

Determination of Stress Intensity Factors in a Half-plane with edge crack which is subjected to an Unsymmetrical tilted wedge and its effective Parameters by Numerical Method and Comparison of Results with Analytical Solution

تعیین ضرایب شدت تنش در نیم صفحه بینهایت تحت تاثیر گوه نامتقارن با استفاده از روش عددی و بررسی برخی پارامترهای موثر بر مسئله و مقایسه با حل تحلیلی

دانیال قهرمانی مقدم (دانشجوی دکتری، دانشگاه فردوسی مشهد)

Email: d.g.moghadam@gmail.com

ناصر سلطانی (دکتر، استاد، دانشگاه تهران)

n.soltani@ut.ac.ir

هادی صنعتی، ابوالقاسم محمدپور، سید علی گله داری

ali_ila84@yahoo.com, Hadi.sanati@yahoo.com

چکیده

تعیین ضرایب شدت تنش یکی از پارامترهای مهم در مکانیک شکست می باشد. یکی از هندسه های رایج در ارزیابی مسائل مکانیک شکست بررسی تماس گوه با صفحه نیمه بینهایت دارای ترک است که در این مقاله تماس گوه نامتقارن بررسی شده است. برای تعیین میدان تنش در نوک ترک از روش اجزاء محدود و نرم افزار ABAQUS استفاده شده و همچنین ضرایب شدت تنش بر اساس روابط موجود در مراجع مکانیک شکست برای موارد مختلف محاسبه شده است. در ادامه نتایج حاصل از حل عددی با نتایج حل تحلیلی و تجربی موجود مقایسه شده و درستی نتایج را تایید می کند و سپس تاثیر اندازه ترک و تاثیر فاصله گوه از نوک ترک روی ضرایب شدت تنش بررسی شده است. سرانجام نتایج نشان می دهد که در این مورد مد اول شکست صفر و فقط مد دوم شکست موجود است .

کلمات کلیدی

ضرایب شدت تنش، نیم صفحه بینهایت، گوه نامتقارن، حل عددی، اجزا محدود

یکی از مراحل برخورد با مسئله خستگی سایشی، حل مسئله تماس بین دو جسم و بدست آوردن ضریب شدت تنش برای ترک موجود در محل تماس می باشد. برای این مرحله، چندین روش برخورد وجود دارد. روش تجربی و اندازه گیری از طریق آزمایش، روش تحلیلی و محاسبه از طریق انجام عملیات ریاضی و بالاخره محاسبه به روش عددی از روشهای موجود می باشند. برای انجام محاسبات از روش عددی نیز روشهای بسیاری موجود می باشد که روش اجزای محدود یکی از آنها می باشد. مزیت روش اجزای محدود نسبت به سایر روشها را میتوان بصورت زیر در نظر گرفت:

- حداقل بودن زمان محاسبه نسبت به سایر روشها
- کمتر بودن هزینهها نسبت به روشهای تجربی
- در دسترس بودن و قابلیت استفاده گسترده در زمینههای مختلف
- قابلیت کار بر روی هندسههای پیچیده
- بهترین گزینه برای استفاده صنعتی

همانطور که میدانیم در کاربردهای معمولی در صنایع مختلف، استفاده از یک نرم افزار رایج و گرفتن نتایج قابل قبول اولین گزینه می باشد. در همین راستا در این مقاله سعی شده است یک مسئله تماس بین گوه با نیم فضا با وجود ترک حل شده و نتایج آن با روش تحلیلی موجود مقایسه شود. حل این مسئله میتواند گامی کوچک در ارتقای کاربرد روش اجزای محدود در اینگونه مسائل باشد.

کارهایی که قبلا در زمینه مسائل خستگی سایشی به کمک روش اجزای محدود انجام شده اند را میتوان در دسته بندیهای مختلفی مشاهده کرد.

دسته اول شامل مسائلی هستند که با روشهای معمولی هندسههای جدید و بعضا پیچیده مدل شده است. بعنوان مثال در [3] هندسه دو چرخنده در تماس با یکدیگر مدل شده است. در اینگونه مسائل کمتر وجود ترک در نظر گرفته شده است و تمرکز اصلی بر روی بدست آوردن توزیع تنش می باشد.

