

پیش بینی مشخصات دینامیکی سازه با استفاده از روشهای عددی آنالیز مودال

علیرضا گرامی^۱، مهدی صالحی^۲

۱- مرکز طراحی هواگرد، شرکت صنایع هواپیماسازی ایران

۲- دانشگاه آزاد اسلامی واحد نجف آباد، دانشکده فنی مهندسی

چکیده

اصلاح قطعات و سازه‌های مکانیکی که ممکن است به منظور بهبود خواص دینامیکی یا استحکامی سیستم انجام شده باشد، در طی پروسه طراحی و یا پس از آن اجتناب ناپذیر است. برای بررسی اثر تغییر انجام شده در خواص ارتعاشی سیستم، تحلیل مجدد مسئله مقدار ویژه و یا انجام تست مودال تجربی مجدد روی سیستم اصلاح شده، می‌تواند طولانی و پرهزینه باشد. امکان پیش بینی پاسخ دینامیکی سازه برای یک سیستم اصلاح شده، قابلیت سودمند است که از انجام تکراری آزمایش مودال و یا تحلیل مجدد مسئله مقدار ویژه، جلوگیری می‌کند. در این فعالیت دو روش آنالیز مودال در پیش بینی پاسخ سیستم اصلاح شده، مورد توجه قرار گرفته و بر روی یک مدل سازه بیمی و همچنین یک سیستم گسسته نمونه پیاده سازی شده است.

واژه های کلیدی: اصلاح دینامیکی سازه - روش خارج قسمت رابلی- تئوری آشفتگی- معیار MAC

مقدمه

در سالهای اخیر، کاربرد طراحی دینامیکی سازه در مسائل مهندسی اهمیت بیشتری یافته است. در بیشتر مسائل، اصلاحات اعمال شده کوچک بوده و می‌توان آن را بصورت اصلاح موضعی در نظر گرفت. اصلاح و بهبود دینامیکی سازه منجر به تغییر رفتار دینامیکی سازه میشود و برای تحلیل این مسئله باید یک مدل ریاضی از دینامیک سازه در دست باشد. این موضوع لزوم انجام تستهای تجربی مودال را روشن می‌کند. در سالهای اخیر با گسترش کاربرد روش تحلیل اجزاء محدود و افزایش قابلیت تحلیلگرهای کامپیوتری، گستره کاربرد آنالیز مودال نیز افزایش یافته است. با استفاده از روشهای المان محدود، می‌توان هر سیستم دینامیکی خطی را گسسته سازی نمود و مدل فضایی (spatial model) سازه را که مشتمل بر ماتریسهای جرم و سختی و میرایی است به دست آورد. اما در عین حال روش المان محدود با نقایصی همراه است. انجام تست تجربی مودال سازه‌ها نشان داده است که معمولا مدل های ریاضی سازه به تنهایی نمی‌تواند قابل اعتماد باشد و دقت مناسب برای پیش بینی پاسخ سازه تحت بارگذاری دینامیکی را ندارد. این عدم اطمینان بیشتر ناشی از مشکل بودن مدل سازی ریاضی اتصالات و میزان میرایی سازه می‌باشد.

بنابراین اعتبار نتایج روش المان محدود وابسته به صحت گذاری و یا بروز

رسانی این مدل های ریاضی می باشد. [1]

روش تحلیل مودال با انجام آنالیز مودال بر روی داده های برگرفته از تست تجربی، می‌تواند یک مدل مودال دقیق از سازه ارائه کند و بدون مدل فضایی یا مدل FEM و حتی بدون نیاز به معلوم بودن ماتریسهای جرم و سختی، تنها بر اساس اطلاعات برگرفته از آنالیز مودال تجربی و پس پردازش داده ها، می‌تواند در بهبود مشخصات دینامیکی سازه مورد استفاده قرار گیرد.

در این فعالیت از دو روش برای پیش بینی پاسخ دینامیکی استفاده می‌شود. روش خارج قسمت رابلی و روش آشفتگی. این روش ها بر روی دو سازه نمونه پیاده سازی می‌شوند. یکی از این سازه های نمونه یک سیستم جرم و فنر و دیگری یک تیر ساده می‌باشد.

