n]=\delta[n]-\frac{1}{2}\delta[n-1]$ (iv)

(ج) پاسخ سیستم را به ورودیهایی با تبدیل فوریهٔ داده شده، پیدا کنید:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad \text{(i)}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} \quad \text{(ii)}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} \quad \text{(iii)}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=1+2e^{-3j\omega} \quad \text{(iv)}$$

حل:

(الف) با گرفتن تبدیل فوریه از معادله دیفرانسیل داده شده داریم:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

(ب) تبدیل فوریه خروجی برابر است با: $Y\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$:

(i) در این مورد

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

بنابراین:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]$$
$$=\frac{1/2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{1/2}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه، داریم:

$$y[n]=1/2\left(1/2\right)^n u[n]+1/2\left(-1/2\right)^n u[n]$$

(ii) در این مورد

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1+1/2\,e^{-j\omega}}$$

بنابراین

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]^2$$

با گرفتن عکس فوریه؛ بدست می آوریم:

$$y[n]=(n+1)\left(-1/2\right)^n u[n]$$

(iii) در این مورد

$$X\left(e^{j\omega}\right)=1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}$$

بنابراین:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=1$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه، داریم:

$$y[n]=-\delta[n]+2\left(-1/2\right)^n u[n]$$

ج) (i)

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\left[\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]$$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^{2}}-\frac{1/4\, e^{-j\omega}}{\left(1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^{2}}$$

با اعمال تبدیل فوریه معکوس داریم:

$$y[n]=[n+1]\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\frac{1}{4}n\left(-1/2\right)^{n-1}u[n-1]$$

(ii) داریم:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\left[\frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right]\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

با اعمال تبدیل فوریه معکوس؛ $y[n]$ به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$y[n]=\left(1/4\right)^{n}u[n]$$

(iii) داریم:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}\right]\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]$$
$$=\frac{2/3}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}+\frac{2/9}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{1/9}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$y[n]=\frac{2}{3}(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{2}{9}\left(-1/2\right)^n u[n]+1/9\left(1/4\right)^n u[n])$$

(iv) داریم:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\left[1+2e^{-3j\omega}\right]\left[\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right]$$
$$=\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{2e^{-3j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$y[n]=\left(-1/221\right)^n u[n]+2\left(-1/2\right)^{n-3}u[n-3]$$

....

٥,٣٤) سیستمی از اتصال سری دو سیستم LTI با پاسخ فرکانسی زیر تشکیل شده است

$$H_1\left(e^{j\omega}\right)=\frac{2-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

و

$$H_2\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}+\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}$$

(الف) معادله دیفرانسیل توصیف‌کنندهٔ کل سیستم را بیابید.

(ب) پاسخ ضربه سیستم کل را تعیین کنید.

حل:

(الف) از آنجایی که سیستم دارای اتصال (آبشاری) یا (کاسکد) می باشد، پاسخ فرکانسی، سیستم کلی عبارت است از:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=H_1\left(e^{j\omega}\right)H_2\left(e^{j\omega}\right)$$
$$=\frac{2-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j3\omega}}$$

بنابراین، تبدیل فوریه، ورودی و خروجی سیستم کلی برابر است با:

$$\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{2-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{8}e^{-3j\omega}}$$

با طرفین و وسطین کردن و نیز اعمال تبدیل فوریه معکوس، داریم:

$$y[n]+\frac{1}{8}y[n-3]=2x[n]-x[n-1]$$

(ب) پاسخ فرکانسی کلی را مجدداً به صورت زیر می توانیم بنویسیم:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{4/3}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{\left(1+j\sqrt{3}\right)/3}{1-\frac{1}{2}e^{j120}e^{-j\omega}}+\frac{\left(1-j\sqrt{3}\right)/3}{1-\frac{1}{2}e^{-j120}e^{-j\omega}}$$

با اعمال عکس تبدیل فوریه، داریم:

$$h[n]=4/3\left(-1/2\right)^n u[n]+\frac{1+j\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1+j\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{1}{2}e^{j120}\right)^n u[n]$$
$$+\frac{1-j\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}e^{-j120}\right)^n u[n]$$

۵,۳۵) یک سیستم LTI با معادله تفاضلی زیر توصیف شده است

$$y[n]-ay[n-1]=bx[n]+x[n-1]$$

که در آن a حقیقی و کوچکتر از ۱ است.

(الف) مقدار b را به نحوی تعیین ک نید که پاسخ فرکانسی سیستم به صورت زیر باشد

برای تمام مقادیر ω ، $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=1$

این سیستم را سیستم تمام‌گذر می‌گویند، چنین سیستمی بـه ازای تمـامِ مقـادیر ω، $e^{j\omega n}$ را بـدون تضعیف عبور می‌دهد. در بقیه این مسئله، همین مقدار b را به کار برید.

(ب) $\angle H\left(e^{j\omega}\right)$ را در فاصلهٔ $0 \le \omega \le \pi$، به ازای $a=\frac{1}{2}$ ، به طور تقریبی رسم کنید.

(ج) $\angle H\left(e^{j\omega}\right)$ را در فاصلهٔ $0 \le \omega \le \pi$، به ازای $a=-\frac{1}{2}$ ، به طور تقریبی رسم کنید.

(د) خروجی سیستم را به ازای $a=-\frac{1}{2}$ و ورودی زیر محاسبه و رسم کنید

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

این مثال نشان می‌دهد که فاز غیرخطی اثر عمده‌ای بر سیگنال می‌گذارد، بـرخلاف فـاز خطـی کـه تنها اثرش ایجاد یک جابجایی زمانی است.

حل:

با گرفتن تبدیل فوریه از طرفین معادله دیفرانسیل عبارت زیر حاصل می شود:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{b+e^{-j\omega}}{1-a\ e^{-j\omega}}$$

به منظور اینکه $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ یک باشد، بایستی مطمئن شویم که:

$$\left|b+e^{-j\omega}\right|=\left|1-a\ e^{-j\omega}\right|$$

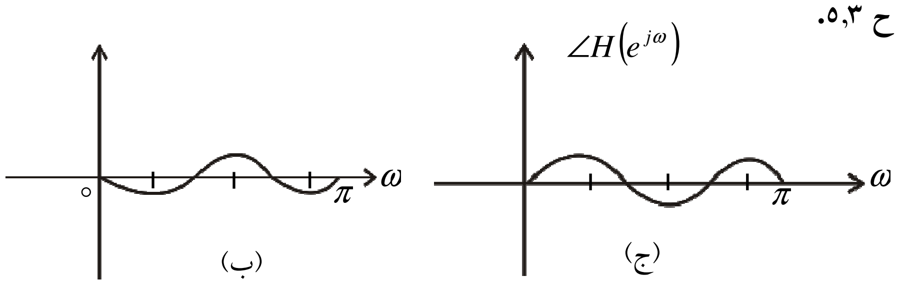
$$\Rightarrow 1+b^2+2b\,Cos\,\omega=1+a^2-2a\,Cos\,\omega$$

این تساوی تنها فقط برای $b=-a$ برقرار است. $\Rightarrow$

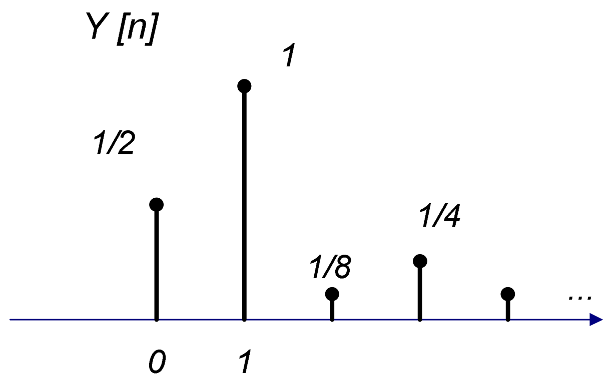
(ب) طرح در شکل ح ۵٫۳۵ نمایش داده شده است.

(ج) طرح در شکل ح ۵٫۳۵ نمایش داده شده است.

شکل ح ۵٫۳.



(د)



(د) وقتی که $a=-\frac{1}{2}$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{{}^{1}\!/_{2}+e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

همچنین

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

بنابراین

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{{}^{1}\!/_{2}+e^{-j\omega}}{\left(1+{}^{1}\!/_{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-{}^{1}\!/_{2}e^{-j\omega}\right)}$$

$$=\frac{{}^{5}\!/_{4}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}-\frac{{}^{3}\!/_{4}}{1+{}^{1}\!/_{2}e^{-j\omega}}$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$y[n]=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\frac{3}{4}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

طرح این خروجی در شکل ح٥,٣٥ نشان داده شده است:

....

٥,٣٦) (الف) فرض کنید $h[n]$ و $g[n]$ پاسخ ضربه‌های دو سیستم LTI پایدار گسسته در زمان وارون هستند. رابطه بین پاسخ فرکانسی دو سیستم را بیابید.

(ب) سیستمهای LTI علّی توصیف شده با معادلات تفاضلی زیر را در نظر بگیرید. در هر مورد پاسخ ضربهٔ سیستم وارون و معادله تفاضلی توصیف‌کنندهٔ آن را بیابید.

(i) $y[n]=x[n]-\frac{1}{4}x[n-1]$

(ii) $y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$

(iii) $y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]-\frac{1}{4}x[n-1]$

(iv) $y[n]+\frac{5}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{4}x[n-1]-\frac{1}{8}x[n-2]$

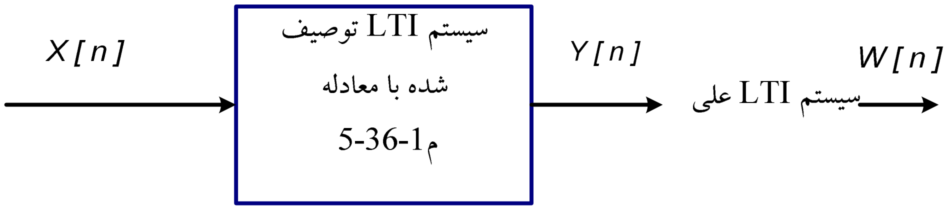
(v) $y[n]+\frac{5}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$

(vi) $y[n]+\frac{5}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]$

(ج) سیستم LTI علّی توصیف شده با معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید

$$y[n]+y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n-1]-\frac{1}{2}x[n-2] \qquad \text{(م ٥-٣٦-١)}$$

وارون این سیستم را بیابید. نشان دهیدی که وارون این سیستم علّی نیست. یک سیستم LTI علّی بیابید که



شکل م ٥-٣٦

«وارون تأخیردار» سیستم توصیف شده با معادله (٥-٣٦-١) باشد. مشخص‌تر این که یک سیستم LTI علّی بیابید به نحوی که خروجی $w[n]$ شکل م ٥-٣٦ برابر $x[n-1]$ باشد.

حل:

(الف) پاسخ های فرکانسی با بیان زیر به هم مرتبط می شوند:

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{H\left(e^{j\omega}\right)}$$

(ب) (i) در اینجا $H\left(e^{j\omega}\right)=1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}$. ب

نابراین $G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$ و $g[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

معادله دیفرنس بین ورودی و خروجی به شکل زیر است:

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]=x[n]+\tfrac{1}{2}x[n-1]$$

(iv) در اینجا

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}{1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}$$

بنابراین:

$$G(j\omega)=\frac{1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}$$

بنابراین:

$$G\left(e^{j\omega}\right)=1+\frac{2}{1-\left(1/2\right)e^{-j\omega}}-\frac{2}{1+\left(1/4\right)e^{-j\omega}}$$

,

$$g[n]=\delta[n]+2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-2\left(-1/4\right)^{n}u[n]$$

بدلیل اینکه:

$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{\left(1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}\right)}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}\right)}$$

معادله دیفرنس بین ورودی و خروجی برابر است با:

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y$$

$$=$$

$$x[n]+\frac{5}{4}x[n-1]-\frac{1}{8}x[n-2]$$

در اینجا $H\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}$. بنابراین $G\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

چون $G\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\dfrac{1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}{1-1/2\,e^{-j\omega}}$

معادله دیفرنس بین ورودی و خروجی به شکل زیر در می آید:

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]+\frac{5}{4}x[n-1]-\frac{1}{8}x[n-2]$$

(vi) در اینجا $H(e^{j\omega})=\dfrac{1}{1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}$.

