فصل اول

مجموعه‌های معمولی

مقدمه

برای درک مفهوم مجموعه‌های فازی نیاز به شناخت دقیق ازمجموعه‌های معمولی می‌باشد. قبل از شروع مباحث مجموعه‌های فازی مجموعه‌های معمولی، تعاریف ومفاهیم اولیه آن را یادآوری می کنیم. همچنین برای درک بهتر منطق فازی، نیازبه شناخت منطق معمولی وجبربول می‌باشد که آنها رانیز یادآوری می کنیم.

1-1 مجموعه

تعریف 1-1: یک مجموعه گردآیه‌ای ازاشیاء کاملاً معین و ممتایز می‌باشد. اشیاء تشکیل دهنده مجموعه را اعضاء مجموعه یا عناصر مجموعه می‌نامیم. مثالهای زیر،مفهوم مجموعه را مشخص می کنند:

-مجموعه حروف الفبا

-مجموعه تمام اعداد زوج طبیعی

-مجموعه اعداد حقیقی بین 1و2

-مجموعه ماههای سال

-مجموعه دانشجویان رشته کامپیوتر دانشگاه

قابل توجه است که هرجمله که یک دسته ازاشیاء را مشخص می کند یک مجموعه رامعرفی نمی‌کند. مثلاً سه نفر ازشعرای معروف ایران یا مجموعه اعداد خیلی بزرگتر از 10 مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کنند. در مثالهای اخیر برای مورد اول مفهوم معین نیست و برای مورد دوم درواقع مفاهیم مهم ونادقیق مدنظر می‌باشد بنابراین نمی‌توان آنها را با مجموعه معمولی مشخص کرد.

برای نمایش مجموعه ازحروف بزرگ لاتین AوB و....استفاده می‌شود وبرای نمایش اعضای آن ازحروف کوچک لاتین استفاده می کنیم.

مجموعه‌های معروفی که با آنها آشنا هستیم عبارتند از:

$\mathbb{N} = \{1و2و3و...\}$, مجموعه اعداد طبیعی

$W=\{0,1,2,\ldots\ldots\}$ مجموعه اعداد حسابی

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1,0,1,2, \ldots\}$ مجموعه اعداد صحیح

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$ مجموعه اعداد گویا

$\mathbb{Q}^* = \{x: x \notin \mathbb{Q}\}$ مجموعه اعداد گنگ

$\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی

درواقع اعداد حقیقی مجموعه اعداد گویا و گنگ می‌باشند.

یک مجموعه را به چهار طریق می‌توان نمایش داد

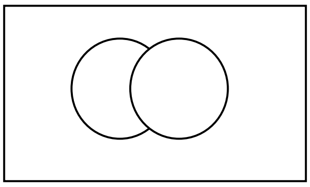
1 - نمایش تفصیلی یا فهرستی: دراین نمایش اعضاء مجموعه بصورت فهرست داخل {} قرار می گیرند مثل $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$

2 - نمایش ریاضی: این نمایش ازمتداولترین نمایش مجموعه درریاضی می‌باشد. دراین روش اعضاء مجموعه با توجه به خاصیت یا شرط مربوطه مشخص می‌شود. درحالت کلی این نوع نمایش بصورت زیر می‌باشد

$A=\{x \in U : p(x)\}$ که درآن U همان مجموعه مرجع یا مجموعه جهانی می‌باشد. عناصر مجموعه با x نمایش داده شده بطوریکه خاصیت یا شرط مربوطه را داشته باشند.

مثال1-1: اعداد حقیقی بین 1و2 $A=\{x \in IR: \ 1 < x < 2\}$

3 - نمایش نمودار ون:دراین روش معمولاً برای نمایش مجموعه ازاشکال هندسی استفاده می‌شود معمولاً مرجع به مستطیل و بقیه مجموعه‌ها با دایره مشخص می‌شوند. این نمایش برای اولین بار توسط ریاضیدان انگلیسی به نام ون برای سادگی نمایش مجموعه‌ها واعمال روی آنها معرفی گردید.