ارائه روابط و معادلات اساسی در تعیین مشخصات دینامیکی سیستم و پیش‌بینی پاسخ:

با استفاده از روابط دینامیک، فرم ماتریسی معادله حرکت یک سیستم چند درجه آزادی بدون اثر میرایی به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (1)$$

در این رابطه $\{f\}$ بردار نیروهای خارجی، $\{x\}$ بردار تغییر مکان درجات آزادی سیستم و $[M]$ و $[K]$ ماتریسهای سختی و جرم می‌باشند. اگر تمام نیروها بصورت هارمونیک و با فرکانس یکسان ω و فاز اولیه صفر در نظر گرفته شوند این سیستم بصورت هماهنگ و با فرکانس تحریک ارتعاش خواهد کرد و خواهیم داشت: [1]

۱- کارشناس ارشد

۲- استادیار، Mehdi.salehi@pmc.iaun.ac.ir، (نویسنده مخاطب)

$$c_{1i} = -\frac{1}{2}(\phi'_{0s} \cdot \Delta M \cdot \phi_{0i}), s \neq i \quad (12)$$

$$c_{1s} = \frac{1}{\lambda_{0i} - \lambda_{0s}}(\phi'_{0s} \cdot \Delta K \cdot \phi_{0i} - \lambda_{0i} \phi'_{0s} \cdot \Delta M \cdot \phi_{0i}), s = i$$

ارزیابی عددی روش های خارج قسمت رایلی و آشفنگی در پیش بینی پاسخ سازه های اصلاح شده:

با مقایسه نتایج دو روش ارائه شده، می توان دقت آن ها را با هم مقایسه نمود. لازم به ذکر است که میزان دقت این روشها با بزرگتر شدن اصلاح صورت گرفته کاهش می یابد. در اینجا روابط معرفی شده بروی یک سیستم گسسته و یک سیستم پیوسته ارزیابی می شود. برای مقایسه دقت بین روابط پیش بینی در سیستم، دقت فرکانسهای طبیعی و شکل مود های پیش بینی شده نسبت به پاسخ دقیق، از دو معیار Modal assurance criterion و Direct natural frequency correlation استفاده شده است.

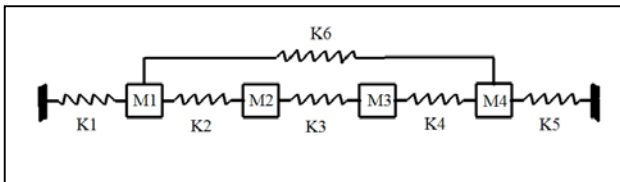
Modal Assurance Criterion :

$$MAC(\phi_e, \phi_p) = \frac{|\phi'_e \cdot \phi_p|^2}{(\phi'_e \cdot \phi_e) \cdot (\phi'_p \cdot \phi_p)} \times 100 \quad (13)$$

Direct natural frequency correlation :

$$\delta(\lambda_e, \lambda_p) = \frac{\lambda_e - \lambda_p}{\lambda_e} \times 100 \quad (14)$$

در این روابط اندیس e مربوط به حل دقیق سیستم تغییر یافته و اندیس p مربوط به حل با استفاده از روابط پیش بینی می باشد. سیستم گسسته مورد نظر که در شکل ۱ نشان داده شده است یک سیستم جرم و فنر با چهار درجه آزادی می باشد.



شکل ۱. سیستم گسسته جرم و فنر با چهار درجه آزادی

در این سیستم مقادیر جرم و سختی به صورت زیر فرض شده اند :

$$K1=1, k2=1, k3=1, k4=1, k5=1, k6=1, m1=1, m2=1, m3=1, m4=1$$

اصلاح اول روی این سیستم، نسبتاً کوچک در نظر گرفته شده و عبارت است از افزایش سختی k6 و m3 باندازه 15% و همچنین کاهش سختی k2 باندازه 15%، در این صورت:

$$m_3 + \Delta m_3 = 1.15, k_6 + \Delta k_6 = 1.15, k_2 + \Delta k_2 = 0.85$$

در اصلاح دوم روی این سیستم، همان اصلاح اول و روی همان المانها منتهی با مقدار بزرگتر منظور می شود. میزان تغییر در این حالت 30% در نظر گرفته شده است یعنی :

$$m_3 + \Delta m_3 = 1.30, k_6 + \Delta k_6 = 1.30, k_2 + \Delta k_2 = 0.70$$

نتایج بکارگیری روشهای پیش بینی ومعیارهای ارزیابی روی این سیستم گسسته در جداول ۱ و ۲ نمایش داده شده است. در جدول ۱ مقادیر ویژه به دست آمده از حل دقیق مسئله و روش های پیش بینی ارائه شده و در جدول