بنابراین

$$G(e^{j\omega})=\left(1+\frac{5}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-2j\omega}\right)$$

داریم:

$$g[n]=\delta[n]+\frac{5}{4}\delta[n-1]-\frac{1}{8}\delta[n-2]$$

و معادله دیفرنس بین ورودی و خروجی برابر است با:

$$y[n]=x[n]+\frac{5}{4}x[n-1]-\frac{1}{8}x[n-2]$$

(ج) پاسخ فرکانسی سیستم داده شده عبارتست از:

$$H(e^{j\omega})=\frac{e^{-j\omega}-\frac{1}{2}e_{-2j\omega}}{1+e^{-j\omega}}+\frac{1}{4}e^{-2j\omega}$$

پاسخ فرکانسی سیستم معکوس برابر است با:

$$G(e^{j\omega})=\frac{1}{H(e^{j\omega})}=\frac{e^{j\omega}+1+{}^{1}\!/_{4}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

بنابراین

$$g[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+1]+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1].$$

واضح است که پاسخ $g[n]$، یک پاسخ ضربه سببی نیست.

اگر این پاسخ ضربه را به اندازه ۱ واحد تأخیر دهیم، در اینصورت، کازال خواهد شد. بعلاوه، خروجی سیستم معکوس در اینصورت برابر $x[n-1]$ خواهد بود. پاسخ ضربه این سیستم کازال برابر است با:

$$g_1[n] = g[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2]$$

....

۵,۳۷) فرض کنید $X\left(e^{j\omega}\right)$ تبدیل فوریه $x[n]$ است. تبدیل فوریه سیگنالهای زیر را برحسب $X\left(e^{j\omega}\right)$ پیدا کنید. (فرض نکنید که $x[n]$ حقیقی است.)

(الف) $\Re e\{x[n]\}$ (ب) $x^*[-n]$ (ج) $\mathcal{E}v\{x[n]\}$

حل:

داده شده که $x[n] \xleftrightarrow{FT} x\left(e^{j\omega}\right)$

(i) چون $x\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$

می توان نوشت:

$$X^*\left(e^{-j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] e^{-j\omega n}$$

با مقایسه با معادله (۵,۹) نتیجه می گیریم که:

$$x^*[n] \xleftrightarrow{FT} X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$

بنابراین:

$$\mathrm{Re}\{x[n]\} = \frac{x[n] + x^*[n]}{2} \xleftrightarrow{FT} \frac{x\left(e^{j\omega}\right) + x^*\left(e^{-j\omega}\right)}{2}$$

(ii) چون $X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$

می توان نوشت:

$$X\left(e^{-j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] e^{-j\omega n}$$

بنابراین:

$$x[-n] \xleftrightarrow{FT} X\left(e^{-j\omega}\right)$$

از قسمت قبلی می دانیم که:

$$x^*[n] \xleftrightarrow{FT} X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$

بنابراین، با ترکیب دو وضعیت با همدیگر داریم:

$$x^*[-n] \xleftrightarrow{FT} X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

(iii) از نتایج قبلی می دانیم که:

$$\varepsilon\{x[n]\} = \frac{x[n]+x[-n]}{2} \xleftrightarrow{FT} \frac{x\left(e^{j\omega}\right)+x\left(e^{-j\omega}\right)}{2}$$

....

۵,۳۸) فرض کنید $X\left(e^{j\omega}\right)$ تبدیل فوریه سیگنال حقیقی $x[n]$ است. نشان دهید که $x[n]$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x[n] = \int_{\circ}^{\pi}\{B(\omega)\cos\omega + C(\omega)\sin\omega\}d\omega$$

عبارتهایی برای $B(\omega)$ و $C(\omega)$ برحسب $X\left(e^{j\omega}\right)$ پیدا کنید.

حل:

از معادله نقیض (۵,۸) بدست می آوریم:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\circ} x\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\circ}^{\pi} x\left(e^{-j\omega}\right)e^{-j\omega n}d\omega$$

چون $x[n]$ حقیقی است، $x\left(e^{j\omega}\right) = x^*\left(e^{j\omega}\right)$؛ بنابراین:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\circ}^{n} \mathrm{Re}\left\{x\left(e^{j\omega}\right)\right\}\left\{e^{\omega n} + e^{-j\omega n}\right\}d\omega$$

$$+ \frac{j}{2\pi}\int_{\circ}^{\pi} \mathrm{Im}\left\{x\left(e^{j\omega}\right)\right\}\left\{e^{\omega n} - e^{-j\omega n}\right\}d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\pi} \mathrm{Re}\left\{x\left(e^{j\omega}\right)\right\}2\cos(\omega n)d\omega$$

$$- \frac{j}{\pi}\int_{\circ}^{\pi} \mathrm{Im}\left\{x\left(e^{j\omega}\right)\right\}\{Sin\,\omega n\,d\omega\}$$

بنابراین:

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\{x(e^{j\omega})\}Cos\,\omega n$$

,

$$-\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\{x(e^{j\omega})\}Sin\,\omega n$$

۵,۳۹) خاصیت کانولوشن زیر را ثابت کنید

$$x[n]*h[n]\xrightarrow{\Im}X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

حل:

فرض کنید:

$$y[n]=x[n]*h[n]$$

در اینصورت:

$$\begin{aligned}
Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\{x[n]\}*h[n]e^{-j\omega n}\\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n-k]e^{-j\omega n}\\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]e^{-j\omega k}H(e^{j\omega})\\
&= H(e^{j\omega})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]e^{-j\omega k}\\
&= H(e^{j\omega})x(e^{j\omega})
\end{aligned}$$

۵,٤۰) $x[n]$ و $h[n]$ دو سیگنال هستند و $y[n]=x[n]*h[n]$. دو عبارت برای $y[\circ]$ بنویسید: یکی بر حسب $x[n]$ و $h[n]$ (با استفاده از جمع کانولوشن) و یکی برحسب $X(e^{j\omega})$ و $H(e^{j\omega})$ (با استفاده از خاصیت کانولوشن تبدیل فوریه). با انتخاب سنجدهٔ $h[n]$ و استفاده از دو عبارت فوق، رابطه پارسوال را ثابت کنید یعنی نشان دهید که

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(e^{j\omega})|^2d\,\omega$$

به همین روش رابطه زیر را که تعمیم رابطهٔ پارسوال است بیابید.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, z^*[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)Z^*\left(e^{j\omega}\right)d\omega$$

حل:

فرض کنید $y[n]=x[n]*h[n]$ در اینصورت با استفاده از مجموع کانولوشن:

$$y[\circ]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[-k]$$

(ح۱-۵,٤۰.)

با استفاده از خاصیت کانولوشن تبدیل فوریه داریم:

$$y[c]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)d\omega \qquad \textbf{(ح۲-۵,٤۰)}$$

حال، فرض کنید $h[n]=x^*[-n]$. در اینصورت $H\left(e^{j\omega}\right)=X^*\left(e^{j\omega}\right)$. با جایگذاری طرف راست معادله (ح۱-۵,٤۰) و (ح۲-۵,٤۰) و برابر قرار دادن آنها داریم:

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} x[k]x^*[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(e^{j\omega}\right)x^*\left(e^{j\omega}\right)d\omega$$

بنابراین:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left|x\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$$

حال فرض کنید که $h[n]=x^*[-n]$ در اینصورت.، جایگذاری طرف راست معادلـه (۱-S۵,٤۰) و (ح۲-۵,٤۰) و برابر قرار دادن آنها:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]x^*[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left(e^{j\omega}\right)z^*\left(e^{j\omega}\right)d\omega$$

....

۵,٤۱) فرض کنید $\tilde{x}[n]$ سیگنال متناوبی با دوره تنـاوب N اسـت. سـیگنال دارای عمـر محـدود $x[n]$ به ازای یک عدد صحیح n_o با $\tilde{x}[n]$ رابطهٔ زیر را داراست

$$x[n]=\begin{cases}\tilde{x}[n], & n_o\le n\le n_o+N-1\\ \circ\quad, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

یعنی $x[n]$ در یک تناوب با $\tilde{x}[n]$ برابر است و بقیهٔ جاها صفرست.

(الف) a_k ضرائب سری فوریه $\tilde{x}[n]$ و $X\left(e^{j\omega}\right)$ تبدیل فوریهٔ $x[n]$ است. نشان دهید که مستقل از مقدار $n_\circ$ داریم

$$a_k = \frac{1}{N} X\left(e^{j2\pi/N}\right)$$

(ب) دو سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n] = u[n] - u[n-5]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-kN]$$

که در آن N یک عدد مثبت است. a_k را ضرائب فوریهٔ $\tilde{x}[n]$ و $X\left(e^{j\omega}\right)$ را تبدیل فوریه آن فرض کنید.

(i) عبارت $X\left(e^{j\omega}\right)$ را بیابید.

(ii) با استفاده از نتیجه بند (الف) عبارتی برای ضرائب فوریه a_k بیابید.

حل:

(الف) تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ برابر است با $x\left(e^{j\omega}\right)$ و

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n_\circ}^{n_\circ+N+1} x[n] e^{-j\omega n}$$

بنابراین:

$$X\left(e^{j2\pi k/N}\right) = \sum_{n=n_\circ}^{n_\circ+N-1} x[n] e^{-j\left(2\pi/N\right)kn} \qquad \text{(ح ۱-۵,٤۱)}$$

حال، می توانیم ضرایب سری فوریه $\tilde{x}[n]$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-j\left(2\pi/N\right)kn}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=n_\circ}^{n_\circ+N-1} x[n] e^{-j\left(2\pi/N\right)kn}$$

(چون $x[n] = \tilde{x}[n]$ در بازه $n_\circ \le n \le n_\circ + k - 1$). بامقایسه معادلاتبالا با معادله (ح ۱-۵,٤۱) خواهیم داشت:

$$a_k = \frac{1}{N} x\left(e^{j2\pi k/N}\right)$$

(ب) (i) از اطلاعات داده شده:

$$\dot{x}\left(e^{j\omega}\right)=1+e^{j\omega}+e^{-2j\omega}+e^{-3j\omega}$$
$$=e^{-j\left(3/2\right)\omega}\left\{e^{j\left(3/2\right)\omega}+e^{-j\left(3/2\right)\omega}\right\}+e^{-j\left(3/2\right)\omega}e^{j\left(1/2\right)\omega}+e^{-j\left(\frac{1}{2}\right)}$$
$$=2e^{-j\left(3/2\right)\omega}\left\{Cos\left(3\omega/2\right)+Cos\,\omega/2\right\}$$

(ii) از قسمت (الف) داریم:

$$a_k=\frac{1}{N}X\left(e^{j2k\pi/N}\right)$$
$$=\frac{1}{N}2e^{-j\left(3/2\right)2\pi k/N}$$
$$\{Cos(6\pi k/2N)\}$$
$$+Cos\left(\pi k/N\right)$$

....