دسته دوم مسائلی هستند که در آنها تمرکز اصلی بر روی محاسبه ضریب شدت تنش می باشد. در اینگونه مسائل هندسه ساده و در بیشتر آنها تنش تماسی با یک فشار سطحی بصورت شرایط مرزی تعویض می شود. به عنوان نمونه میتوان به [4] اشاره کرد که در آن در یک هندسه ساده تاثیر اندازه بررسی شده است. در این مسائل نیز از نرم افزارهای اجزای محدود معمول استفاده می شود.

دسته سوم مسائلی هستند که برای ارتقای روش اجزای محدود تعریف شده اند و هدف از آنها ایجاد المانهای جدید، نرم افزارهای جدید و حتی روشهای جدید در روش اجزای محدود می باشد. بعنوان نمونه از این دسته مسائل میتوان به [5 و 6 و 7 و 8] اشاره کرد.

مسئله‌ای که در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد را میتوان در دسته دوم جای داد. در این گروه مقالات بسیاری موجود است و روی هندسه‌های مختلفی کار شده است. اما نکته‌ای که به آن کم پرداخته شده است، مسائل تماس با وجود لبه تیز (مانند گوه) می‌باشد. برای هندسه‌هایی نظیر تماس نیم صفحه با استوانه، کره، پانچ، نیروی متمرکز و نیروی گسترده مقالات بیشماری موجود می‌باشد که از جمله آنها میتوان به [9 و 10 و 11 و 12] اشاره کرد. اما به دلیل ضعف مراجع در این هندسه خاص این مسئله برای بررسی در این مقاله در نظر گرفته شده است و مسئله تماس بین یک گوه نامتقارن با یک نیم صفحه بینهایت دارای ترک مورد بررسی قرار گرفته است.

2. حل تحلیلی

1.2. تماس یک گوه نامتقارن با یک نیم صفحه بی نهایت [11]

شکل (1) مسئله تماس بین یک گوه مایل و نیم فضا را نشان می‌دهد، با توجه به این که تنها بار عمودی p بر مسأله اعمال می‌شود، معادله انتگرالی منفرد حاکم بر مسأله، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{p} \int_L \frac{p(z)}{x-z} dz \quad (1)$$

در رابطه ی بالا A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A = \frac{k_1 + 1}{4m_1} + \frac{k_2 + 1}{4m_2} \quad (2)$$

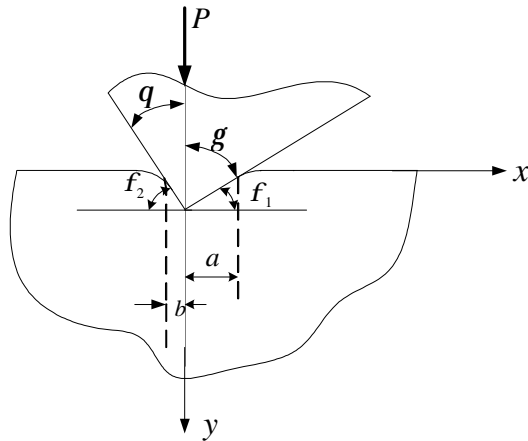
که در آن $k_i = 3 - 4m_i$ در حالت کرنش صفحه‌ای و $k_i = \frac{3 - n_i}{1 + n_i}$ در حالت تنش صفحه‌ای می‌باشد و L نشان‌دهنده

طول ناحیه برخورد می‌باشد. همچنین m_i, n_i ضریب پواسون و مدول برشی جزء i -ام می‌باشند ($i = 1, 2$). $h(x)$ تابع همپوشانی عمودی¹ می‌باشد و میتوان آنرا به صورت زیر تعریف کرد:

$$h(x) = n_2 - n_1 \quad (3)$$

n_1 و n_2 مؤلفه‌های جابجایی زمینه در حالت عمودی اند. در نهایت با استفاده از یکسری معادلات و ساده‌سازی روابط، بدست می‌آید:

$$p(x) = -\frac{f_1 + f_2}{pA} \operatorname{Ln} \left| \frac{a^2 - z^2 + zx + \sqrt{a^2 - z^2} \sqrt{a^2 - (x-z)^2}}{a} \right| \quad (4)$$



شکل ۱: مسئله تماس بین یک گوه مایل و نیم فضا

رابطه فوق، تابع توزیع فشار نرمال شده² بر حسب مختصات x را در طول ناحیه تماس بدست می‌دهد.

