

باسمه تعالی

مکانیک سیالات ۱  
**Fluid Mechanics I**

مهدی جمالی قهدریجانی  
دانشگاه آزاد اسلامی واحد نجف آباد  
**jamali.tmu@gmail.com**

## فصل ۷: تحلیل ابعادی و تشابه

□ اغلب پدیده های مکانیک سیالات به صورت پیچیده به هندسه و پارامترهای جریان وابسته اند. به طور مثال نیروی درگ بر روی یک کره ساکن غوطه ور در یک جریان یکنواخت را در نظر بگیرید. چه آزمایش هایی باید صورت بگیرد تا بتوان نیروی درگ وارد بر کره را تعیین کرد؟ برای جواب این سوال باید پارامترهایی که برای تعیین نیروی درگ اهمیت دارند را مشخص کرد. به طور مشخص انتظار داریم نیروی درگ به اندازه کره (که با قطر آن مشخص می شود)، سرعت جریان سیال، لزجت سیال و چگالی آن مرتبط باشد. رابطه زیر این ارتباط را نشان می دهد.

$$F = f(D, V, \rho, \mu)$$

□ حال فرض کنید برای بررسی اثر هر یک از پارامترهای مذکور بر روی نیروی درگ تنها ۱۰ مقدار مختلف مورد تست قرار بگیرد. در این صورت به  $10^4$  تست احتیاج است. این تعداد تست موجب تحمیل هزینه و زمان زیادی می شود. علاوه بر آن مشکل چگونگی ارزیابی نتایج و بهره برداری از آن نیز مطرح است. خوشبختانه با استفاده از تحلیل ابعادی امکان کاهش تعداد تست ها فراهم می شود.

## قضیه پای باکینگهام (*Buckingham Pi Theorem*)

□ قضیه پای باکینگهام بیان می کند یک رابطه داده شده از  $n$  پارامتر به فرم

$$g(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$$

می توانند در  $n-m$  نسبت بی بعد مستقل یا  $\Pi$  دسته بندی شوند که به صورت تابع زیر نشان داده می شوند:

$$G(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}) = 0 \quad \text{or} \quad \Pi_1 = G_1(\Pi_2, \dots, \Pi_{n-m})$$

□ تعداد  $m$  معمولاً و نه همیشه برابر است با کمترین تعداد ابعاد مستقل مورد نیاز برای تعیین ابعاد همه پارامترها ( $\Gamma$ )

□ این تئوری شکل تابع  $G$  یا  $G_1$  را پیش بینی نمی کند و این تابع باید به صورت تجربی برآورد شود.

## تعیین پارامترهای بی بعد

- گام ۱: تمام پارامترهای ابعادی دخیل را لیست کنید.
- گام ۲: دستگاه ابعاد اولیه پایه را انتخاب کنید.
- گام ۳: همه ابعاد پارامترها را در جملات اولیه لیست کنید.
- گام ۴: مجموعه ای از پارامترهای تکراری که شامل همه ابعاد اصلی می شوند، انتخاب کنید. هیچ یک از پارامترهای تکراری نباید ابعادی که توانی از پارامتر تکراری دیگر هستند، داشته باشند. به طور مثال طول  $L$  و ممان اینرسی  $L^4$  نباید به عنوان پارامتر تکراری در نظر گرفته شوند. پارامترهای وابسته را نباید به عنوان پارامتر تکراری در نظر گرفت. همچنین توصیه می شود لزجت نیز به عنوان پارامتر تکراری در نظر گرفته نشود.
- گام ۵: معادلات ابعادی را تنظیم کنید. پارامترهای تکراری را با هریک از پارامترهای دیگر به نوبت ترکیب کرده و گروه های بی بعد را تشکیل دهید.  $n-m$  معادله بدست خواهد آمد که با حل آنها  $n-m$  گروه بی بعد حاصل می شود. اگر  $n-m=1$  شود آنگاه تنها یک پارامتر بی بعد  $\Pi$  بدست می آید. در این مورد قضیه پای باکینگهام پیش بیان می کند که پارامتر  $\Pi$  باید یک ثابت باشد.
- گام ۶: گروه های بدست آمده در بالا را از نظر بی بعد بودن چک کنید.