شکل 1-1

4- روش تعلق(تابع عضویت): دراین روش عضو بودن یا عضو نبودن یک شیء درمجموعه مد نظر است. این کار توسط یک تابع به نام تابع عضویت انجام می‌پذیرد.فرض کنید A مجموعه مورد نظر باشد، χ_A تابعی ازمجموعه A به مجموعه {0و1} بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x \in A\\ 0 & x \notin A\end{cases}$$

درواقع عضو بودن با عدد 1 و عدم عضویت با عدد 0 مشخص می‌شود.

مثال 1-2: فرض کنید A مجموعه اعداد طبیعی بین 2و10 باشد دراینصورت {9و8و7و6و5و4و3}=A و با استفاده ازنمایش تابع عضویت مجموعه رابصورت زیر نمایش می‌دهیم :

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x=3,4,5,\ldots\ldots 9\\ 0 & \text{سایر}\end{cases}$$

داریم $\chi_A(3)=1$ یعنی $3 \in A$ و $\chi_A(2)=0$ یعنی $2 \notin A$.

نمایش تابع عضویت برای نمایش مجموعه‌های فازی نیز استفاده می‌شود به همین دلیل در ادامه ازاین نمایش بیشتر استفاده می‌کنیم.

تمرین 1-1

1 - مجموعه‌های زیر را با نمایش تابع عضویت مشخص کنید.

الف: مجموعه اعداد زوج طبیعی کمتر از ب: مجموعه اعداد حقیقی بین 1و3

2-فرض کنید $A=\{x \in Q: 1 < x \le 2\}$ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیررا مشخص کنید.

الف- $\chi_A(1)=1$ ب: $\chi_A(\sqrt{2})=0$ ج: $\chi_A(2)=1$ د: $\chi_A(\frac{3}{2})=0$

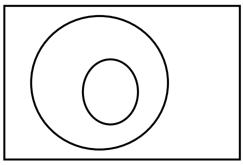
2 - مجموعه اعداد صحیح بین 5-و5 را با همه روشها نمایش دهید.

1-2 روابط و اعمال روی مجموعه‌ها

1-2-1 : شمولیت یا زیر مجموعه بودن

تعریف 1-2 -1: مجموعه‌های B,A را درنظر بگیرید. اگر هرعضو A، عضوی از B باشد آنگاه A را زیر مجموعه B گوییم.

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \Rightarrow x \in B$$



شکل 1-2: زیر مجموعه

مثال 1-3: فرض کنید B=[1,3],A=[1,2] واضح است که $A \subseteq B$.

حال رابطه *زیر مجموعه بودن* را با نمایش تابع عضویت مشخص می‌کنیم. طبق تعریف اگر $x \in A$ آنگاه $x \in B$ پس اگر $\chi_A(x)=1$ آنگاه $\chi_B(x)=1$. اما اگر $\chi_A(x)=0$ ممکن است $\chi_B(x)=1 \ or \ 0$ بنابراین داریم:

$$\forall x \in U : \chi_A(x) \le \chi_B(x)$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in U \ \ \chi_A(x) \le \chi_B(x) \qquad \text{یعنی}$$

مثال 1-4 : فرض کنید A={1,2,3} ,B={1,2,3,4,5} دو مجموعه دلخواه ازاعداد طبیعی باشند

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x=1,2,3\\ 0 & \text{سایر}\end{cases} \qquad \chi_B(x)=\begin{cases}1 & x=1,2,3,4\\ 0 & \text{سایر}\end{cases}$$

واضح است که $\chi_A \le \chi_B$ مثلاً $\chi_A(1)=1 \ , \ \chi_B(1)=1$ بنابراین $\chi_A(1) \le \chi_B(1)$ و همچنین $\chi_A(4)=0 \ , \ \chi_B(4)=1$ پس $\chi_A(4) \le \chi_B(4)$.

بین مجموعه‌های اصلی رابطه شمولیت بصورت زیر می‌باشد.

$$IN \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq IR \subseteq C$$

تعریف 1-2 (مجموعه توانی): مجموعه تمام زیر مجموعه‌های A را مجموعه توانی A می‌نامیم و با نماد P(A) نمایش می‌دهیم.