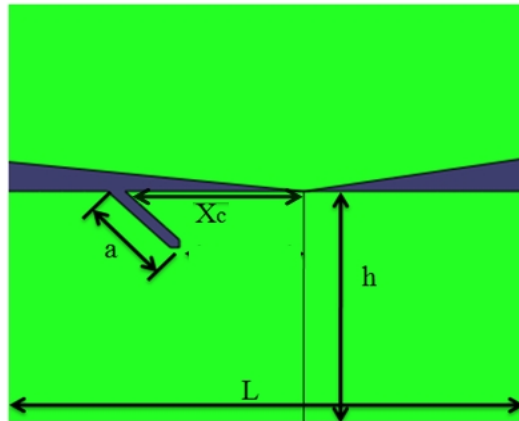
3. حل عددی مسئله

3.1. روش حل مسئله

مسئله برای حالت کرنش صفحه ای و تنش صفحه ای حل شد مقایسه نتایج این دو تحلیل برای فشار تماسی نشان می‌دهد که بین نتایج اختلاف کمی وجود دارد. در بررسی های بعدی از تاثیرات ضخامت صرفنظر شده و مسائل بصورت دوبعدی و در حالت کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده‌اند.

3.2. هندسه

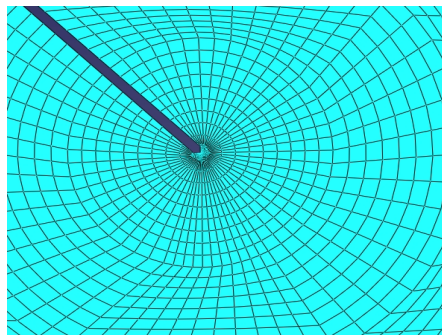
برای حل این مسئله هندسه‌ای به شکل زیر (شکل 2) در نظر گرفته شده است. L, h عرض و طول صفحه، a طول ترک و X_c فاصله ابتدای ترک از نوک گوه می‌باشد، در ضمن اندازه دهانه ترک $0/2$ میلیمتر در نظر گرفته شده است، برای اندازه های $0/1$ و $0/15$ میلیمتر نیز مسئله بررسی شده است و در نتایج اختلاف کمی مشاهده شد. با توجه به اینکه در این مسئله فرض بر نامحدود بودن صفحه می‌باشد، ابعاد صفحه (L, h) بگونه‌ای انتخاب شده‌اند تا تاثیری در نتیجه نداشته باشند. برای انتخاب (L, h) یک مسئله تماس بین گوه و صفحه با ابعاد مختلف (L, h) حل شده‌است. و این نتیجه حاصل شد که ابعاد 120×60 میلیمتر ابعاد بهینه برای این مسئله می‌باشد و افزایش ابعاد صفحه تاثیری بر مقادیر تنش در ناحیه تماس مورد بررسی نخواهد داشت و علاوه بر آن زمان حل مسئله نیز افزایش خواهد یافت که مطلوب نیست.



شکل 2: هندسه مورد نظر

3.3 . شبکه

با توجه به این موضوع که این مسئله دوبعدی می باشد، برای شبکه بندی صفحات از دو نوع شبکه مثلثی و چهارضلعی می توان استفاده کرد. همواره شبکه مربعی نسبت به شبکه مثلثی از دقت بهتری برخوردار می باشد لذا در این تحلیل همواره از شبکه مربعی استفاده شده است. برای تعیین اندازه شبکه در ناحیه تماس، یک مسئله تماس با چندین اندازه شبکه مختلف حل شده است و این نتیجه حاصل شد که برای اجزایی با اندازه 0/2 میلیمتر پاسخها نزدیک به یکدیگر و مطلوبند و با افزایش اندازه اجزاء پاسخ ها بزرگتر شده و از یکدیگر دور می شوند، بنابراین طول بهینه اجزاء 0/2 میلیمتر در نظر گرفته می شود، و نیز نوع شبکه در نوک ترک ریزتر و در این ناحیه از اجزای تکین استفاده شده است تا از بینهایت شدن تنش در این نقطه دوری شود نمونه ای از شبکه بندی در نوک ترک در شکل (3) نشان داده شده است.