۵,٤٢) در این مسئله خاصیت جابجایی فرکانسی تبدیل فوریه گسسته در زمان را به عنـوان حالـت خاصی از خاصیت ضرب ثابت می‌کنیم. $x[n]$ را یک سیگنال گسسته در زمان دلخواه با تبـدل فوریـه $X\left(e^{j\omega}\right)$ بگیرید و فرض کنید.

$$g[n]=e^{j\omega_\circ n}x[n]$$

(الف) تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید و آن را رسم کنید

$$p[n]=e^{j\omega_\circ n}$$

(ب) خاصیت ضرب تبدیل فوریه می‌گوید که چون

$$g[n]=p[n]x[n]$$
$$G\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}X\left(e^{j\theta}\right)P\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$$

با محاسبه این انتگرال نشان دهید که

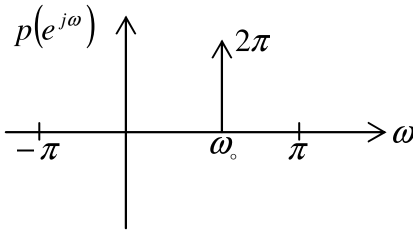
$$G\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j(\omega-\omega_\circ)}\right)$$

حل:

(الف)

$$p\left(e^{j\omega}\right)=2\pi\delta(\omega-\omega_\circ)\quad for\quad |\omega|<\pi$$

این مطلب در شکل ح ٥,٤٢ نشان داده شده است.



شکل ح ٥,٤٢

(ب) از خاصیت ضرب تبدیل فوریه، داریم:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(e^{j\theta})p(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(e^{j\theta})2\pi\delta(\omega-\theta-\omega_\circ)d\theta \\ &= X(e^{j(\omega-\omega_\circ)}) \end{aligned}$$

....

٥,٤٣) $x[n]$ را سیگنالی با تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ بگیرید و فرض کنید

$$g[n] = x[2n]$$

سیگنالی با تبدیل فوریهٔ $G(e^{j\omega})$ است. در این مسئله رابطه بین $X(e^{j\omega})$ و $G(e^{j\omega})$ را به دست می‌آوریم.

(الف) فرض کنید

$$v[n] = \frac{(e^{-j\pi n}x[n]) + x[n]}{2}$$

تبدیل فوریه $V(e^{j\omega})$ را برحسب $X(e^{j\omega})$ بیان کنید.

(ب) با توجه به این که برای n های فرد $x[n] = \circ$، نشان دهید که تبدیل فوریهٔ $v[2n]$ برابر $Ve(j\omega/2)$ است.

(ج) نشان دهید که

$$x[2n] = v[2n]$$

و نتیجه بگیرید که

$$G(e^{j\omega}) = V(e^{j\omega/2})$$

حال با استفاده از نتیجه بند (الف) $G(e^{j\omega})$ را برحسب $X(e^{j\omega})$ بیان کنید.

حل:

(الف) با استفاده از شیفت فرکانسی و خاصیت خطی داریم:

$$V(e^{j\omega})=\frac{X(e^{j(\omega-\pi)})+x(e^{j\omega})}{2}$$

(ب) فرض کنید که $y[n]=v[2n]$ در اینصورت:

$$Y(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\upsilon[2n]e^{-j\omega n}$$

بدلیل اینکه نمونه های با اندیس فرد $\upsilon[n]$ صفر می باشد، می توان $m=2n$ را در معادله بالا قرار دهیم:

$$Y(e^{j\omega})=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\upsilon[m]e^{j\omega m/2}=V\left(e^{j\omega/2}\right)$$

(توجه کنید که: تعویض n با ۲m تنها اگر اندیس های فرد در سری فوق صفر گردد.)

(ج) $x[2n]$ یک دنباله جدید است که شامل نمونه هایی بـا انـدیس زوج $x[n]$ مـی باشـد. $\upsilon[n]$ دنباله ای است که نمونه های با اندیس فرد آن برابر $x[n]$ شود. نمونه هـای بـا اندیسـه – فـرد $\upsilon[n]$ صفر است. $\upsilon[2n]$ دنباله ای جدیدی است که تنهاشامل نمونه های با اندیس زوج است. این ایده در شکل ح ٥,٤٣ رسم شده است. از قسمت (الف)

$$G(e^{j\omega})=\frac{x\left(e^{j(\omega/2-\pi)}\right)+x\left(e^{j\omega/2}\right)}{2}$$

٥,٤٤) (الف) فرض کنید

$$x_1[n]=\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

و تبدیل فوریه آن را با $X_1(e^{j\omega})$ نشان دهید. $x_1[n]$ و سـیگنالهای دارای تبـدیل فوریـهٔ زیـر را رسم کنید:

(i) $X_2(e^{j\omega})=X_1(e^{j\omega})e^{j\omega},\ |\omega|<\pi$

(ii) $X_3(e^{j\omega}=X_1)(e^{j\omega})e^{-j3\omega/2},|\omega|<\pi$

(ب) فرض کنید

$$w(t)=\cos\left(\frac{\pi\, t}{3\,T}\right)+\sin\left(\frac{\pi\, t}{2\,T}\right)$$

یک سیگنال پیوسته در زمان است. توجه کنید که $x_1[n]$ را می‌توان نمونه‌های متساوی‌الفاصلهٔ $w(t)$ به حساب آورد، یعنی

$$x_1[n]=w(n\,T)$$

نشان دهید که

$$x_2[n]=w(n\,T-\alpha)$$

و

$$x_3[n]=w(n\,T-\beta)$$

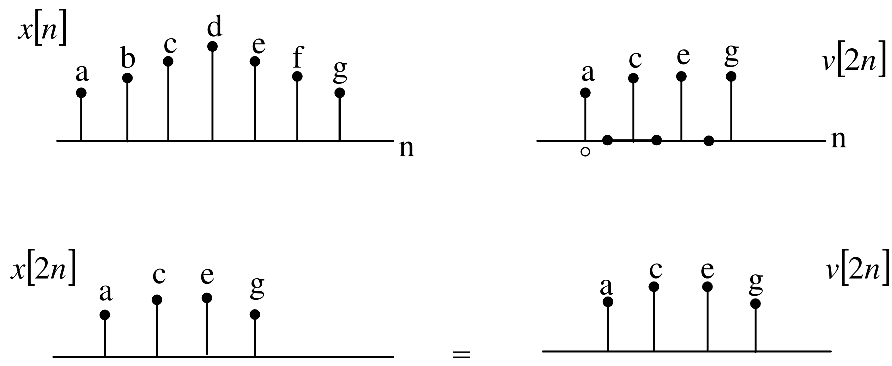
و مقادیر α و β را بیابید. با استفاده از این نتایج نشان دهید که $x_2[n]$ و $x_3[n]$ نیز نمونه‌های متساوی‌الفاصلهٔ $w(t)$ هستند.

حل:

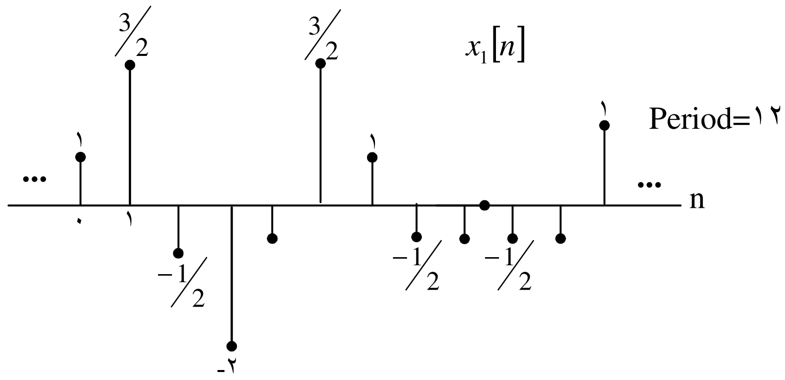
(الف) سیگنال $x_1[n]$ در شکل ح ٤٤–٥ نشان داده شده است.

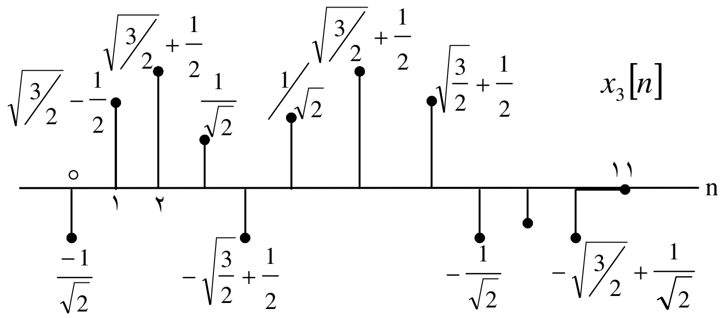
(i) با گرفتن عکس تبدیل فوریه، سیگنال $x_2[n]$ برابر است با:

$$x_2[n]=x_1[n+1]$$



شکل ح ٥,٤٣





شکل ح ٥,٤٤

(ii) با گرفتن تبدیل فوریه معکوس، $x_2[n]$ برابر است با:

$$x_2[n] = x_1\left[n - \tfrac{3}{2}\right] = Sin\left(\pi n/3\right) + Sin\left(\pi n/2\right)Cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$- Cos\left(\pi n/2\right)Sin\left(3\pi/4\right)$$

که در شکل ح ٥,٤٤. نمایش داده شده است.

(ب) در قسمت (الف)

$$x_2[n] = x_1[n+1] = \omega[nT + \mathrm{T}]$$

و نیز

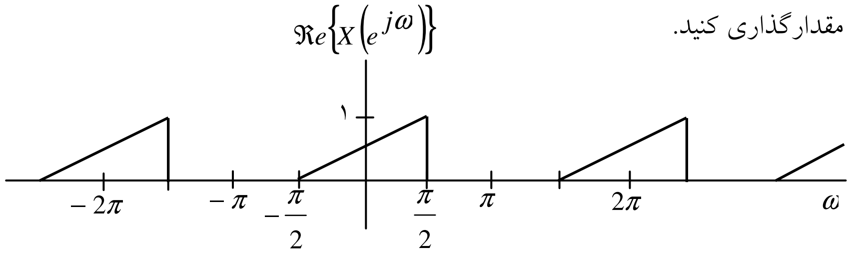
$$x_3[n] - x_1\left[n - \tfrac{3}{2}\right] = w\left[nT - \tfrac{3T}{2}\right]$$

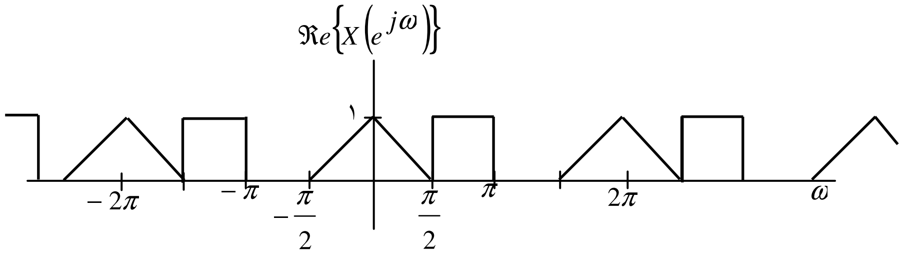
بنابراین:

$$\beta = {}^{3}\!/_{2}\ ,\ \ \propto = -1$$

....

٥,٤٥) سیگنال $x[n]$ با تبدیل فوریهٔ شکل م ٥-٤٥ را در نظر بگیرید. سیگنالهای پیوسته در زمان زیر را رسم و مقدارگذاری کنید.