مثال 1-5: فرض کنید A={a,b,c} بنابراین

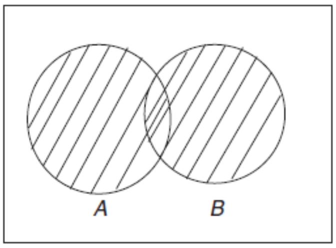
$$P(A)=\{\phi,\{a\},\{b\},\{C\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

همانطور که مشاهده می‌شود اعضای مجموعه P(A)خود یک مجموعه می‌باشند. اگر تعداد اعضاء A را با $|A|$ نمایش دهیم آنگاه $|P(A)|=2^{|A|}$.$|A|$ را عدد اصلی مجموعه A گویند. درمثال قبل $|A|=3$ بنابراین $|P(A)|=2^3=8$.

1-2-2: اجتماع دو مجموعه

تعریف 1-4: اگر A,B دو مجموعه دلخواه باشند اجتماع آنها بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$A \cup B = \{x : x \in A \ \text{یا} \ \ x \in B\}$$



شکل 1-3: اجتماع

مثال 1-6: الف- فرض کنید A={1,2,4,6} و B={2,4,5} آنگاه $A \cup B = \{1,2,4,5,6\}$ نمایش تابع عضویت آنها بصورت زیر می باشد

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x = 1,2,4,6 \\ 0 & \text{سایر} \end{cases} \quad \text{و} \quad \chi_B(x) = \begin{cases} 1 & x = 2,4,5 \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$$ و برای اجتماع داریم

$$\chi_{A\cup B}(x) = \begin{cases} 1 & x = 1,2,4,5,6 \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$$

فرض کنید x=2 آنگاه $\chi_A(2) = 1, \ \chi_B(2) = 1$ پس $\chi_{A\cup B}(2) = 1$. اگر x=7 آنگاه $\chi_A(7) = 0, \ \chi_B(7) = 0$ پس $\chi_{A\cup B}(7) = 0$ و همچنین اگر x=6 آنگاه $\chi_A(6) = 1, \ \chi_B(6) = 0,$ پس $\chi_{A\cup B}(6) = 1$.

مشاهده می‌شود که ارتباطی بین تابع عضویتهای مجموعه‌های A,B با مجموعه $A \cup B$ وجود دارد. درواقع میزان عضویت دراجتماع دو مجموعه ، بزرگترین عضویت ازبین میزان عضویتهای دو مجموعه می‌باشد یعنی:

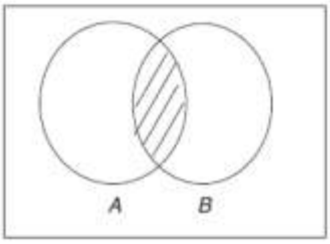
به عبارت دیگر وقتی میزان عضویت هردو مجموعه صفر باشد میزان عضویت اجتماع صفر خواهد بود وسایر موارد میزان عضویت یک خواهد بود.

برخی خواص اجتماع

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad A \cup B = B \cup A \qquad A \cup U = U \qquad A \cup \phi = A \qquad A \cup A = A$$

1-2-3: اشتراک دو مجموعه

تعریف 1-5: اگر A,B دو مجموعه دلخواه روی مجموعه مرجع می باشند آنگاه اشتراک آنها بصورت زیر تعریف می‌شود $A \cap B = \{x \in U : x \in A, x \in B\}$



شکل 1-4 اشتراک

مثال 1-7: $A=\{1,2,4,6\}$ و $B=\{1,3,5\}$ آنگاه $A\cap B=\{1\}$

مثال 1-8: اگر $A=[2,3]$ و $B=[2.5,4]$ آنگاه $A\cap B=[2.5,3]$

نمایش اشتراک با روش تابع عضویت بصورت زیر می‌باشد

یعنی وقتی هر دو میزان عضویت یک باشد میزان عضویت اشتراک نیز یک خواهد بود.