## تعیین پارامترهای بی بعد- مثال

□ نیروی درگ  $F$  بر روی یک کره صاف به سرعت جریان  $V$ ، قطر کره  $D$ ، چگالی سیال  $\rho$ ، ولزجت سیال  $\mu$  بستگی دارد. مجموعه ای از گروه های بی بعد که می توانند برای مرتبط کردن داده های آزمایشگاهی استفاده شوند را بدست آورید.

□ حل: ابتدا تمام پارامترها را لیست کرده و با انتخاب

دستگاه  $MLt$  ابعاد هر پارامتر را تعیین می کنیم.

$$F = f(\rho, V, D, \mu)$$

$$\textcircled{1} \quad F \quad V \quad D \quad \rho \quad \mu \quad n = 5 \text{ dimensional parameters}$$

② Select primary dimensions  $M, L$ , and  $t$ .

$$\textcircled{3} \quad F \quad V \quad D \quad \rho \quad \mu$$

$$\frac{ML}{t^2} \quad \frac{L}{t} \quad L \quad \frac{M}{L^3} \quad \frac{M}{Lt}$$

$$r = 3 \text{ primary dimensions}$$

□ توجه کنید برای یافتن ابعاد هر پارامتر می توان از روابط فیزیکی مربوطه کمک گرفت.

## تعیین پارامترهای بی بعد- مثال

$$F = ma$$

$$[m] = M$$

$$a = \Delta V / \Delta t$$

$$V = \Delta x / \Delta t$$

$$[x] = L$$

$$[t] = t$$

$$[V] = \frac{L}{t}$$

$$[a] = \frac{\frac{L}{t}}{t} = \frac{L}{t^2}$$

$$[F] = \frac{ML}{t^2}$$

$$V = \Delta x / \Delta t \quad [D] = L$$

$$[x] = L$$

$$[t] = t$$

$$[V] = \frac{L}{t}$$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$[m] = M$$

$$[V] = L^3$$

$$[\rho] = \frac{M}{L^3}$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

$$\tau = \frac{F}{A}$$

$$[A] = L^2$$

$$[F] = \frac{ML}{t^2}$$

$$[\tau] = \frac{\frac{ML}{t^2}}{L^2} = \frac{M}{Lt^2}$$

$$\left[ \frac{du}{dy} \right] = \frac{\frac{L}{t}}{L} = \frac{1}{t}$$

$$[\mu] = \frac{M}{Lt^2} / \frac{1}{t} = \frac{M}{Lt}$$

## تعیین پارامترهای بی بعد- مثال

□ مرحله چهارم انتخاب پارامترهای تکراری است.  $\rho, V, D.$   $m = r = 3$

□ در گام پنجم باید گروه های بی بعد که تعداد آنها  $m-n=2$  است را بدست آورد.

$$\Pi_1 = \rho^a V^b D^c F \quad \text{and} \quad \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{L}{t}\right)^b (L)^c \left(\frac{ML}{t^2}\right) = M^0 L^0 t^0$$

$$\left. \begin{array}{l} M: \quad a + 1 = 0 \\ L: \quad -3a + b + c + 1 = 0 \\ t: \quad -b - 2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ c = -2 \\ b = -2 \end{array} \quad \text{Therefore, } \Pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2}$$

$$\Pi_2 = \rho^d V^e D^f \mu \quad \text{and} \quad \left(\frac{M}{L^3}\right)^d \left(\frac{L}{t}\right)^e (L)^f \left(\frac{M}{Lt}\right) = M^0 L^0 t^0$$

$$\left. \begin{array}{l} M: \quad d + 1 = 0 \\ L: \quad -3d + e + f - 1 = 0 \\ t: \quad -e - 1 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} d = -1 \\ f = -1 \\ e = -1 \end{array} \quad \text{Therefore, } \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D}$$



## تعیین پارامترهای بی بعد- مثال

□ در مرحله ششم می بایست بی بعد بودن گروه های بدست آمده را با یک دستگاه آحاد دیگر چک کرد. به طور مثال در اینجا اینکار با دستگاه FLt صورت گرفته است.

$$[\Pi_1] = \left[ \frac{F}{\rho V^2 D^2} \right] \quad \text{and} \quad F \frac{L^4}{Ft^2} \left( \frac{t}{L} \right)^2 \frac{1}{L^2} = 1$$

$$[\Pi_2] = \left[ \frac{\mu}{\rho VD} \right] \quad \text{and} \quad \frac{Ft}{L^2} \frac{L^4}{Ft^2} \frac{t}{L} \frac{1}{L} = 1$$