شکل م ٥-٤٥

(الف) $x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j(2\pi/10)nt}$

(ب) $x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{j(2\pi/10)nt}$

(ج) $x_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{O}d\{x[n]\}e^{j(2\pi/8)nt}$

(د) $x_4(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Re e\{x[n]\}e^{j(2\pi/6)nt}$

حل:

از معادله آنالیز تبدیل فوریه:

$$x(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

(الف) با مقایسه معادله برای $x_1(t)$ با معادله بالا، بدست می آوریم:

$$x_1(t) = X\left(e^{-j\left(2\pi/_{10}\right)t}\right)$$

بنابراین $x_1(t)$ در شکل ح٥,٤٥ نشان داده شده است.

(ب) مقایسه معادله برای $x_2(t)$ با معادله برای $X\left(e^{j\omega}\right)$ داریم:

$$x_2(t) = X\left(e^{j(2\pi 10)t}\right) = x_1(-t)$$

بنابراین $x_2(t)$ در شکل ح٥,٤٥ نشان داده شده است.

(ج) نمی‌دانیم $od\{x[n]\} = (x[n] - x[-n])/2$ بنابراین:

$$\frac{x\left(e^{j\omega}\right) - x\left(e^{-j\omega}\right)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} od\{x[n]\} e^{-j\omega n}$$

با مقایسه این نتیجه با معادله داده شده برای $x_3(t)$، داریم:

$$x_3(t) = \frac{x\left(e^{-j\left(2\pi/_8\right)t}\right) - x\left(e^{\left(2\pi/_8\right)t}\right)}{2}$$

بنابراین $x_3(t)$ همان شکلی رادارد که در شکل ح٥,٤٥ نشان داده شده است.

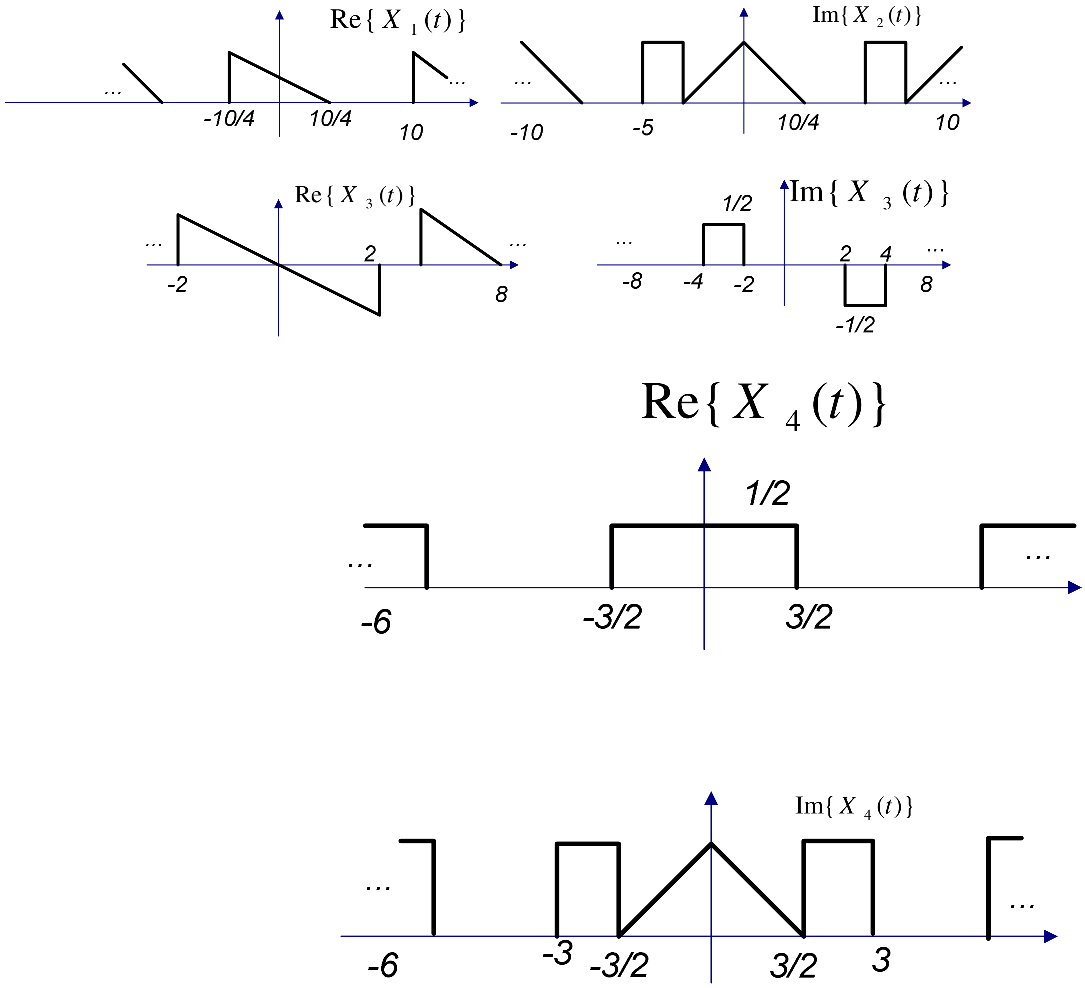
(د) می دانیم که $\mathrm{Re}\{x[n]\} = \left(x[n] + x^*[n]\right)/2$، بنابراین:

$$\frac{x\left(e^{j\omega}\right) - x^*\left(e^{-j\omega}\right)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\{x[n]\} e^{-j\omega n}$$

با مقایسه این معادله داده شده برای $x_4(t)$ بدست می‌آوریم.

$$x_4(t) = \frac{x\left(e^{-j\left(2\pi/_6\right)t}\right) + X^*\left(e^{j\left(2\pi/_6\right)t}\right)}{2}$$

بنابراین $x_4(t)$ همان گونه است که در شکل ح٥,٤٥ نشان داده شده است.



شكل ح٥,٤٥

٥,٤٦) در مثال ٥–١ ديديم كه به ازاى $|a|<1$

$$a^n u[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-a\, e^{-j\omega}}$$

(الف) با استفاده از خواص تبديل فوريه نشان مى‌دهيد كه

$$(n+1)a^n u[n] \xleftrightarrow{\Im} \frac{1}{\left(1-a\,e^{-j\omega}\right)^2}$$

(ب) با استفاده از استقراء نشان دهید که عکس تبدیل فوریهٔ

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{\left(1-a\ e^{-j\omega}\right)^r}$$

عبارت است از

$$x[n]=\frac{(n+r-1)}{n!(r-1)!}a^n u[n]$$

حل:

(الف) فـرض کنیـد $x[n]=a^n u[n]$، در ایـن صـورت $x\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$، بـا اسـتفاده از خاصیت مشتقگیری در فرکانس داریم:

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{FT} j\frac{dx(t)}{d\omega}=\frac{a\ e^{-j\omega}}{\left(1-a\,e^{-j\omega}\right)^2}$$

بنابراین:

$$(n+1)a^n u[n] \xleftrightarrow{FT} j\frac{dx(t)}{dt}+x\left(e^{j\omega}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(1-\propto e^{-j\omega}\right)^2}$$

(ب) از قسمت (الف)، واضح است که نتیجه برای $r=1$ و $r=2$ صحیح است. فرض کنیـد کـه همچنین برای $K=r-1$ صحیح باشد. تلاش خواهیم کرد تا اثبات ک نـیم نتیجـه بـرای $k=r$ نیـز صحیح است و داریم:

$$x_{r-1}[n]=\frac{\{n+r-2\}!}{n!(r-2)!}a^n u[n] \xleftrightarrow{FT}$$

$$x_{r-1}\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)^{r-1}}$$

از خاصیت مشتقگیری در حوزه فرکانس

$$n\,x_{r-1}[n] \xleftrightarrow{FT} \frac{a(r-1)e^{-j\omega}}{\left(1-a\,e^{-j\omega}\right)^{r-1}}$$

بنابراین:

$$\frac{(n+1)x_{r-1}[n+1]}{a(r-1)} \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{\left(1-a\,e^{-j\omega}\right)^{r}}$$

طرف چپ معادله بالا برابر است با:

$$\frac{(n+1)x_{r-1}[n+1]}{a(r-1)} = \frac{(n+1-r)!}{n!(r-1)!}a^n u[n] = x_r[n]$$

بنابراین، نشان دادیم که اگر مسئله برای $r-1$ صحیح باشد، نتیجه برای r نیز صحیح خواهد بود. چون می دانیم که نتیجه برای $r=2$ صحیح است می توانیم نتیجه بگیریم که برای $r=3$ و $r=4$ و ... (بهمین ترتیب) نیز صحیح خواهد بود.

۵٫۴۷) (الف) اگر $X\left(e^{j(w-1)}\right)=x\left(e^{j\omega}\right)$ با پریود 2π، پریودیک می باشد. این تنها در صورتی است که $X\left(e^{j\omega}\right)$ برای همه ی ω عدد ثابتی باشد. این بیان می کند که $x[n]$ برحسب $k\delta[n]$ می باشد و حال اینکه k عدد ثابتی است. بنابراین، حالت داده شده، صحیح می باشد.

(ب) اگر $X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)=x\left(e^{j\omega}\right)$ در اینصورت $X\left(e^{j\omega}\right)$ با پریود π، متناوب خواهد بود. همچنین می دانیم که $X\left(e^{j\omega}\right)$ با پریود 2π متناوب خواهد بود. این دو شرط می توانند حتی زمانیکه $X\left(e^{j\omega}\right)$ هر شکل دلخواهی در بازه ی $\left|w\pi/2\right| \le$ ۰ برقرار باشند. بنابراین $X\left(e^{j\omega}\right)$ لازم نیست که حتماً ثابت باشد.

به طور مکرر، $x[n]$ لازم نیست که فقط یک ضربه باشد، بنابراین حالت داده شده نادرست است.

(ج) از مسئله ح۴۳. می دانیم که تبدیل فوریه معکوس $x\left(e^{j\omega/2}\right)$ دنباله ای به صورت $v[n]=\left(x[n]+e^{j\pi n}x[n]\right)/2$ می باشد. نمونه های اندیس زوج $v[n]$ بااندیس های زوج نمونه های $x[n]$. که بیان می کند نمونه های اندیس زوج $x[n]$ فرو هستند. بنابراین $x[n]$ لزوماً نبایستی یک ضربه باشد. بنابراین حالت داده شده صحیح نیست.

(د) از جدول ۵٫۱ می دانیم که تبدلی فوریه $X\left(e^{j2\omega}\right)$ سیگنالی بسط زمانی است یعنی:

$$x_{(2)}[n]=\begin{cases} x\left[n/2\right] & n=\circ,\pm 2,4,... \\ \circ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

اگر $x\left(e^{2j\omega}\right)=x\left(e^{j\omega}\right)$ باشد در اینصورت: $x[n]=x_{(2)}[n]$ این تنها در صورتی ممکـن اسـت که $x[n]$ یک ضربه باشد. بنابراین حالت داده شده صحیح می باشد.

....

۵,٤٨) یک سیستم LTI گسسته در زمان علّی با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ داده شـده اسـت. این سیستم با دو معادله تفاضلی، برحسب سیگنال واسطهٔ $w[n]$ مشخص شده است.

$$y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]+w[n]+\frac{1}{2}w[n-1]=\frac{2}{3}x[n]$$

$$y[n]-\frac{5}{4}y[n-1]+2w[n]-2w[n-1]=-\frac{5}{3}x[n]$$

(الف) پاسخ فرکانسی و پاسخ ضربهٔ این سیستم را به دست آورید.

(ب) یک معادلهٔ تفاضلی پیدا کنید که $x[n]$ و $y[n]$ این سیستم را به هم ربط دهد.

حل:

(الف) با گرفتن تبدیل فوریه از دو طرف معادله و حذف جمله $w\left(e^{j\omega}\right)$ از دو طرف، داریم:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{3-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

با گرفتن عکس تبدل فوریه از بسط کسرهای جزئی معادله فوق داریم:

$$h[n]=4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\left(1/4\right)^n u[n]$$

(ب) می دانیم که:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{3-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

با طرفین وسطین کردن و گرفتن عکس تبدیل فوریه، داریم:

$$y[y]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y(n-2)=3x[n]-\frac{1}{2}n[n-1]$$

....