شکل 3: شبکه بندی در نوک ترک

4.3. انتخاب اجزاء

برای حل این مسئله از اجزاء تماسی مختلف استفاده می شود:
در نرم افزار ABAQUS سه روش برای مدلسازی تماس وجود دارد:

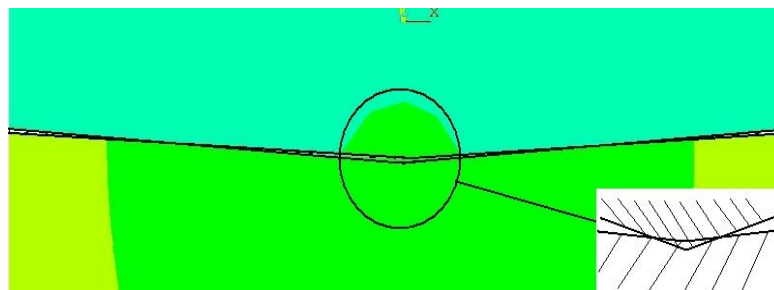
- تماس گره با گره
- تماس گره با سطح
- تماس سطح با سطح

در تماس سطح با سطح، دو سطح اجزاء تشکیل قسمت تماسی را می دهند. در این نوع تماس بر خلاف تماس گره با گره نیازی به تطابق گره‌های دو سطح نیست. در این نوع تماس قابلیت لغزش هم وجود دارد اما سرعت حل در این نوع تماس از حالت گره با سطح بیشتر است.

با توجه به اینکه تطابق گره‌ها بین سطح صاف از صفحه و گوهی دارای زاویه امکان پذیر نیست، از حالت گره با گره نمی توان استفاده کرد. همچنین به دلیل داشتن سرعت حل بهتر در این مسئله از مدل تماس سطح به سطح استفاده شده است.

3.5. تماس گوه با صفحه

با توجه به وجود نقطه تکیه در نوک گوه و بوجود آمدن تمرکز تنش، این مسئله دارای پیچیدگی است. در شکل (4) یک نمونه از مسئله تماس گوه با صفحه بعد از تغییر شکل نشان داده شده است.



شکل 4: مسئله تماس گوه با صفحه بعد از تغییر شکل

یکی از نکات مهم که در شکل (4) مشاهده می شود، نفوذ گوه به داخل صفحه می باشد که باعث بروز خطا در محاسبات خواهد شد. با کوچک کردن اجزاء و منطبق نمودن اجزای گوه با اجزای سطح صفحه، نفوذ کنترل شده و دقت جواب افزایش زیادی خواهد داشت.

4. نتایج حل عددی و مقایسه با حل تحلیلی و تجربی

در ادامه مسئله تماس گوه نا متقارن با نیم صفحه بی نهایت دارای ترک برای مسئله با مشخصات جدول (1) حل شده است.

مهمترین پارامتری که در حل مسئله خستگی مطرح است، ضریب شدت تنش می باشد. با داشتن این پارامتر می توان عمر یک قطعه را تعیین کرده و آن را طراحی کرد. برای مسئله نمونه مطرح شده در جدول (1) مقدار ضریب شدت تنش بصورت جدول (2) می باشد.

با توجه به نتایجی که در جدول 2 آمده است می توان از نتایج حل عددی اطمینان حاصل نمود. مشاهده می شود که حل عددی با حل تحلیلی [1] تقریباً 7 درصد و با حل تجربی [2] تقریباً 17 درصد اختلاف دارد، بنابراین می توان دریافت که نتایج حل عددی قابل اطمینان بوده و مدلسازی اجزا محدود مناسب می باشد و همچنین نتایجی که در قسمت های بعد به دست آمده است قابل اطمینان بوده و اختلاف کمی بین نتایج عددی با حل های تحلیلی و تجربی وجود خواهد داشت.