$$\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \sin \omega t = \{F\} \sin \omega t \quad (2)$$

$$\{x\} = \{X\} \sin \omega t, \{\dot{x}\} = -\omega^2 \sin \omega t \quad (3)$$

$$([K] - \omega^2 [M])\{X\} = \{F\} \quad (4)$$

$$[K] - \lambda[M]\{\phi\} = \{0\} \quad (5)$$

که در روابط بالا، λ مقادیر ویژه و $\{\phi\}$ بردارهای ویژه بدست آمده از حل مسئله هستند. اگر ماتریسهای تغییر جرم و سختی را با ΔM ، ΔK نشان دهیم، می توان نوشت :

(6)

$$([K] + [\Delta K] - (\lambda + \Delta\lambda)([M] + [\Delta M]))(\{\phi\} + \{\Delta\phi\}) = \{0\}$$

روش خارج قسمت رایلی :

روش خارج قسمت رایلی مطابق رابطه (۷)، به دلیل سادگی روابط، در پیش بینی مقادیر ویژه، کاربرد وسیعی دارد. [2]

$$(\lambda_r + \Delta\lambda_r) = \frac{\{\phi_r\}^T \{([K] + [\Delta K])\} \{\phi_r\}}{\{\phi_r\}^T \{([M] + [\Delta M])\} \{\phi_r\}} \quad (7)$$

برای تعیین بردارهای شکل مود منطبق با روش رایلی، روشی بر گرفته از معادلات آشفنگی مرتبه اول توسط (Ravi) در سال ۱۹۹۴ ارائه شد که عبارتست از : [2]

$$P_{ij} = \frac{\{\phi_j\}^T \{[\Delta K] - \lambda_i [\Delta M]\} \{\phi_i\}}{\{\phi_i\}^T (\lambda_i - \lambda_j) \{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\}}, \{\phi_i\} \approx \sum_{j=1, j \neq i}^n P_{ij} \{\phi_j\} \quad (8)$$

رابطه (۷) مقادیر ویژه سیستم تغییر یافته را محاسبه میکند و در رابطه (۸)، ابتدا ضریب P بر حسب درایه های ماتریس تغییر سختی و جرم بدست آمده و با استفاده از آن بردارهای شکل مود قابل محاسبه اند.

روش آشفنگی مرتبه اول :

روش تئوری آشفنگی، یک ابزار مناسب برای پیش بینی پارامترهای مودال در سازه های اصلاح شده است. روابط این روش بر اساس اصل تعامد مودها و تئوری بسط مودال، به دست آمده است. با فرض این که تغییر پارامترهای فیزیکی سیستم کوچک باشد، تغییر مقادیر ویژه و بردارهای ویژه سیستم هم کوچک خواهد بود. مطابق با تئوری آشفنگی ماتریسی، با حل مسئله مقدار ویژه معادله (۶)، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه سیستم را می توان به شکل سری های توانی روابط (۹) و (۱۰)، نمایش داد. [3]

$$\lambda_i = \lambda_0 + \varepsilon \cdot \lambda_1 + \varepsilon^2 \cdot \lambda_2 + \dots \quad (9)$$

$$\phi_i = \phi_0 + \varepsilon \cdot \phi_1 + \varepsilon^2 \cdot \phi_2 + \dots \quad (10)$$

در این روابط اندیس صفر مربوط به مقادیر و بردارهای ویژه سیستم اصلی و اندیس ۱ مربوط به مرتبه یکم اغتشاش و اندیس ۲ مربوط به مرتبه دوم اغتشاش در سیستم می باشد. در روابط (۱۱) و (۱۲)، فرمول بندی حل مسئله به روش تئوری آشفنگی ماتریسی مرتبه اول ارائه شده است :

$$u_{1i} = \sum_{s=1}^n c_{1s} \phi_{0s} \quad (11)$$

۲ با استفاده از معیار های ارزیابی ذکر شده، دقت روش های پیش بینی با یکدیگر مقایسه شده است .