۵٫٤۹) (الف) $y[n]$ پاسخ فرکانسی و پاسخ ضربه این سیستم را به دست آورید.
به صورت زیر به هم مرتبط‌اند

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=2\ X\left(e^{j\omega}\right)+e^{-j\omega}X\left(e^{j\omega}\right)-\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}$$

(i) آیا سیستم خطی است؟ استدلالی روشن برای جوابتان بیاورید.

(ii) آیا سیستم تغییرناپذیر با زمان است؟ استدلال کنید.

(iii) به ازای $x[n]=\delta[n]$، $y[n]$ را بیابید.

(ب) سیستم گسسته در زمانی را در نظر بگیرید که تبدیل خروجی $Y\left(e^{j\omega}\right)$ آن و تبدیل فوریهٔ ورودی‌اش به صورت زیر به هم مرتبط باشد.

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\int_{\omega-\pi/4}^{\omega+\pi/4}X\left(e^{j\omega}\right)d\omega$$

$y[n]$ را برحسب $x[n]$ پیدا کنید.

حل:

(الف) (i) فرض کنید $x[n]=ax_1[n]+bx_2[n]$ که a و b ثابت هستند. در اینصورت $x\left(e^{j\omega}\right)=ax_1\left(e^{j\omega}\right)+bx_2\left(e_{j\omega}\right)$ همچنین فرض کنید پاسخ سیستم به $x_1[n]$ و $x_2[n]$ به ترتیب برابر $y_1[n]$ و $y_2[n]$ باشد.

با جایگذاری برای $X\left(e^{j\omega}\right)$ در معادله داده شده و ساده سازی، بدست می آوریم $Y\left(e^{j\omega}\right)=aY_1\left(e^{j\omega}\right)+by_2\left(e^{j\omega}\right)$. بنابراین سیستم خطی است.

(ii) فرض کنید سیگنال $x[n]=x[n-1]$، در اینصورت $x_1\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\omega}x\left(e^{j\omega}\right)$. فرض کنیم، پاسخ سیستم به این سیگنال برابر $y_1[n]$ باشد. از معادله داده شده:

$$\begin{aligned}Y_1\left(e^{j\omega}\right)&=2x_1\left(e^{j\omega}\right)+e^{-j\omega}x_1\left(e^{j\omega}\right)-\frac{dx_1\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}\\&=e^{-j\omega}\left[2x\left(e^{j\omega}\right)+e^{-j\omega}x\left(e^{j\omega}\right)-\frac{dx\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}\right]+je^{-j\omega}x\left(e^{j\omega}\right)\\&\neq e^{-j\omega}Y\left(e^{j\omega}\right)\end{aligned}$$

بنابراین سیستم تغییرپذیر با زمان است.

(iii) اگر $x[n]=\delta[n]$، $X(e^{j\omega})=1$، در اینصورت:

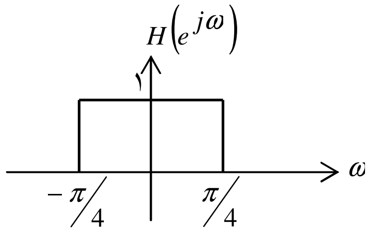
$$Y(e^{j\omega})=2+e^{-j\omega}$$

بنابراین، $y[n]=2\delta[n]+\delta[n-1]$.

(ب) می توانیم بنویسیم:

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega-\frac{\pi}{4}}^{\omega+\frac{\pi}{4}}x(e^{j\theta})H(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

که $H(e^{j\omega})$ در شکل ح٥,٤٩ نشان داده شده است:



شکل ح٥,٤٩

با استفاده از خاصیت ضرب تبدیل فوریه و جدول ٥,٢ بدست می آوریم:

$$y[n]=2x[n]\frac{Sin(n\pi/4)}{n}$$

٥,٥٠) (الف) می‌خواهیم یک سیستم LTI گسسته در زمان طرح کنیم که به ازای ورودی زیر

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

خروجی زیر را ایجاد کند

$$y[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

(i) پاسخ ضربه و پاسخ فرکانسی سیستم LTI دارای مشخصات بالا را پیدا کنید.

(ii) معادله تفاضلی ارتباط‌دهنده $y[n]$ و $x[n]$ این سیستم را بیابید.

(ب) پاسخ یک سیستم به ورودی $(n+2)(1/2)^n u[n]$ عبارت است از $(1/4)^n u[n]$. اگر خروجی $\delta[n]-(-1/2)^n u[n]$ باشد، ورودی چیست؟

حل:

(الف) (i) از اطلاعات داده شده

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$h[n]=3\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n]-2\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]$$

(ii) از قسمت (الف)، می دانیم که:

$$\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{j\omega}\right)}$$

با طرفین و وسطین نمودن و گرفتن عکس تبدل فوریه داریم:

$$y[n]-\frac{7}{12}y[n-1]+\frac{1}{12}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$$

(ب) از اطلاعات داده شده:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2}{2\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2}$$

حال می‌خواهیم، $X\left(e^{j\omega}\right)$ را زمانیکه $Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2}e^{-j\omega}\Big/\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2$ را بدست آوریم.

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\frac{e^{-j\omega}\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}$$

با گرفتن عکس تبدیل فوریه از بسط کسرهای جزئی معادله بالا داریم:

$$x[n]=\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]+\frac{3}{8}\left(1/2\right)^{n-1}u[n-1]+\frac{1}{8}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1].$$

۵,۵۱) (الف) یک سیستم گسسته در زمان با پاسخ ضربهٔ زیر را در نظر بگیرید.

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

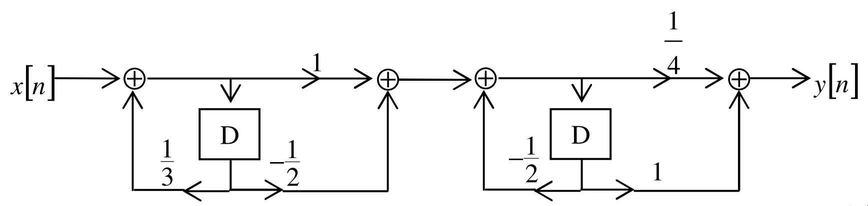
یک معادله تفاضلی خطی با ضرائب ثابت بیابید که رابطه ورودی و خروجی این سیستم را توصیف کند.

(ب) شکل م ۵-۵۱ نمودار جعبه‌ای یک سیستم LTI علّی را نشان می‌دهد.

(i) معادله تفاضلی بیان‌کنندهٔ رابطهٔ ورودی و خروجی این سیستم را بیابید.

(ii) پاسخ فرکانسی این سیستم را بیابید.

(iii) پاسخ ضربه سیستم را به دست آورید.



شکل م ۵-۵۱

حل:

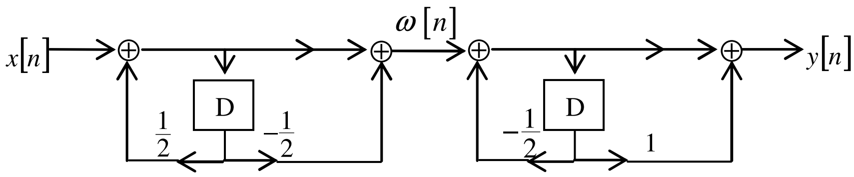
(الف) با گرفتن تبدیل فوریه معکوس $h[n]$، بدست می آوریم:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=Y\left(e^{j\omega}\right)\Big/x\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-2j\omega}}$$

با طرفین وسطین کردن تبدیل فوریه معکوس داریم:

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=\frac{3}{2}X[n]-\frac{1}{2}x[n-1]$$

(ب) (i) فرض کنید خروجی میانی را $\omega[n]$ بنامیم (شکل ح ۵,۵۱.) را ببینید).



شکل ح ۵,۵۱

در اینصورت می توانیم معادله تفاضلی (دیفرنس) را به صورت زیر بنویسیم:

$$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]=\frac{1}{4}\omega[n]+\omega[n-1]$$

و

$$\omega[n]-\frac{1}{3}\omega[n-1]=x[n]x[n-1]$$

با گرفتن تبدیل فوریه از دو طرف معادله و حذف $w\left(e^{j\omega}\right)$ از طرفین معادله، داریم:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{7}{8}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-2j\omega}}$$

با طرفین وسطین و گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-2]=\frac{1}{4}x[n]+\frac{7}{8}x[n-1]-\frac{1}{2}x[n-2]$$

(ii) از (i)

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{7}{8}e^{-j\omega}e^{2j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-2j\omega}}$$

(iii) با گرفتن عکس تبدیل فوریه از بسط به کسرهای جزئی $H\left(e^{j\omega}\right)$ داریم:

$$h[n]=2\delta[n]-\frac{21}{16}\left(-\frac{21}{16}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{7}{16}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

....

۵,۵۲) (الف) $h[n]$ پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI حقیقی، علّی و گسسته در زمان است. نشان دهید که بخش حقیقی پاسخ فرکانسی برای مشخص کردن کامل این سیستم کافی است.: این همتای گسسته در زمان خاصیت کافی بودن قسمت حقیقی است که در مسئله ٤-٤٧ برای سیستمهای پیوسته در زمان بیان شد.

(ب) $h[n]$ را حقیقی و علّی فرض کنید. اگر

$$\Re e\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}=1+a\cos 2\omega \qquad (a \text{ حقیقی})$$

$h[n]$ و $H\left(e^{j\omega}\right)$ را بدست آورید.

(ج) نشان دهید که $h[n]$ را می‌توان به طور کامل از $\Re e\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}$ و $h[0]$ به دست آورد.

(د) دو سیستم LTI حقیقی و علّی پیدا کنید که قسمت موهومی پاسخ فرکانسی آنها $\sin\omega$ باشد.

حل:

(الف) بدلیل اینکه $h[n]$ کازال است، مقادیر نمونه‌ای غیر صفر $h[n]$ و $h[-n]$ تنها در $n=0$ همپوشانی دارند.

بنابراین

$$\mathcal{E}v\{h[n]\}=\frac{h[n]+h[-n]}{2}=\begin{cases}h[n]/2 & n>0\\ h[0] & n=0\\ h[-n]/2 & n<0\end{cases}$$

به عبارت دیگر

$$h[n]=\begin{cases}2\mathcal{E}v\{h[n]\} & n>0\\ \mathcal{E}v\{h[0]\} & n=0\\ 0 & n<0\end{cases} \qquad (\text{ح۱-۵,۵۲})$$

توجه کنید که اگر

$$h[n]\xleftrightarrow{FT}H\left(e^{j\omega}\right)$$

در اینصورت:

$$\varepsilon v\{h[n]\} = \frac{h[n]+h[-n]}{2} \xleftrightarrow{FT} \mathrm{Re}\{H(e^{j\omega})\}$$

واضح است که می توانیم $\varepsilon v\{h[n]\}$ را از $\mathrm{Re}\{H(e^{j\omega})\}$ وصول نمائیم. از $\varepsilon v\{h[n]\}$ می تـوانیم معادله (ح ۵,۵۲,۱) را برای وصول $h[n]$ اسـتفاده کنـیم. مشخـصاً، از $h[n]$ یکبـار دیگـر مـی تـوانیم $H(e^{j\omega})$ را بدست آوریم. بنابراین سیستم کاملاً توسط $\mathrm{Re}\{H(e^{j\omega})\}$ معلوم می شود.