جدول 1: مشخصات مسئله

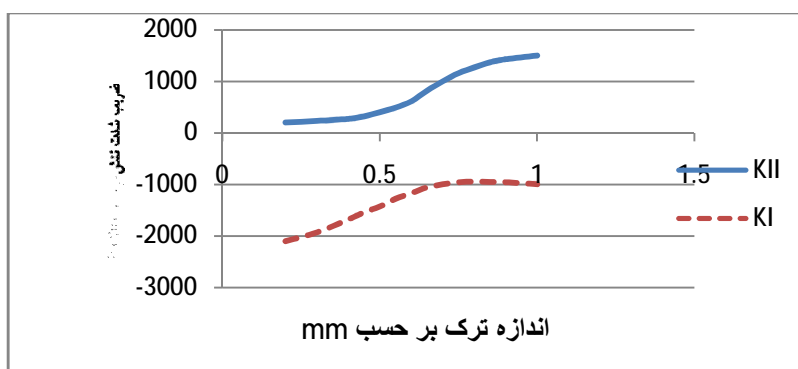
واحد	اندازه	پارامتر
درجه	1/5	زاویه نیمساز گوه با خط عمود
درجه	164	زاویه کلی گوه
-	0/1	ضریب اصطکاک
نیوتن	37/5	نیروی عمودی
درجه	45	زاویه ترک با خط عمود
میلیمتر	0/5	اندازه ترک
گیگا پاسکال	3/24	ضریب الاستیسیته
-	0/33	ضریب پواسون
میلیمتر	0/5	فاصله ترک تا نوک گوه

جدول 2: مقادیر ضرایب شدت تنش برای مسئله نمونه

$K_{II} (kpa\sqrt{m})$	$K_I (kpa\sqrt{m})$	
326/3	-1337/2	مقدار محاسبه شده حل عددی
350/7	-1430/5	مقدار محاسبه شده حل تحلیلی [1]
380/9	-1550/9	مقدار محاسبه شده حل تجربی [2]

5. تاثیر اندازه ترک روی ضریب شدت تنش

اثر اندازه ی ترک در دو حالت با طول ترک های متفاوت مطابق با مشخصات جدول (3) مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج مربوط به هر یک در اشکال (5) و (6) آورده شده است.

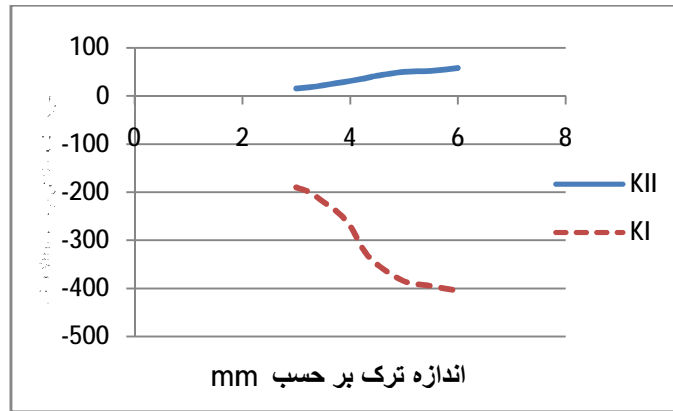


شکل 5: تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب اندازه ترک در حالت اول

جدول 3: مشخصات مسئله بررسی اثر اندازه ترک در حالت اول

واحد	اندازه	پارامتر
درجه	1/5	زاویه نیمساز گوه با خط عمود
درجه	164	زاویه کلی گوه
-	0/1	ضریب اصطکاک
کیلو نیوتن	37/5	نیروی عمودی
درجه	45	زاویه ترک با خط عمود
میلیمتر	0/2 تا 1	اندازه ترک
گیگا پاسکال	3/24	ضریب الاستیسیته
-	0/33	ضریب پواسون
میلیمتر	0/5	فاصله ترک تا نوک گوه

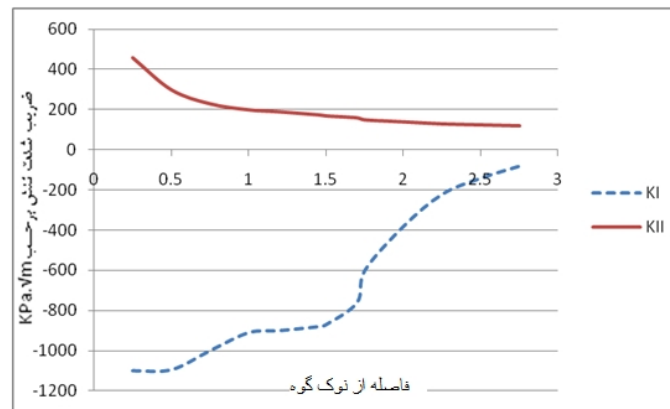
مشخصات مسئله بررسی شده در حالت دوم مانند جدول 3 می باشد با این تفاوت که اندازه ترک بین 3 تا 6 میلیمتر تغییر کرده و فاصله نوک گوه از ترک 6 میلیمتر است.