درمثال 1-7 داریم $\chi_{A\cap B}(x)=\begin{cases}1 & x=1\\ 0 & \text{سایر}\end{cases}$

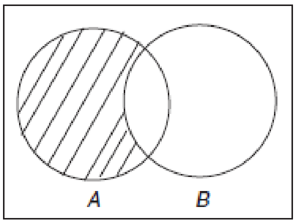
برخی از خواص اشتراک

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \qquad A\cap B=B\cap A \qquad A\cap U=A \qquad A\cap A=A \qquad A\cap\phi=\phi$$

توجه : دو مجموعه رااز هم جدا یا مستقل گویند هرگاه اشتراک نداشته باشند یعنی $A\cap B=\phi$

1-2-4 تفاضل دو مجموعه

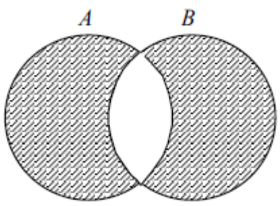
تعریف 1-6: فرض کنید B,A دو مجموعه دلخواه روی مجموعه مرجع U باشد تفاضل دو مجموعه بصورت زیر تعریف می‌شود. $A-B=\{x\in U : x\in A, x\notin B\}$



شکل 1-5 : تفاضل

مثال 1-9: اگر $A=\{1,2,3,4\}, B=\{3,5,7\}$ آنگاه $A-B=\{1,2,4\}$

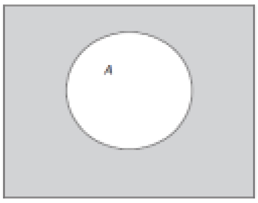
برای دو مجموعه دلخواه B,A تفاضل متقارن بصورت $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$ تعریف می‌شود



شکل 1-6: تفاصل متقارن

1-2- 5 متمم یک مجموعه

تعریف 1-7: فرض کنید U مجموعه مرجع و A یک مجموعه دلخواه باشد دراینصورت متمم مجموعه A عناصری از U می‌باشند که بر A متعلق نباشند. $A' = U - A$



شکل 1-7: متمم

نمایش تابع عضویتی متمم بصورت زیر است:

مثال 1-10: فرض کنید مجموعه مرجع اعداد طبیعی کوچکتر ومساوی 10 باشد و A={1,2,7,8,9} دراینصورت $A' = \{3,4,5,6,10\}$

با توجه به تعریف تفاضل ومتمم می‌توان به راحتی اثبات کرد که $A - B = A \cap B'$ بنابراین نمایش تابع عضویت تفاضل بصورت $\chi_{A-B}(\mathrm{x}) = \min\{\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{x}), \chi_{\mathrm{B}}{}'(\mathrm{x})\}$ می باشد. ازطرفی طبق نمایش تابع عضویتی متمم داریم:

$$\chi_{A-B}(\mathrm{x}) = \min\{\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{x}), \chi_{\mathrm{B}}{}'(\mathrm{x})\}$$

تمرین 1-2: نمایش تابع عضویتی تفاضل متقارن را بنویسید.

برخی ازخواص متمم

$$U' = \phi \qquad \phi' = U \qquad (A')' = A \qquad (A \cup B)' = A' \cap B' \qquad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

مجموعه‌ها با اعمال تعریف شده دارای خواص زیادی می‌باشند که بعضی ازآنها درقسمتهای قبلی گفته شد. این خواص به راحتی اثبات می‌شوند که اثبات آنها به عهده خواننده خواهد بود. مهمترین خواص مجموعه ها درجدول زیر آمده است:

نمایش تابع نشانگر	فرمول	نام خاصیت
$\chi_{A\cup A'}(x) = 1$	$A \cup A' = U$	قانون شمولیت
$\chi_{A\cap A'}(x) = 0$	$A \cap A' = \emptyset$	قانون طرد
$\chi_{A\cup A}(x) = \chi_A(x)$ $\chi_{A\cap A}(x) = \chi_A(x)$	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	قانون خودتوانی
$\chi_{A\cup B}(x) = \chi_{B\cup A}(x)$ $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_{B\cap A}(x)$	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	قانون جابجایی
$\chi_{A\cup(B\cup C)}(x) = \chi_{(A\cup B)\cup C}(x)$ $\chi_{A\cap(B\cap C)}(x) = \chi_{(A\cap B)\cap C}(x)$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	قانون شرکتپذیری
$\chi_{A\cup(B\cap C)}(x) = \chi_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}(x)$ $\chi_{A\cap(B\cup C)}(x) = \chi_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}(x)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	قانون توزیعپذیری
$\chi_{A\cup(A\cap B)}(x) = \chi_A(x)$ $\chi_{A\cap(A\cup B)}(x) = \chi_A(x)$	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	قانون جذب
$\chi_{(A\cup B)'}(x) = \chi_{A'\cap B'}(x)$ $\chi_{(A\cap B)'}(x) = \chi_{A'\cup B'}(x)$	$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$	قانون دمورگان
$\chi_{(A\cup\emptyset)}(x) = \chi_A(x)$ $\chi_{(A\cap U)}(x) = \chi_A(x)$	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	قانون همانی
$\chi_{(A\cup U)}(x) = 1$ $\chi_{(A\cup\emptyset)}(x) = 0$	$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	