ب) با گرفتن عکس تبدیل فوریه $\mathrm{Re}\{H(e^{j\omega})\}$؛ بدست می آوریم.

$$\varepsilon v\{h[n]\} = \delta[n] + \frac{a}{2}\delta[n-2] + \frac{a}{2}\delta[n+2]$$

بنابراین

$$h[n] = \delta[n] + a\delta[n-2]$$

,

$$H(e^{j\omega}) = 1 + a\,e^{-2j\omega}$$

ج) چون $h[n]$ کازال است، مقادیر نمونه های $h[n]$ و $h[-n]$ تنها در $t=\circ$ همپوشانی دارند.

بنابراین:

$$od\{h[n]\} = \frac{h[n]-h[-n]}{2}$$

$$= \begin{cases} h[n]/2 & n>\circ \\ \circ & n=\circ \\ -h[-n]/2 & n<\circ \end{cases}$$

به بیان دیگر:

$$h[n] = \begin{cases} \{h[n]\} & n>\circ \\ \text{هر مقداری} & n=\circ \\ \circ & n<\circ \end{cases} \qquad \text{ح(۵,۵۲,۲)}$$

حال، توجه داشته باشید که:

$$od\{h[n]\}=\frac{h[n]-h[-n]}{2}\xleftrightarrow{FT} j\ \mathrm{Im}\{H(e^{j\omega})\}$$

واضح است، $\mathrm{Im}\{H(e^{j\omega})\}$ را از $od\{h[n]\}$ وصول کنیم. از $od\{h[n]\}$ می توانیم معادله (ح۲-۵،۵۲) را برای وصول $h[n]$ استفاده کنیم. مشخصاً، از $h[n]$ یکبار دیگر می توانیم $H(e^{j\omega})$ را بدست آوریم. بنابراین سیستم کاملاً توسط $\mathrm{Im}\{H(e^{j\omega})\}$ معلوم می شود.

د) فرض کنیم $Sin\omega=\mathrm{Im}\{H(e^{j\omega})\}$. در اینصورت:

$$od\{x[n]\}=\tfrac{1}{2}\delta[n-1]-\frac{1}{2}\delta[n+1]$$

بنابراین:

$$h[n]=h[\circ]\delta[n]+\delta[n-1]$$

مقادیر مختلفی را برای $h[\circ]$ می توان انتخاب کرد تا دو سیستم مختلف که پاسخ فرکانسی قسمت های موهومی آنها برابر $Sin\omega$ بدست آورد.

۵،۵۳) یکی از دلایل رشد عظیم کاربرد روشهای گسسته در زمان برای تحلیل و طراحی سیگنالها و سیستمها پیشرفت ابزارهای کارآمد محاسبات تحلیل فوریهٔ سیگنالهای گسسته در زمان بوده است. قلب این روشها را روشی مرتبط با تبدیل فوریهٔ گسسته در زمان تشکیل می‌دهد که برای پیاده‌سازی روی کامپیوترهای دیجیتال و سخت‌افزارهای دیجیتال بسیار مناسب است. این روش تبدیل فوریهٔ گسسته DFT سیگنالهای $x[n]$ را سیگنالی را با عمر محدود فرض کنید، یعنی یک عدد صحیح N_1 وجود دارد، به نحوی که

$x[n]=\circ\ ,\ \circ\le n\le N_1-1$ در خارج فاصله

$X(e^{j\omega})$ را تبدیل فوریهٔ سیگنال $x[n]$ فرض کنید. می‌توانیم سیگنال متناوب $\tilde{x}[n]$ را به نحوی بسازیم که در یک تناوب با $x[n]$ برابر باشد. دقیقتر این که به ازای عدد صحیح N بزرگتر یا مساوی N_1، می‌توان $\tilde{x}[n]$ را با دوره تناوب N به نحوی ساخت که

$$x[n]=x[n]\quad ,\quad \circ\le n\le N_1-1$$

ضرائب سری فوریه $\tilde{x}[n]$ عبارت‌اند از

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\tilde{x}[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$$

فاصله جمع‌بندی را فاصله‌ای در نظر می‌گیریم که در آن $\tilde{x}[n]=x[n]$. پس

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\circ}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \qquad \text{(م ٥-٥٣-١)}$$

ضرائب تعریف شده با معادله (م ٥-٥٣-١) DFT سیگنال $x[n]$ را تشکیل می‌دهند. معمولاً DFT سیگنال $x[n]$ را با $\tilde{X}[k]$ نشان می‌دهند، و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنند.

$$\tilde{X}[k] = a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\circ}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n},\ k=\circ \text{ و } k=\circ, 1, \ldots, N-1 \qquad \text{(م ٥-٥٣-٢)}$$

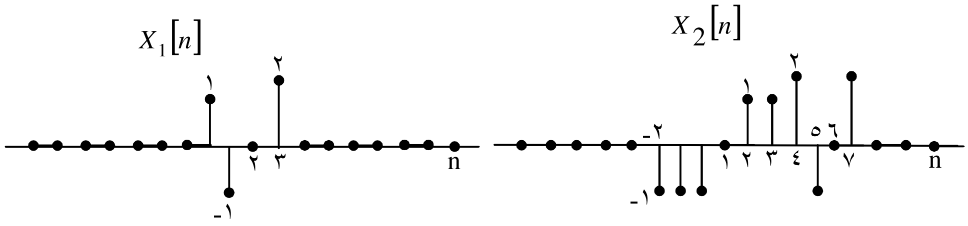
اهمیت DFT از چند جا ریشه می‌گیرد. اول این که سیگنال دارای عمر محدود اصلی را مـی‌تـوان از DFT بازسازی کرد. در واقع داریم.

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=\circ}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{jk(2\pi/N)n},\ n=\circ, 1, \ldots, N-1 \qquad \text{(م-٥-٥٣-٣)}$$

پس سیگنال دارای عمر محدود را می‌توان هم با مقادیر غیرصفر آن مشخص کرد و هم بـا مقـادیر $\tilde{X}[k]$ آن. اهمیت دیگر DFT در این است که الگوریتم بسیار سریعی، موسوم به تبدیل فوریـهٔ سـریع FFT برای محاسبه آن وجود دارد (این روش بسیار مهم در مسئله ٥-٥٤ معرفی شده است). همچنـین به خاطر رابطهٔ نزدیکی که بین سری فوریهٔ گسسته در زمان و تبدیل فوریه وجـود دارد، DFT برخـی خواص مهم آن را داراست.

(الف) فرض کنید $N \geq N_1$. نشان دهید که

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} X\left(e^{j(2\pi k/N)}\right)$$



شکل م ٥-٥٣

که در آن $\tilde{X}[k]$، DFT سیگنال $x[n]$ است. یعنـی DFT نمونـه‌هـای $X\left(e^{j\omega}\right)$، بـا فاصـله‌هـای $2\pi/N$ است. معادله (م ٥-٥٣-٣) ما را به این نتیجه رهنمون می‌شود که $x[n]$ را می‌تـوان بـه طـور یکتا از نمونه‌های $X\left(e^{j\omega}\right)$ باز یافت.

(ب) نمونه‌های $X\left(e^{j\omega}\right)$ به فاصله $2\pi / M$، با $M < N_1$، را در نظر بگیرید. این نمونه‌ها بیش از یک رشته به طول N_1 را تعیین می‌کند. برای نشان دادن این مطلب دو سیگنال $x_1[n]$ و $x_2[n]$ شکل م ٥-٥٣ را در نظر بگیرید. نشان دهید که به ازای $M = 4$ داریم.

$$X_1\left(e^{j(2\pi k/4)}\right) = X_2\left(e^{j(2\pi k/4)}\right)$$

حل:

(الف) معادله آنالیز تبدیل فوریه برابر است با:

$$x\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

با مقایسه با معادله (م٢-٥,٥٣) داریم:

$$\tilde{x}\{k\} = \frac{1}{N} x\left(e^{j(2\pi k/N)}\right)$$

,

$$x_2\left(e^{j\omega}\right) = -e^{-2j\omega} - e^{-2j\omega} + e^{-3j\omega} + 2e^{-j4\omega} - e^{-j5\omega} + 2e^{j}$$

حال:

$$x_1\left(e^{j\left(2\pi k/4\right)}\right) = 1 - e^{-j\pi k/2} + 2e^{-3j\pi k/2}$$

,

$$x_2\left(e^{j\left(2\pi k/4\right)}\right) = 1 - e^{-j\pi k/2} + 2e^{-3j\pi/2} = x_1\left(e^{j\left(2\pi k/4\right)}\right)$$

٥,٥٤) همان‌طور که در مسئله ٥-٥٣ گفتیم مسائل بسیاری با ا همیت وجود دارد که مستلزم محاسبه تبدیل فوریهٔ گسسته (DFT) سیگنالهای گسسته در زمان است. این سیگنالها غالباً عمر طولانی دارند و در این موارد باید روشهای محاسباتی کارآمدی به کار بُرد. یکی از دلایل رشد قابل توجه به کار بردن تکنیکهای کامپیوتری در تحلیل سیگنالها، پی‌ریزی روش محاسباتی سریعی موسوم به الگوریتم تبدیل فوریه سریع FFT است. با این روش می‌توان DFT سیگنالهای دارای عمر محدود را پیدا کرد. در این مسئله اصول الگوریتم FFT را بررسی می‌کنیم.

$x[n]$ را سیگنالی فرض کنید که در خارج از فاصله $0 \le n \le N_1 - 1$ صفرست. به ازای $N \ge N_1$، N DFT- نقطه‌ای $x[n]$ عبارت است از

$$\tilde{X}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{N-1} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}, k=\circ, 1, \dots, N-1 \qquad (م ٥-٥٤-١)$$

بهترست معادله (م ٥-٥٤-١) را به صورت زیر بنویسیم.

$$\tilde{X}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{N-1} x[n]W_N^{nk} \qquad (م ٥-٥٤-٢)$$

(الف) یک روش محاسبه $\tilde{X}[k]$، محاسبه مستقیم معادله (م ٥-٥٤-٢) است. تعداد ضرهای مختلط لازم برای محاسبه (م ٥-٥٤-٢)، معیار خوبی از پیچیدگی محاسبه ناست. نشان دهید که تعداد ضرهای لازم برای مختلط است و W_N^{nk} قبلاً محاسبه و در جدولی ذخیره شده است. برای آسانی، از اینکه به ازای مقادیر خاصی از n و k، W_N^{nk} برابر ± 1 یا $\pm j$ است و در حقیقت ضرب مختلط کامل لازم نیست، چشم بپوشید.

(ب) N را زوج بگیرید. فرض کنید $f[N]=x[2n]$ نمونه‌های شماره زوج $x[n]$ و $g[n]=x[2n+1]$ نمونه‌های شماره فرد $x[n]$ است.

(i) نشان دهید که $g[n]$ و $f[n]$ خارج از فاصله $\circ \le n \le (N/2)-1$ برابر صفرند.

(ii) نشان دهید که N DFT- نقطه‌ای $x[n]$ را می‌توان به صورت زیر بیان صفرند.

$$\tilde{X}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{(N/2)-1} f[n]W_{N/2}^{nk}+\frac{1}{N}W_{N/2}^{nk}\sum_{n=\circ}^{(N/2)-1} g[n]W_{N/2}^{nk}$$

$$=\frac{1}{2}\tilde{F}[k]+\frac{1}{2}W_N^{nk}\ \tilde{G}[k], k=\circ, 1, \dots, N-1 \qquad (م ٥-٥٤-٣)$$

که در آن

$$\tilde{F}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{(N/2)} f[n]W_{N/2}^{nk}$$

$$\tilde{G}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{(N/2)} g[n]W_{N/2}^{nk}$$

دقت کنید که $\tilde{F}[k]$ با $k=\circ,\circ,1,\dots\ N/2-1$ و $\tilde{G}[k]$ با $k=\circ,1,\dots,N/2-1$ به ترتیب $N/2$ DFT − نقطه ای $f[n]$ و $g[n]$ هستند. بنابراین معادله (م ٥-٥٤-٣) نشان می‌دهد که N DFT − نقطه‌ای $x[n]$ را می‌توان برحسب دو $N/2$ DFT − نقطه‌ای به دست آورد.