شکل 6: تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب اندازه ترک در حالت دوم

6. بررسی تاثیر محل ترک

برای بررسی تاثیر محل ترک روی ضرایب شدت تنش محل ترک از نزدیک نوک گوه تا 1 میلیمتر خارج از ناحیه تماس جابجا شده است. مشخصات مسئله‌ای که در این قسمت بررسی شده مانند جدول (1) بوده و فاصله نوک گوه از ترک از 0/25 تا 2 میلیمتر تغییر کرده و نتایج مربوط به تاثیر محل ترک در شکل (7) آورده شده است:



شکل 7: نمودار تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به محل ترک

7. نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی مسئله تماس گوه نامتقارن با یک نیم‌صفحه با وجود ترک به روش اجزای محدود پرداخته شده است. با توجه به اهمیت ضریب شدت تنش در محاسبات مربوط به مکانیک شکست و خستگی، پارامتر اصلی مورد بررسی، ضریب شدت تنش می باشد. تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب تغییر در برخی شرایط مسئله مورد بررسی قرار گرفته و نتایج آن ارائه شده

است. در نهایت با استفاده از نتایج بدست آمده و با توجه به فرضیات بکار رفته در حل مسائل که به آنها اشاره شد، نتایج زیر قابل استخراج می باشد:

- در همه حالتها تنش موجود در صفحه فشاری بوده در نتیجه مقدار KI صفر می باشد.
- در این مسئله بدلیل صفر بودن مقدار KI عامل محدود کننده عمر مقدار KII می باشد.
- ضریب شدت تنش در در مود دوم با افزایش طول ترک افزایش می یابد
- با افزایش فاصله ترک از نوک گوه اندازه ضرایب شدت تنش افزایش می یابد.

8. منابع و مراجع

- [1] نادری داود، بررسی مسئله تماس بین یک گوه نامتقارن و یک نیم‌فضا با وجود ترک به روش تحلیلی، پایان نامه دکترا، دانشگاه صنعتی شریف 1387
- [2] قهرمانی مقدم دانیال، تعیین ضرایب شدت تنش در نیم صفحه بینهایت دارای ترک های سطحی تحت تاثیر گوه نامتقارن با استفاده از روش تجربی برشنگاری ، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تهران 1389
- [3] Shuting Li, *Finite element analyses for contact strength and bending strength of a pair of spur gears with machining errors, assembly errors and tooth modifications, Mechanism and Machine Theory*, 42 (2007) 88-114
- [4] Bernardo A.T. , *Proposition of a finite element-based approach to compute the size effect in fretting fatigue, Tribology*, 39 (2006) 1123-1130
- [5] Thuresson D., *Stability of Sliding Contact-Comparision of Pin and a Finite Element Model, Wear*, 261 (2006) 896-904
- [6] Solberg J. M., *A family of simple two-pass dual formulations for the finite element solution of contact problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006
- [7] Sellgren U., *A Finite Element-Based Model of Normal Contact Between Rough Surfaces, Wear*, 254 (2003) 1180-1188
- [8] Schuller T., *Finite-element simulation of interfacial crack propagation: Methods and tools for the complete failure process under large scale yielding, Engineering Fracture Mechanics* 73(2006) 2252-2263
- [9] Su W. S., *Finite element, critical-plane, fatigue life prediction of simple and complex contact configurations, International Journal of Fatigue* 27(2005) 403-416
- [10] Ikeda T., *Stress intensity factor analyses of interface cracks between dissimilar anisotropic materials using the finite element method, Engineering Fracture Mechanics* 73(2006) 2067-2079
- [11] Bartha B. B., *Modeling of geometry effects in fretting fatigue, Tribology* 39(2006) 1131-1141
- [12] Benuzzi D., *Stress intensity factor range and propagation mode of surface cracks under rolling-sliding contact, Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 40 (2003) 55-74