جدول 1-1 : خواص مجموعه‌ها

1-2-6: اثبات قانون‌شرکتیذیری با نمایش تابع عضویت:

می‌خواهیم ثابت کنیم: $\chi_{A\cup(B\cup C)}(x) = \chi_{(A\cup B)\cup C}(x)$ یا به عبارت دیگر

$$max\{\chi_A(x), max\{\chi_B(x), \chi_C(x)\}\} = max\{max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}, \chi_C(x)\}$$

درواقع باید نشان دهیم که عملیات ماکزیمم‌گیری خاصیت شرکتپذیری دارد. توابع عضویت مقادیر 0و1 را اختیارمی‌کنند پس برای سه مجموعه 8 حالت اتفاق می‌افتد که درجدول زیر نمایش داده شده است.

χ_A	χ_B	χ_C	$max\{\chi_B, \chi_C\}$	L.H.S	$max\{\chi_A, \chi_B\}$	R.H.S
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0

جدول 1-2: اثبات قانون شرکت‌پذیری

همانطور که درجدول دیده می‌شود L.H.S=R.H.S

3-1 چند مفهوم دیگر از مجموعه‌ها

1-3-1- افراز

تعریف 1–8 فرض کنید A یک مجموعه دلخواه باشد، $A_1,A_2,..,A_n$ را افرازهای A گوییم هرگاه :

1. $A_i \neq \emptyset \quad i = 1,2,..,n$
2. $A_i \cap A_j \neq \emptyset \quad i \neq j$
3. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$

شکل 1–8 :افراز

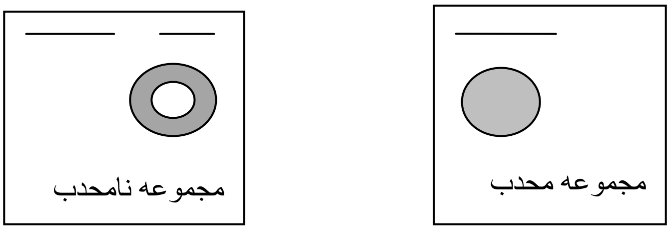
مثال 1–11: اگر A={1,2,….,10} آنگاه A_1={1,3,5,7,9} و A_2={2} , A_3{4,6,8,10} افرازهایی از مجموعه A می‌باشند.

2-3-1- مجموعه محدب

تعریف 1–9: فرض کنید A زیر مجموعه‌ای ازاعداد حقیقی باشد مجموعه A را محدب گوییم هرگاه

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad , \quad \lambda \in [0,1] \quad \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A$$

بدین معنی که اگر دو نقطه دلخواه ازمجموعه را درنظر بگیریم پاره خط واصل بین این دو نقطه نیز در همان مجموعه قرارگیرد. ترکیب $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ ترکیب خطی محدب دو نقطه x_1,x_2 نامیده می‌شود.



شکل 1–9: تحدب مجموعه‌ها

مثال 1–12: نشان دهید مجموعه A=[0,1] محدب است.

فرض کنید $x_1, x_2 \in A$ بنابراین $0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le 1$ لذا $0 \le \lambda x_1 \le \lambda$,$0 \le (1-\lambda)x_2 \le 1-\lambda$ و با جمع طرفین نامساوی داریم $0 \le \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 < 1$ یعنی $\lambda x_1 + (1-\lambda)x \in A$ پس مجموعه A محدب داد.