(iv) تعداد ضربهای مختلط لازم برای محاسبه $\widetilde{X}[k]$ با $k=\circ\,,1\,,.\,,N-1$، از معادلـه (م ٥-٥٤-٣) چقدر است؟ [از فرضهای بند (الف) استفاده کنیـد و ضـرب در $\frac{1}{2}$ را در معادلـهٔ (م ٥-٥٤-٣) حساب نکنید].

(ج) اگر $N/2$ هم زوج باشد، می‌توان $f[n]$ و $g[n]$ را باز هم به نمونه‌های شـماره زوج و فـرد تجزیه کرد و DFT آنها را به روشی شبیه معادله (م ٥-٥٤-٣) محاسبه کـرد. بـه عـلاوه اگـر N تـوان صحیحی از ٢ باشد، می‌توان با ادامه این فرآیند، وقت زیادی در محاسبات صرفه جـویی کـرد. در ایـن صورت به ازای ٤٠٩٦ و ١٠٢٤، ٢٥٦، ٣٢= N تقریباً چند ضرب مختلط لازم است؟ نتیجه را بـا روش مستقیم بند (الف) مقایسه کنید.

حل:

الف) از معادله (م١-٥،٥٤) واضح است که برای محاسبه $\widetilde{x}\{k\}$ برای مقدار ویژه k، لازم است که ضرب مختلط N را انجام دهیم. بنابراین به منظـور محاسـبه $\widetilde{X}[k]$ بـرای N مقـادیر مختلـف k، لازم است ضرب مختلط $N.N=N^2$ را انجام دهیم.

ب) (i) چون $f[n]=x[2n]$، داریم: $f[\circ]=x[\circ]$ ، $f[1]=x[2]$ و ... و $f\left(N/2\right)\{-1\}=x[N-2]$. بدلیل اینکه $x[n]$ تنهـا دربـاره $\circ\le n\le N-1$ غیـر صـفر اسـت، $f[n]$ تنها در بازه $\circ\le n\le\left(N/2\right)-1$ غیر صفر است.

به طور مشابه، بدلیل اینکه $g[n]=x[2n+1]$، داریم: $g[1]=x[3], g[\circ]=x[1]$ و ...

و $g\{[N/2]-1\}=x[N]$. بدلیل اینکه $x[n]$ تنها در بازه $\circ\le n\le N-1$ غیر صفر است.

$g[n]$ در بازه $\circ\le n\le\frac{N}{2}-1$ غیر صفر است.

(ii) معادله (١-٥،٥٤) را به صورت زیر می توان بازنویسی کرد:

$$\widetilde{x}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{\left(N/2\right)-1}x[2x]W_N^{2nk}+W_N^K\,\frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{N/2-1}x[2n+1]\times W_N^{2nk}$$

بدلیل اینکه $W_N^{2nk}=W_{N/2}^{2nk}$ می توانیم معادله بالا را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\widetilde{x}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{N/2-1}f[n]W_{N/2}^{nk}+W_n^k\,\frac{1}{N}\sum_{n=\circ}^{\left(N/2\right)-1}g[n]W_{N/2}^{nk}$$

(S٥,٥٤-١)

(iii) داریم:

$$\widetilde{F}\left[k+\frac{N}{2}\right]=\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)} f[n]W_{N/2}^{kn}=\widetilde{F}[k]$$

به طور مشابه

$$\widetilde{G}\left[k+N/2\right]=\widetilde{G}[k]$$

(iv) چون $\widetilde{F}[k]$ یک نقطه $\frac{N}{2}$، برای DFT است، می توانیم از روش مشابه آنچه در قسمت (الف) آمده استفاده کنیم تا نشان دهیم که به ضرب مختلط $\frac{N^2}{4}$ برای محاسبه آن نیاز داریم. به طور مشابه می توانیم نشان دهیم که محاسبه $\widetilde{F}[k]$ به ضرایب $\frac{N^2}{4}$ نیاز دارد.

از معادله (ح۱-٥,٥٤) بدیهیست که به ضرب مختلط $\frac{N^2}{2}+N$ برای محاسبه $\widetilde{X}[K]$ نیاز داریم.

ج) با تجزیه $g[n]$ و $f[n]$ به نمونه های اندیس زوج و فرد، می توانیم با فراهم ساختن عدد محاسباتی به $\frac{N^2}{4}+N/2$ این تجزیه را به اندازه $\log_2^N$ تکرار کنیم. محاسبات لازم برای $N\log_2^N$ بار انجام می دهیم. جدول محاسباتی زیر با استفاده از دو روش مستقیم و FFT برای مقادیر مختلف N ترتیب داده ایم:

N	روش مستقیم	روش FFT
۳۲	۱۰۲٤	۱٦۰
۲٥٦	٦٥٥۳٦	۲۰٤۸
۱۰۲٤	۱۰٤۸٥۷٦	۱۰۲٤۰
٤۰۹٦	۱٦۷۷۷۲۱٦	٤۹/٥۲

٥,٥٥) در این مسئله مفهوم قاب کردن را، که هم در طراحی سیستمهای LTI و هم در تحلیل طیفی سیگنالها اهمیت بسزایی دارد معرفی می‌کنیم: منظور از قاب کردن، ضرب سیگنال $x[n]$ در سیگنال دارای عمر محدود $w[n]$، موسوم به سیگنال قاب است یعنی

$$p[n]=x[n]w[n]$$

دقت کنید که $p[n]$ هم عمر محدود دارد.

اهمیت قاب کردن در تحلیل طیفی از اینجا ریشه می‌گیرد که در کاربردهای بسیاری لازم است ک تبدیل فوریهٔ یک سیگنال اندازه‌گیری شده حساب شود. چون در عمل تنها می‌توان $x[n]$ را در یک فاصله محدود (**پنجره زمانی**) اندازه گرفت، سیگنال قابل دسترس برای تحلیل فوریه عبارت است از

$$p[n]=\begin{cases}x[n], & -M\le n\le M\\ \circ, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

که در آن $-M\le n\le M$ قاب یا پنجره زمانی است. بنابراین

$$p[n]=x[n]w[n]$$

که $w[n]$ قاب یا پنجرهٔ مستطیلی است؛ یعنی

$$p[n]=\begin{cases}1, & -M\le n\le M\\ \circ, & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

قاب کردن در طراحی سیستمهای LTI هم نقش مهمی بازی می‌کند. به دلایل مختلف (مثلاً توانایی به کار بردن الگوریتم FFT، مسئله ٥-٥٤ را ببینید) بهتر است برای انجام پردازش موردنظر سیستمی طراحی کنیم که پاسخ ضربهٔ محدودی داشته باشد. به عبارت دیگر معمولاً از پاسخ فرکانسی مطلوب $H(e^{j\omega})$ شروع می‌کنیم که عکس تبدیل فوریه آن، یعنی پاسخ ضربهٔ $h[n]$ عمر نامحدودی (یا حداقل بسیار طولانی) دارد. باید یک پاسخ ضربه محدود $g[n]$ طراحی کنیم که تبدیل فوریهٔ $G(e^{j\omega})$ آن تقریب مناسبی از $H(^{j\omega})$ باشد. یک روش کلی انتخاب $g[n]$، یافتن یک تابع قاب $w[n]$ مناسب است، به نحوی که $[h\ n]w[n]$ مشخصات دلخواه $G(e^{j\omega})$ را برآورد کند.

مسلّم است که قاب کردن سیگنال بر طیف آن اثر می‌گذارد. در این مسئله، این اثرها را بررسی می‌کنیم.

(الف) برای درک اثر قاب کردن، سیگنال زیر

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-k]$$

را با پنجرهٔ مستطیلی معادله (م ٥-٥٥-١) قاب می‌کنیم.

(i) $X(e^{j\omega})$ را بیابید.

(ii) تبدیل فوریهٔ $p[n]=x[n]w[n]$ را به ازای $M=1$ رسم کنید.

(iii) بند پیش را به ازای $M=10$ تکرار کنید.

(ب) حال سیگنالی با تبدیل فوریهٔ زیر در نظر بگیرید.

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1\ , & |\omega|<\pi/4\\ \circ\ , & \pi/4<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

فرض کنید $p[n]=x[n]w[n]$ ، که $w[n]$ پنجره مستطیلی معادلـه (م ٥-٥-١) اسـت. $P\left(e^{j\omega}\right)$ را به طور تقریبی، به ازای ١٦، ٨، ٤ = M رسم کنید.

(ج) یکی از مشکلات استفاده از پنجره مستطیلی ایجاد تموج در تبدیل $P\left(e^{j\omega}\right)$ است. (این تموج با پدیدهٔ گیبس مرتبط است.) به همین علت سیگنالهای پنجره دیگری پی‌ریزی شده است. این سیگنالها به تدریج از ٥ به ١ می‌رسند، نه مثل پنجرهٔ مستطیلی که گذر آن ناگهانی است. اثر این تـدرّج، کـاهش دامنهٔ تموج $P\left(e^{j\omega}\right)$ است که بـه قیمـت افـزایش انـدکی اعوجـاج و همـوارتر شـدن $X\left(e^{j\omega}\right)$ تمـام می‌شود.

برای روشن کردن نکات فوق، سیگنال $x[n]$ بند (ب) را با پنجره مثلثی یا بارتلت زیر

$$w[n]=\begin{cases}1-\dfrac{1-|n|}{M+1} & ,\quad -M\le n\le M\\ \circ & ,\quad \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

در نظر بگیرید و فرض کنید $p[n]=x[n]w[n]$. تبدیل فوریه $p[n]$ را به ازای ١٦، ٨، ٤= M، به طور تقریبی رسم کنید [راهنمایی: توجه کنید که سیگنال مثلثی، حاصل کانولوشن سیگنال مـستطیلی بـا خودش است. با توجه به این مطلب عبارت مناسبی برای $W\left(e^{j\omega}\right)$ به دست آورید.]

(د) فرض کنید $p[n]=x[n]w[n]$ سیگنال کسینوسی بالا رفته موسـوم بـه پنجـره هنینـگ اسـت؛ یعنی

$$w[n]=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[1+\cos(\pi n/M)\right], & -M\le n\le M\\ \circ & ,\quad \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

$P\left(e^{j\omega}\right)$ را به ازای ١٦، ٨، ٤ = M به طور تقریبی رسم کنید.