مثال عددی دیگر، پیاده سازی روشهای پیش بینی روی یک مدل سازه ایی بیم است. برای حل مسئله از روش المان محدود و بکار گیری المان هرمیت و ماتریس جرمی کوپل شده استفاده میشود. در اینجا مدل سازه ایی به کار گرفته شده در این حالت عبارت از یک مدل تیر مقطع مستطیلی، با ابعاد طول و پهنا $540 \times 50(mm)$ و ضخامت $4.45(mm)$ می باشد . روابط مورد استفاده در تعریف ماتریس های المان جرم و سختی عبارتند از :

$$m = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$k = E.I.L^3 \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

در سیستم های پیوسته مانند بیم، معمولاً اصلاح با تغییر یکی از پارامتر های ابعادی مثل ضخامت انجام می شود که در هر دو ماتریس جرم و سختی سیستم تاثیر گذار است. در اینجا پارامتر اصلاح، ضخامت بیم می باشد. اصلاح اول نسبتاً کوچک در نظر گرفته شده و در آن ضخامت بیم به اندازه 15% افزایش می یابد. در اصلاح دوم ضخامت بیم به اندازه 30% افزایش یافته است. نتایج بکارگیری روشهای پیش بینی و معیار های ارزیابی روی این سیستم گسسته در جداول ۳ و ۴ نمایش داده شده است . در جدول ۳ مقادیر ویژه به دست آمده از حل دقیق مسئله و روشهای پیش بینی ارائه شده و در جدول ۴ با استفاده از معیار های ارزیابی ذکر شده ، دقت روش های پیش بینی با یکدیگر مقایسه شده است .

نتیجه گیری

روش های ارائه شده در این فعالیت، با دقت خوبی می توانند پاسخ ارتعاشی سازه اصلاح شده را پیش بینی نمایند. مطابق با نتایج نمایش شده در جداول، برای اصلاحات کوچک این روش ها مقادیر ویژه را با خطای کمتر از 2% پیش بینی می کنند و برای اصلاحات بزرگتر مقادیر ویژه با خطای کمتر از 8% بدست می آیند. در مورد پیش بینی بردارهای شکل مود، برای اصلاحات کوچک ، معیار MAC بزرگتر از 90% گزارش شده و برای اصلاحات بزرگتر، مقدار این معیار تا 65% نمایش داده شده است .

مراجع

1. Jimin He and Zhi-Fang Fu.- Modal Analysis.(2001)
2. Ravi, Structural dynamic modifications and design sensitivity analysis of structures with viscoelastic damping treatment. Ph D thesis, Indian Institute of Technology, Delhi(1994)
3. Chen, S.H. 1993. Matrix Perturbation Theory in Structural Dynamics, International Academic Publishers, Beijing.(1993)

جدول ۱: مقایسه بین فرکانسهای طبیعی محاسبه شده برای سیستم جرم و فنر

Mode no.	Exact solution of original system	Exact solution: %15 modification	Predicted solution: %15 modification: Reyleigh method	Predicted solution: %15 modification: perturbation method	Exact solution: %30 modification	Predicted solution: %30 modification: Reyleigh method	Predicted solution: %30 modification: perturbation method
1	0.382	0.354	0.355	0.353	0.326	0.33	0.325
2	2.382	2.307	2.33	2.328	2.213	2.284	2.273
3	2.618	2.435	2.426	2.422	2.258	2.241	2.225
4	4.618	4.643	4.598	4.597	4.741	4.578	4.577

