



دینامیک کوانتومی یک نوسانگرهماهنگ اتلافی با جفت شدگی وابسته به سرعت

محسن دایی محمد^{۱*} و محمد نیلی احمد ابادی^۲

۱. گروه فیزیک، واحد نجف اباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف اباد

۲. گروه ریاضی، واحد نجف اباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف اباد

پست الکترونیکی: m.daeimohammad@pco.iaun.ac.ir

(دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۱۰/۲۷؛ دریافت نسخه نهایی: ۱۴۰۰/۱/۲۳)

چکیده

نظریه کوانتومی یک نوسانگرهماهنگ اتلافی از سال ۱۹۳۹ میلادی به طور پیوسته مورد بررسی قرار گرفته است. برای کوانتش یک نوسانگر اتلافی معمولاً از محیطی که شامل تعدادی نوسانگر محدود و گسسته است استفاده می شود. با وجود این یک مجموعه از نوسانگرهای گسسته قادر نیست نظریه کوانتومی یک اتلاف اهمی (اتلاف متناسب با سرعت) را مورد بررسی قرار دهد. در حالی که با استفاده از یک محیط که شامل یک مجموعه پیوستاری از نوسانگرهای هماهنگ است می توان یک نوسانگرهماهنگ با اتلاف اهمی و به طور کلی یک نوسانگر اتلافی را مورد بررسی قرار داد. در این تحقیق از یک مجموعه پیوستاری از نوسانگرهای هماهنگ برای بررسی اتلاف اهمی استفاده شده است. استفاده از یک محیط پیوستاری به جای یک محیط گسسته، باعث غنی سازی نتایج سامانه دینامیکی خواهد شد. از نتایج این تحقیق می توان برای بررسی سامانه های نانو- مکانیکی و سامانه های اپتو- مکانیکی استفاده کرد.

واژه های کلیدی: نوسانگرهماهنگ اتلافی، محیط پیوستاری، کوانتش هامیلتونی، اتلاف اهمی (متناسب با سرعت)

۱. مقدمه

در معادله (۱) و (یا تقویت با $t \rightarrow -t$) منجر به دشواری هایی در کوانتش می شود؛ مشکلی که تحقیقات گسترده ای برای رفع آن از سال ۱۹۳۰ میلادی صورت گرفته است [۱-۳]. در این مقاله، ما با یک روش کاملاً متفاوت به کوانتش معادله (۱) می پردازیم. مشکل اصلی در کوانتش معادله (۱) پیدا کردن هامیلتونی مورد نیاز برای یافتن تحول زمانی است (برای بررسی به روش انتگرال مسیر دانستن لاگرانژی کافی است). برای معادله (۱) یک لاگرانژی یا هامیلتونی وجود دارد ولی به جهت اتلاف (یا

تعداد کمی از سامانه های دینامیکی کلاسیکی وجود دارند که به اندازه یک نوسانگر اتلافی یک بعدی اهمیت و سادگی داشته باشند:

$$\ddot{q} + \gamma \dot{q} + \omega_0^2 q = f(t), \quad (1)$$

اما وقتی که این، تبدیل به یک نوسانگر کوانتومی اتلافی می شود دیگر روابط کوانتومی به سادگی قبل نخواهد بود. وجود اتلاف

که با یک محیط که شامل پیوستاری از نوسانگرها است که تمامی آنها بسامد مثبت دارند برهم کنش می‌کند. استفاده از یک محیط پیوستاری به جای یک محیط گسسته، باعث غنی سازی سامانه دینامیکی خواهد شد. به دلیل این که سامانه مورد بررسی، تعداد درجات آزادی غیرقابل شمارش دارد بسیاری از ویژگی‌های یک میدان کوانتومی را خواهد داشت و از نظر کیفی با یک مجموعه قابل شمارش از نوسانگرها، حتی نامتناهی، متفاوت است. در اینجا ما یک روش کلی برای حل سامانه دینامیکی ارائه می‌کنیم و به طور دقیق اتلافی و تقویت اهمی را بررسی می‌کنیم که در واقع پیامد آن است که تابع جفت-شدگی خاصی را در نظر گرفته‌ایم. کوانتش برای اتلاف کلی و اتلاف اهمی به طور کامل مورد بررسی قرار می‌گیرد و در مورد حمام حرارتی در تعادل گرمایی، ارزش انتظاری عملگرهای متفاوت را نسبت به متغیرهای محیط به دست می‌آوریم.