حل:

الف) (i)

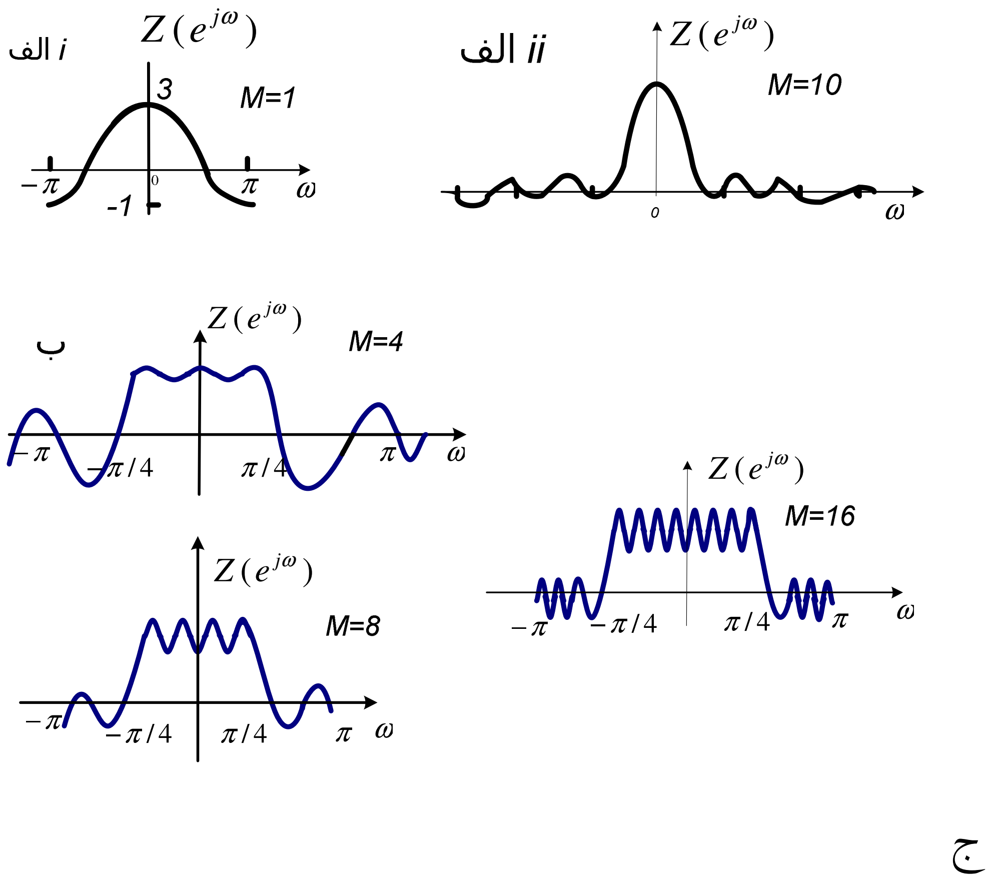
$$x\left(e^{j\omega}\right)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

(ii) وقتی $M=10$ می توانیم از جدول ۵,۲ برای پیدا کردن اینکه

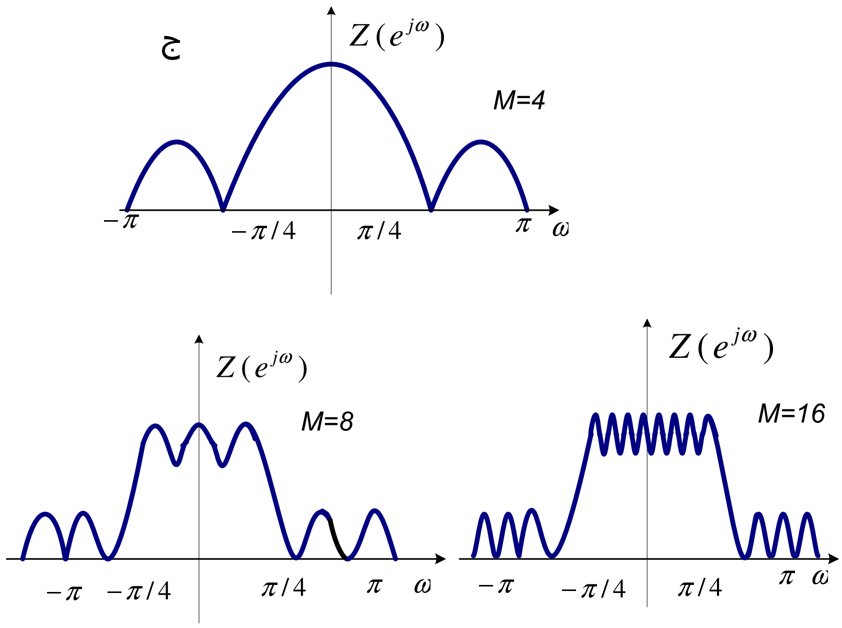
$$p\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Sin\left(2/\omega/2\right)}{\omega/2}$$

استفاده کنیم.

ب) طرحها در شکل ح۵,۵۵. نشانداده شده اند.

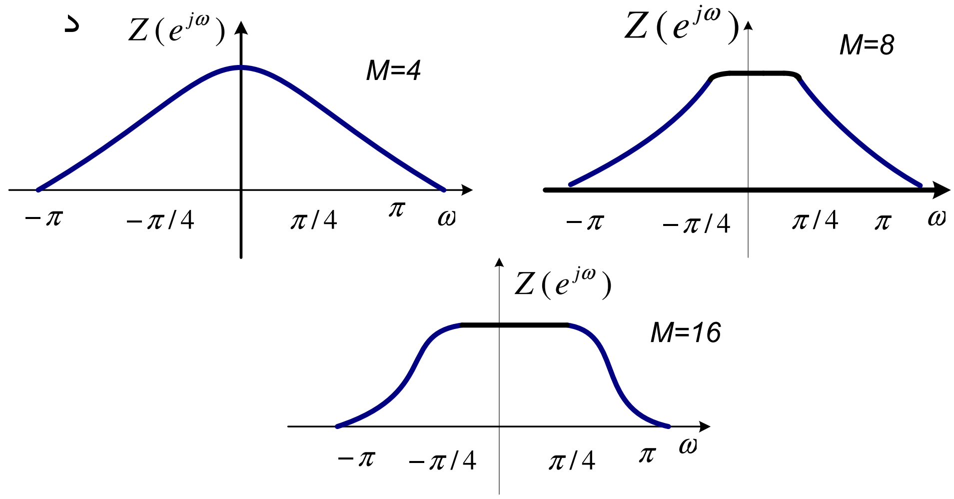


ج



$Z(e^{j\omega})$
M=4
M=8
M=16
$-\pi$
$-\pi/4$
$\pi/4$
π
ω

د)



د
$Z(e^{j\omega})$
M=4
M=8
M=16
$-\pi$
$-\pi/4$
$\pi/4$
π
ω

شكل ح٥,٥٥.

ج) داریم $W\left(e^{jw}\right)=\dfrac{Sin^2\left[(M+1)\omega/2\right]}{Sin^2\left(\omega/2\right)}$. طرحها در شکل ح٥,٥٥ نشان داده شده اند.

د) طرحها در شکل ح٥,٥٥. نشان داده شده اند.

٥,٥٦) $x[m,n]$ سیگنالی با دو متغیر مستقل گسسته m و n است. به قیاس سیگنال یک بعدی و حالت پیوسته در زمان بیان شده در مسئله ٤-٥٣، می‌توانیم تبدیل فوریه دوبعدی $x[m,n]$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$X^{\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[m,n]e^{-j(\omega_1 m+\omega_2 n)} \qquad \text{(م ٥-٥٦-١)}$$

(الف) نشان دهید که می‌توانیم معادله (م ٥-٥٦-١) را به صورت دو تبدیل فوریهٔ یک بعدی حساب کنیم، یعین ابتدا n را ثابت بگیریم و جمع را برحسب m محاسبه کنیم و سپس محاسبه را برحسب n انجام دهیم، با استفاده از این نتیجه $x[m,n]$ را برحسب $X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)$ به دست آورید.

(ب) فرض کنید $x[m,n]=a[m]b[n]$

که در آن $a[m]$ و $b[n]$ توابع یک متغیره‌اند. تبدیل فوریهٔ این دو سیگنال به ترتیب $A\left(e^{j\omega}\right)$ و $B\left(e^{j\omega}\right)$ است. $X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)$ را برحسب $A\left(e^{j\omega}\right)$ و $B\left(e^{j\omega}\right)$ بیان کنید.

(ج) تبدیل فوریه دو بعدی سیگنالهای زیر را پیدا کنید.

(i) $x[m,n]=\delta[m-1]\delta[n+4]$

(ii) $x[m,n]=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-m}u[n-2]u[-m]$

(iii) $x[m,n]=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\cos(2\pi m/3)u[n]$

(iv) $x[m,n]=\sin\left(\dfrac{\pi n}{3}+\dfrac{2\pi n}{5}\right)$

(د) سیگنال $x[m,n]$ با تبدیل فوریه زیر را بیابید

$$X\left(e^{j\omega_1},e^{j\omega_2}\right)=\begin{cases}1, & |\omega_1|\le\pi/4\ ,\ |\omega_2|\le\pi/2\\ \circ, & \pi/4<|\omega_1|\le\pi \ \text{یا}\ \pi/2<|\omega_2|\le\pi\end{cases}$$

(هـــ) $x[m,n]$ و $h[m,n]$ دو ســـیگنال بـــا تبـــدیل فوریـــه دو بعـــدی $X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right)$ و $H\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right)$ هستند. تبدیل سیگنالهای زیر را برحسب $X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right)$ و $H\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right)$ بیـان کنید:

(i) $x[m,n]e^{jW_1 m}e^{jW_2 n}$

(ii) $y[m,n]=\begin{cases} x[k,r], & n=3r,\ m=2k \quad \text{اگر} \\ 0, & \text{در صورتی که m مضرب ۲ و n مضرب ۳ نباشد} \end{cases}$

(iii) $y[m,n]=x[m,n]h[m,n]$

حل:

الف) داریم:

$$X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m,n]e^{-j(\omega_1 m+w_2 n)}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m,n]e^{-j\omega_1 m}\right]e^{-j\omega_2 n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(e^{j\omega_1}, n\right)e^{-j\omega_2 n}$$

بنابراین، می توانیم بنویسیم:

$$X\left(e^{j\omega_1}, n\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right)e^{j\omega_2 n}d\omega_2$$

ازاین رابطه داریم:

$$x[m,n]=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right)e^{j\omega_1 m}e^{j\omega_2 n}d\omega_1 d\omega_2$$

ب) به سادگی می توان نشان داد که:

$$X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right)=A\left(e^{j\omega}\right)B\left(e^{j\omega}\right)$$

(ج) از نتیجه قسمت قبلی در چند مسئله این قسمت استفاده می کنیم:

(i) $X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right)=e^{-j\omega_1}e^{j\omega_2}$

(ii) $X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right)=\left[\dfrac{e^{-j2\omega_2}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega_2}\right)}\right]\left[\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega_1}}\right]$

(iii)
$$X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right) = \left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega_2}}\right]\left[\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega_1 - \frac{2\pi}{3} - 2\pi k\right)\right]$$
$$+\pi\sum_{K=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega_1 + \frac{2\pi}{3} - 2\pi k\right)$$

(iv) در اینجا $x[n,m] = \{u[m+1] - u[m-2]\}\{u[n+4] - u[n-5]\}$

$$X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right) = \left[\frac{Sin\left(7\omega_2/2\right)}{Sin\left(\omega_2/2\right)}\right]\left[\frac{Sin\left(3\omega_1/2\right)}{Sin\left(\omega_1/2\right)}\right]$$

(v) از تعریف تعریف تبدیل فوریه ۲D (دو بعدی) داریم:

$$X\left(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}\right) = \frac{\pi}{j}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[\delta\left(\omega_1 - \frac{2\pi}{5} + 2\pi l\right)\delta\left[\omega_2 - \frac{\pi}{3} - 2\pi r\right]\right]$$
$$-\delta\left[\omega_1 + \frac{2\pi}{5} + 2\pi l\right]\delta\left[\omega_2 + \frac{\pi}{3} + 2\pi r\right]$$

د) (i) $x\left(e^{j(\omega_1 - w_1)}\right), e^{j(\omega_2, W_2)}$

(ii) $x\left(e^{2\omega_1}, e^{3\omega_2}\right)$

(iii) $\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{[j]}, e^{j\theta}\right)H\left(e^{j(\omega_1 - j)}, e^{j(\omega_1-\theta)}d\right]d\theta$