جدول ۲: ارزیابی معیارهای δ و MAC برای سیستم گسسته جرم و فنر

MAC	δ	شرح وضعیت
$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0034 & 0.0003 & 0.0007 \\ 0.0027 & 0.9991 & 0.0016 & 0.0001 \\ 0.0011 & 0.0001 & 0.9991 & 0.0003 \\ 0.0012 & 0.0018 & 0.0001 & 0.9997 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.282 \\ -0.91 \\ 0.533 \\ 0.991 \end{bmatrix}$	مقایسه مقادیر و بردارهای ویژه بین جواب دقیق و جواب پیش بینی شده در حالت تغییرات به مقدار ۱۵٪ با استفاده از فرمول بندی روش اغتشاش مرتبه اول
$\begin{bmatrix} 0.9991 & 0.0050 & 0.0019 & 0.0004 \\ 0.0564 & 0.9368 & 0.0253 & 0.0144 \\ 0.0457 & 0.0515 & 0.9051 & 0.0011 \\ 0.0568 & 0.0035 & 0.0169 & 0.9064 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.282 \\ -0.99 \\ 0.37 \\ 0.97 \end{bmatrix}$	مقایسه مقادیر و بردارهای ویژه بین جواب دقیق و جواب پیش بینی شده در حالت تغییرات به مقدار ۱۵٪ با استفاده از فرمول بندی روش رایلی
$\begin{bmatrix} 0.9999 & 0.0132 & 0.0000 & 0.0017 \\ 0.0090 & 0.9784 & 0.0149 & 0.0004 \\ 0.0035 & 0.0058 & 0.9863 & 0.0059 \\ 0.0046 & 0.0083 & 0.0003 & 0.9965 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.31 \\ -2.71 \\ 1.46 \\ 3.459 \end{bmatrix}$	مقایسه مقادیر و بردارهای ویژه بین جواب دقیق و جواب پیش بینی شده در حالت تغییرات به مقدار ۳۰٪ با استفاده از فرمول بندی روش اغتشاش مرتبه اول
$\begin{bmatrix} 0.9962 & 0.0235 & 0.0020 & 0.0010 \\ 0.1900 & 0.7672 & 0.0932 & 0.0348 \\ 0.1395 & 0.2486 & 0.6483 & 0.0045 \\ 0.1871 & 0.0000 & 0.0634 & 0.7067 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.227 \\ -3.21 \\ 0.75 \\ 3.438 \end{bmatrix}$	مقایسه مقادیر و بردارهای ویژه بین جواب دقیق و جواب پیش بینی شده در حالت تغییرات به مقدار ۳۰٪ با استفاده از فرمول بندی روش رایلی

جدول ۳: مقایسه بین فرکانسهای طبیعی محاسبه شده برای سیستم تیر ساده

Mode no.	Exact solution of original system	Exact solution: %15 modification	Predicted solution: %15 modification: Reyleigh method	Predicted solution: %15 modification: perturbation method	Exact solution: %30 modification	Predicted solution: %30 modification: Reyleigh method	Predicted solution: %30 modification: perturbation method
1	79.5	89.3	90.7	91.3	97.5	102.9	105.2
2	219	228	231.6	232	232.2	246.3	248.2
۳	482	502	502.3	503	528.4	528.4	532.2
۴	865	937	945	950	1003.8	1036.4	1058

جدول ۴: ارزیابی معیارهای δ و MAC برای سیستم تیر ساده

MAC	δ	شرح وضعیت
$\begin{bmatrix} 0.9998 & 0.0000 & 0.2363 & 0.000 \\ 0.0000 & 0.9993 & 0.0000 & 0.9649 \\ 0.2250 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.9596 & 0.0000 & 0.9999 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.24 \\ -1.75 \\ -0.2 \\ -1.387 \end{bmatrix}$	مقایسه مقادیر و بردارهای ویژه بین جواب دقیق و جواب پیش بینی شده در حالت تغییرات به مقدار ۱۵٪ با استفاده از فرمول بندی روش اغتشاش مرتبه اول
$\begin{bmatrix} 0.9937 & 0.0000 & 0.1618 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.9959 & 0.0000 & 0.9258 \\ 0.2028 & 0.0000 & 0.9993 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.9042 & 0.0000 & 0.9890 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.57 \\ -1.58 \\ 0.06 \\ -0.854 \end{bmatrix}$	مقایسه مقادیر و بردارهای ویژه بین جواب دقیق و جواب پیش بینی شده در حالت تغییرات به مقدار ۱۵٪ با استفاده از فرمول بندی روش رایلی
$\begin{bmatrix} 0.9963 & 0.0000 & 0.3757 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.9924 & 0.0000 & 0.9964 \\ 0.3196 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.9956 & 0.0000 & 0.9979 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -7.89 \\ -6.89 \\ -0.719 \\ -5.40 \end{bmatrix}$	مقایسه مقادیر و بردارهای ویژه بین جواب دقیق و جواب پیش بینی شده در حالت تغییرات به مقدار ۳۰٪ با استفاده از فرمول بندی روش اغتشاش مرتبه اول
$\begin{bmatrix} 0.9763 & 0.0000 & 0.1847 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.9893 & 0.0000 & 0.9668 \\ 0.2662 & 0.0000 & 0.9967 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.9258 & 0.0000 & 0.9596 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5.54 \\ -6.07 \\ 0.00 \\ -3.25 \end{bmatrix}$	مقایسه مقادیر و بردارهای ویژه بین جواب دقیق و جواب پیش بینی شده در حالت تغییرات به مقدار ۳۰٪ با استفاده از فرمول بندی روش رایلی