□ پس از اطمینان از صحت محاسبات می توان گروه های بی بعد را به صورت زیر نمایش داد:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2) \quad \longrightarrow \quad \frac{F}{\rho V^2 D^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho VD}\right)$$

## تعیین پارامترهای بی بعد- مثال

- افت فشار  $\Delta p$  برای یک جریان پایا و تراکم ناپذیر لزج درون یک لوله افقی به طول لوله  $l$ ، سرعت متوسط جریان  $\bar{V}$  لزجت سیال  $\mu$  قطر لوله  $D$ ، چگالی سیال  $\rho$  و ارتفاع زبری  $e$  وابسته است. گروه های بی بعدی که برای مرتبط کردن داده های تجربی می توان استفاده کرده را تعیین کنید.
- حل: همانند مثال قبل گام به گام جلو می رویم.

$$\Delta p = f(\rho, \bar{V}, D, l, \mu, e)$$

$$\textcircled{1} \quad \Delta p \quad \rho \quad \mu \quad \bar{V} \quad l \quad D \quad e \quad n = 7 \text{ dimensional parameters}$$

② Choose primary dimensions  $M, L$ , and  $t$ .

$$\textcircled{3} \quad \Delta p \quad \rho \quad \mu \quad \bar{V} \quad l \quad D \quad e$$

$$\frac{M}{Lt^2} \quad \frac{M}{L^3} \quad \frac{M}{Lt} \quad \frac{L}{t} \quad L \quad L \quad L \quad r = 3 \text{ primary dimensions}$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Select repeating parameters } \rho, \bar{V}, D. \quad m = r = 3 \text{ repeating parameters}$$

$$\textcircled{5} \quad \text{Then } n - m = 4$$

## تعیین پارامترهای بی بعد - مثال

$$\Pi_1 = \rho^a \bar{V}^b D^c \Delta p \quad \text{and}$$

$$\left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{L}{t}\right)^b (L)^c \left(\frac{M}{Lt^2}\right) = M^0 L^0 t^0$$

$$\left. \begin{array}{l} M: \quad 0 = a + 1 \\ L: \quad 0 = -3a + b + c - 1 \\ t: \quad 0 = -b - 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{array}$$

$$\Pi_1 = \rho^{-1} \bar{V}^{-2} D^0 \Delta p = \frac{\Delta p}{\rho \bar{V}^2}$$

$$\Pi_2 = \rho^d \bar{V}^e D^f \mu \quad \text{and}$$

$$\left(\frac{M}{L^3}\right)^d \left(\frac{L}{t}\right)^e (L)^f \frac{M}{Lt} = M^0 L^0 t^0$$

$$\left. \begin{array}{l} M: \quad 0 = d + 1 \\ L: \quad 0 = -3d + e + f - 1 \\ t: \quad 0 = -e - 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} d = -1 \\ e = -1 \\ f = -1 \end{array}$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho \bar{V} D}$$

$$\Pi_3 = \rho^g \bar{V}^h D^i l \quad \text{and}$$

$$\left(\frac{M}{L^3}\right)^g \left(\frac{L}{t}\right)^h (L)^i L = M^0 L^0 t^0$$

$$\left. \begin{array}{l} M: \quad 0 = g \\ L: \quad 0 = -3g + h + i + 1 \\ t: \quad 0 = -h \end{array} \right\} \begin{array}{l} g = 0 \\ h = 0 \\ i = -1 \end{array}$$

$$\Pi_3 = \frac{l}{D}$$

$$\Pi_4 = \rho^j \bar{V}^k D^l e \quad \text{and}$$

$$\left(\frac{M}{L^3}\right)^j \left(\frac{L}{t}\right)^k (L)^l L = M^0 L^0 t^0$$

$$\left. \begin{array}{l} M: \quad 0 = j \\ L: \quad 0 = -3j + k + l + 1 \\ t: \quad 0 = -k \end{array} \right\} \begin{array}{l} j = 0 \\ k = 0 \\ l = -1 \end{array}$$

$$\Pi_4 = \frac{e}{D}$$

## تعیین پارامترهای بی بعد- مثال

□ در مرحله ششم می بایست بی بعد بودن گروه های بدست آمده را با یک دستگاه واحدهای دیگر چک کرد. به طور مثال در اینجا اینکار با دستگاه FLt صورت گرفته است.