تمرین 1–3: نشان دهید اگر A,B دو مجموعه محدب باشند آنگاه $A \cap B$ محدب است ولی معمولاً $A \cup B$ محدب نمی‌باشد.

1-4: رابطه

تعریف 1-1: فرض کنید B,A دو مجموعه دلخواه باشند حاصلضرب دکارتی دو مجموعه بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

مثال 1-13: اگر A={2,4} و B={5,6,7} آنگاه

$$A \times B = \{(2,5),(2,6),(2,7),(4,5),(4,6),(4,7)\}$$

تعریف 1-11 اگر B,A دو مجموعه دلخواه باشند R را رابطه‌ای از A به B گویند هرگاه $R \subseteq A \times B$ درواقع رابطه یک نوع مجموعه دو بعدی می‌باشد. اگر $R \subseteq A \times A$ باشد R رارابطه‌ای روی A گویند.

مثال 1-14: مجموعه‌های مثال قبلی رادرنظر بگیرید R={(2,5)(2,6)(4,6)} یک رابطه می‌باشد.

مثال 1-15: الف- بخش‌پذیری روی مجموعه اعداد صحیح یک رابطه می‌باشد . ب- زیر مجموعه بودن روی مجموعه توانی یک رابطه می‌باشد.

توجه: $(a,b) \in R$ بصورت aRb نیز نمایش داده می شود.

1-4-1 خواص روابط

فرض کنید R رابطه‌ای روی A باشد یعنی $R : A \to A$

1 - بازتابی یا انعکاسی: رابطه R را بازتابی گویند هرگاه $\forall a \in A \quad aRa$

2 - تقارنی: رابطه R را تقارنی گویند هرگاه $\forall a,b \in A \quad aRb \to bRa$

3 - پادتقارنی: رابطه R را پادتقارنی گویند هرگاه تقارنی نباشد یا به عبارت دیگر

$$\forall a,b \in A \quad \begin{matrix} aRb \\ bRa \end{matrix} \Rightarrow a = b$$

مثال 1-16: رابطه بخش‌پذیری روی اعداد صحیح خاصیت بازتابی- پادتقارنی و تعدی دارد.

مثال 1-17: رابطه $\underline{\subset}$ روی مجموعه توانی خاصیتهای بازتابی- پادتقارنی و تعدی دارد.

مثال 1-18: رابطه همنهشی روی اعداد صحیح خاصیت بازتابی- تقارنی وتعدی دارد.

$$a \equiv b (\bmod k) \Leftrightarrow a - b \mid k$$

تعریف 1-12(رابطه‌هم ارزی)، به رابطه‌ای که سه خاصیت بازتابی تقارنی وتعدی داشته باشد رابطه هم ارزی گفته می‌شود مثل رابطه همنهشی روی اعداد صحیح

تعریف 1-13 (رابطه ترتیب جزئی) به رابطه‌ای که سه خاصیت بازتابی پادتقارنی وتعدی داشته باشد رابطه ترتیب جزئی گفته می‌شود مثل رابطه بخش‌پذیری روی اعداد صحیح، رابطه $\subseteq$ روی مجموعه توانی. معمولاً یک رابطه ترتیب جزئی را با $(A \ \le)$ نمایش می‌دهند A مجموعه‌ای است که رابطه روی آن تعریف می‌شود که به آن مجموعه جزئاً مرتب گفته می‌شود و $\le$ همان رابطه ترتیب جزئی است.

تعریف 1-14: (کران بالا) فرض کنید$(A \ \le)$ یک مجموعه جزئاً مرتب باشد u را کران بالای A گویند هرگاه

$$\forall x \in A \quad x \le u$$

مثال 1-19 مجموعه $A=\{1,2,4,5,10,20\}$ ورابطه بخش‌پذیری یاد عاد کردن را درنظر بگیرید $(A \ |)$ یک مجموعه جزئاً مرتب می‌باشد عدد1 کران پایین وعدد 20 کران بالای مجموعه A می‌باشند.