$$\begin{aligned} [\Pi_1] &= \left[ \frac{\Delta p}{\rho \bar{V}^2} \right] \quad \text{and} \quad \frac{F}{L^2} \frac{L^4}{Ft^2} \frac{t^2}{L^2} = 1 & [\Pi_3] &= \left[ \frac{l}{D} \right] \quad \text{and} \quad \frac{L}{L} = 1 \\ [\Pi_2] &= \left[ \frac{\mu}{\rho \bar{V} D} \right] \quad \text{and} \quad \frac{Ft}{L^2} \frac{L^4}{Ft^2} \frac{t}{L} \frac{1}{L} = 1 & [\Pi_4] &= \left[ \frac{e}{D} \right] \quad \text{and} \quad \frac{L}{L} = 1 \end{aligned}$$

□ پس از اطمینان از صحت محاسبات می توان گروه های بی بعد را به صورت زیر نمایش داد:

$$\Pi_1 = f(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) \quad \longrightarrow \quad \frac{\Delta p}{\rho \bar{V}^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho \bar{V} D}, \frac{l}{D}, \frac{e}{D}\right)$$

## گروه های بی بعد مهم در مکانیک سیالات

□ عدد رینولدز که نسبت نیروهای اینرسی به نیروهای لزجت است.

$$Re = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{VL}{\nu} \quad \frac{\text{viscous}}{\text{inertia}} \sim \frac{\mu VL}{\rho V^2 L^2} = \frac{\mu}{\rho VL}$$

$$\text{inertia force} \sim \rho V^2 L^2$$

$$\text{Viscous force} \sim \tau A = \mu \frac{du}{dy} A \propto \mu \frac{V}{L} L^2 = \mu VL$$

□ عدد اویلر یا ضریب فشار که نسبت نیروهای فشاری به نیروهای اینرسی است.

$$Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho V^2}$$

$$\frac{\text{pressure}}{\text{inertia}} \sim \frac{\Delta p L^2}{\rho V^2 L^2} = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$$

$$\text{Pressure force} \sim \Delta p A \propto \Delta p L^2$$

$$\text{inertia force} \sim \rho V^2 L^2$$

□ عدد ماخ که نسبت نیروهای تراکم پذیری به نیروهای اینرسی است.

$$M = \frac{V}{c}$$

$$\frac{\text{compressibility force}}{\text{inertia}} \sim \frac{E_v L^2}{\rho V^2 L^2} = \frac{E_v}{\rho V^2}$$

$$\text{Compressibility force} \sim E_v A \propto E_v L^2 \quad \text{inertia force} \sim \rho V^2 L^2$$

- برای آنکه مدل (model) و نمونه اصلی (prototype) با هم مشابه باشند لازم است تشابه هندسی، حرکتی (*kinematically*) و دینامیکی (*Dynamically*) داشته باشند.
- برای برقراری تشابه هندسی لازم است مدل و نمونه شکل مشابهی داشته باشند و تمام ابعاد مدل با یک ضریب ثابت با ابعاد متناظر نمونه مرتبط باشد.
- برای برقراری تشابه حرکتی لازم است در نقاط متناظر بر روی مدل و نمونه اصلی بردار سرعت هر دو جهت یکسانی داشته باشد و تنها مقدار آن با یک ضریب ثابت با هم تفاوت کند.
- از شرط برقراری تشابه چون جهت بردار سرعت در مدل و نمونه یکسان است، در نتیجه الگوی خطوط جریان هر دو نیز مشابه بوده و با یک ضریب ثابت با هم مرتبط می شوند. از آنجایی که مرزها محدوده خطوط جریان را تشکیل می دهند، در نتیجه جریان هایی که از لحاظ حرکتی مشابه هستند باید از نظر هندسی نیز مشابه باشند. علاوه بر این برای تشابه حرکتی لازم است رژیم جریان در مدل و نمونه یکسان باشد. به طور مثال هر دو تراکم پذیر، یا هر دو آشفته و...
- تشابه دینامیکی زمانی برقرار است که توزیع نیروهای همجنس در دو جریان در نقاط متناظر هم جهت بوده و تنها مقدار آنها با یک ضریب ثابت با هم مرتبط شوند.

□ برای آنکه دو جریان از نظر دینامیکی مشابه باشند تشابه حرکتی لازم است اما کافی نیست. توجه کنید تشابه حرکتی خود نیاز به تشابه هندسی دارد. وقتی دو جریان از لحاظ دینامیکی مشابه باشند آنگاه می توان داده های اندازه گیری شده در میدان جریان مدل را با شرایط نمونه مرتبط کرد. اما برای آنکه اطمینان حاصل کنیم جریان مدل و نمونه از لحاظ دینامیکی مشابه هستند لازم است ضمن آنکه جریان ها باید از لحاظ هندسی مشابه باشند گروه های بی بعد مستقل بدست آمده از قضیه پای باکینگهام نیز با هم برابر باشند. در این صورت نه تنها تشابه دینامیکی برقرار می شود، بلکه گروه بی بعد وابسته دو جریان نیز باهم برابر خواهد شد.

□ به عبارت دیگر در تابع زیر لازم است  $\Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}$  برای جریان مدل و جریان نمونه با هم برابر باشند تا تشابه دینامیکی برقرار گردد و علاوه بر آن  $\Pi_1$  نیز هر دو جریان با هم برابر خواهد شد.

$$\Pi_1 = G_1(\Pi_2, \dots, \Pi_{n-m})$$



## تشابه و مطالعات مدل – مثال

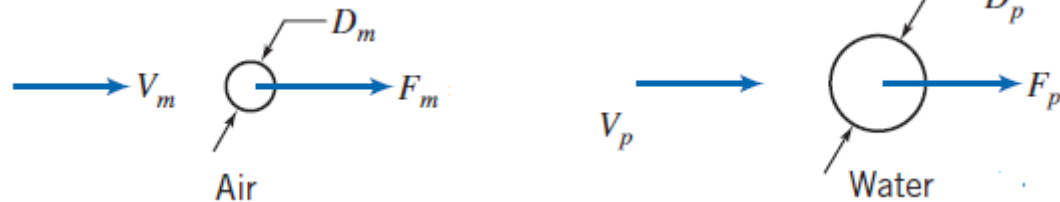
□ قرار است نیروی درگ اعمالی بر یک فرستنده بر اساس داده های تست تونل باد بر آورد شود. نمونه کره ای به قطر  $30.48 \text{ cm}$  است که در آب دریا با سرعت  $2.57 \text{ m/s}$  کشیده خواهد شد. قطر مدل  $15.24 \text{ cm}$  بوده و در تونل باد تست می شود. سرعت هوای در تست تونل باد را بیابید. اگر درگ اندازه گیری شده مدل در شرایط تست  $24.82 \text{ N}$  باشد، درگ نمونه اصلی را بدست آورید.

$$\rho_{air} = 1.226 \text{ kg/m}^3$$

$$v_{air} = 1.46 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\rho_{sea \text{ water}} = 1025.6 \text{ kg/m}^3$$

$$v_{sea \text{ water}} = 1.57 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$



□ حل: از مثال های قبل گروه های بی بعد برای مرتبط کردن پارامترهای موثر بر نیروی درگ یک کره بر اساس تئوری پای باکینگهام بدست آمد.

$$F = f(D, V, \rho, \mu) \quad \longrightarrow \quad \frac{F}{\rho V^2 D^2} = f_1 \left( \frac{\rho V D}{\mu} \right)$$



## تشابه و مطالعات مدل – مثال

- برای اطمینان از تشابه دینامیکی لازم است گروه های بی بعد مستقل در دو جریان مدل و نمونه (که در اینجا تنها یک گروه است) برابر باشند. لذا داریم:

$$\left(\frac{\rho VD}{\mu}\right)_{\text{model}} = \left(\frac{\rho VD}{\mu}\right)_{\text{prototype}}$$

- با جایگذاری مقادیر داده شده در تساوی فوق خواهیم داشت:

$$V_{\text{model}} = 47.8 \text{ m/s}$$

- همچنین برای بدست آوردن نیروی درگ (پارامتر وابسته) لازم است گروه بی بعد هر دو جریان را با هم برابر قرار داد. با جایگذاری مقادیر داده شده داریم:

$$\left(\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right)_{\text{model}} = \left(\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right)_{\text{prototype}} \quad \rightarrow \quad F_{\text{prototype}} = 239.8 \text{ N}$$