1-5: هشبکه

تعریف 1-15 مجموعه جزتاً مرتب L را مشبکه گویند هرگاه هر دو عضو آن کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین داشته باشد. کوچکترن کران بالا دو عضو b,a را با $a \vee b$ و بزرگترین کران پایین را با $a \wedge b$ نمایش می‌دهیم.

مثال 1-20 مجموعه $A=\{a,b,c\}$ و رابطه $\subseteq$ رادرنظر بگیرید. $(P(A) \ \subseteq)$ یک مجموعه جزتاً مرتب می‌باشد. کوچکترین کران بالا وبزرگترین کران پایین بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\forall F,G \in P(A) \qquad F \vee G = F \cup G$$
$$F \wedge G = F \cap G$$

به راحتی می‌توان نشان داد که $F \wedge G, F \vee G$ متعلق به P(A) می‌باشد بنابراین $(P(A) \ \subseteq)$ یک مشبکه می‌باشد بعنوان مثال اگر $P(A)=\{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},A\}$ آنگاه شکل مشبکه بصورت زیر خواهد بود

شکل 1-10

تمرین 1-4- فرض کنید L مقسوم علیه‌های عدد 216 باشد نشان دهید $(L \ |)$ یک مشبکه می‌باشد. (| رابطه عادکردن می‌باشد).

تعریف 1-16 (متمم) فرض کنید $(L \ \le)$ یک مشبکه باشد $\bar{a} \in L$ را متمم $a \in L$ گویند هرگاه $a \vee \bar{a} = 1 \ , \quad a \wedge \bar{a} = 0$ که درآن 0 کوچکترین عضو L و 1بزرگترین عضو L می‌باشند.

مثال 1-21: مجموعه $(D_{20} \ |)$ را درنظر بگیرید. D_{20} همان مقسوم علیه‌های عدد 20 می‌باشد متمم عدد 5 به عدد 4 می‌باشد زیرا $4 \wedge 5 = 1 \ , \ 4 \vee 5 = 20$

تعریف 1-17: شبکه L را متمم‌دار گویند هرگاه تمام اعضای آن دارای متمم باشند مثل $(P(A) \ \subseteq)$

تعریف 1-18: مشبکه L را توزیعپذیر گویند هرگاه

$\forall a(b) \in L \qquad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad , \qquad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

مثال 1-22 مجموعه ($\leq$ [0,1]) یک مشبکه توزیعپذیر می‌باشند که درآن $\leq$ همان رابطه $\leq$ روی اعداد حقیقی می‌باشد $\vee$ همان max و $\wedge$ همان min می‌باشد.

1-6 جبربول

تعریف 1-19: مجموعه A را نسبت به عمل o بسته گویند هرگاه $\forall a,b \in A \quad aob \in A$

تعریف 1-20: یک مجموعه که نسبت به یک یا چند عمل بسته باشد را جبر گویند.

تعریف 1-21(فرمول): مجموعه B را با اعمال .,+ وعناصر 0,1 را یک جبربول گویند هرگاه خواص زیر برقرار باشند:

1- خاصیت خودتوانی a.a=a a+a=a

2- خاصیت جابجایی a.b=b.a a+b=a+b

3- خاصیت شرکتپذیری a .(b.c)=(a.b).c a+(b+c)=(a+b)+c

4- خاصیت توزیعپذیری a+(b.c)=(a+b).(a+c) a.(b+c)=(a.b)+(a.c)

5- خاصیت جذب a.(a+b)=a a+(a.b)=a

6- خاصیت متمی $a, a' \in B \qquad a.a' = 0 \qquad a + a' = 1$

مثال 1-23 $(P(A), \cup, \cap, ', \phi, A)$ یک جبربول می‌باشد

مثال 1-24: فرض کنید B مجموعه همه گزاره‌ها باشد دراینصورت $(B, \wedge, \vee, \approx, F, T)$ یک جبربول می‌باشد.

مثال 1-25: فرض کنید B={0,1} واعمال +و. را بصورت زیر تعریف شده باشند. دراینصورت (B,+,.,’,0,1) جبربول می‌باشد.

+	0	1
0	0	1
1	1	1

	‘
1	0
0	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1