محیط پیوستاری اولین بار توسط هاتنرو بارنت در مرجع [۲۳] معرفی شد؛ مقاله‌ای که بسیار شناخته شده است ولی با این وجود نوآوری و اهمیت روش‌های به کار رفته در آن کمتر مورد توجه قرار گرفته است. از یک محیط پیوستاری می‌توان برای کوانتش بنادای معادلات ماکسول ماکروسکوپیکی برای یک محیط دلخواه که از رابطه کرامرز-کرونینگ پیروی می‌کند، استفاده کرد [۲۴ و ۲۵]. برای مثال محیط‌های غیرهمسانگرد و متحرک دو نمونه از این محیط‌ها هستند [۲۶ و ۲۷]. در این تحقیق قدرت کاربرد یک محیط پیوستاری با بررسی یک نوسانگر اتلافی و کوانتش آن نشان داده شده است.

نوسانگر هماهنگ کوانتومی اتلافی وجه اشتراک زیادی با نظریه نورد محیط‌های ماکروسکوپی دارد. این یک چارچوب جایگزین برای توصیف نوسانگر کوانتومی ماکروسکوپی است، که از نظر تجربی بسیار مورد توجه قرار گرفته است [۲۸-۳۲]. در اینجا به دلیل استفاده از یک محیط پیوستاری، محاسبات ریاضی نسبت به یک محیط گسسته پیچیده تر خواهد بود. بسیاری از جنبه‌های ریاضی این دستگاه هنوز به طور کامل بررسی نشده است. به طور کلی به دلیل استفاده از یک محیط

تقویت) وابسته به زمان خواهد بود و این مسئله باعث بروز مشکلاتی در روابط کوانتش بنادای خواهد شد [۱ و ۲]. اگر اتلاف انرژی را از طریق وارد کردن سامانه‌ای با تعدادی درجه آزادی در محاسبات بررسی کنیم مشکل وابستگی هامیلتونی به زمان را نخواهیم داشت. ساده‌ترین روش بررسی این مسئله، نوشتن هامیلتونی به دو قسمت مجزا است که توصیف کننده یک نوسانگر اتلافی یا یک نوسانگر تقویت شده با یک انرژی کل ثابت است [۴]. اما متغیرهای بنادای سامانه [۴] موقعیت و اندازه حرکت دو نوسانگر نخواهد بود، به طوری که بازم امکان وارد کردن مستقیم رابطه جابه‌جایی بنادای روی هر نوسانگر وجود ندارد [۲، ۱ و ۹-۵]. این دو برابر شدن درجات برای یک مجموعه از بی‌نهایت نوسانگر در مورد میدان‌های کوانتومی اتلافی مورد استفاده قرار گرفته است [۱۰]. در حال حاضر بهترین روش برای بررسی یک نوسانگر هماهنگ اتلافی، بررسی دینامیکی یک نوسانگر آزاد در حضور یک محیط است. یک روش کلی که در همه جا استفاده می‌شود به کارگیری مجموعه گسسته‌ای از نوسانگرها به جای محیط است. این نوع مدل هامیلتونی اولین بار توسط ما گلینسکی معرفی شد [۱۱] و بهترین روش برای بررسی حرکت براونی است (یک ذره آزاد در یک محیط) [۱ و ۱۲-۲۰]. حدی که اتلافی اهمی ایجاد می‌کند باعث کاهش فاصله بسامد بین نوسانگرها می‌شود ولی با این وجود بسامد نوسانگرها را بالا نگه می‌دارد. به عبارت دیگر محیط به طور مؤثر یک محیط پیوستاری در نظر گرفته می‌شود، ولی بعد از این که معادلات دینامیکی حل شد و فرض شد یک مجموعه گسسته است. تاتارسکی نشان داده است که با یک محیط گسسته امکان دسترسی به یک اتلاف اهمی وجود ندارد و ظهور یک اتلافی اهمی از طریق حد پیوستاری بعد از حل معادلات دینامیکی امکان پذیر است [۲۱]. علاوه بر روش‌هایی که به تازگی ارائه شده که در آنها به دنبال استفاده از روش‌های استاندارد کوانتش هستند، بررسی‌های پدیده شناختی بر روی نوسانگر اتلافی صورت گرفته که در آن کوانتش به آسانی امکان پذیر است [۲۲] یک نمونه از آن است). در این تحقیق، ما یک نوسانگرهماهنگ را در نظر می‌گیریم

معادله توصیف شده در رابطه (۲) یک مدل ساده شده هوترن-بارنت [۲۳] است که یک دی الکتریک با یک میدان الکترومغناطیسی جفت می‌شود. اگر میدان الکترومغناطیس و وابستگی فضایی محیط را حذف کنیم مدل هوترن-بارنت تقریباً به شکل معادله (۲) خواهد بود، با این تفاوت که جفت شدگی-ها از طریق q, \dot{X}_ω انجام می‌شود. اختلاف اصلی مدل ارائه شده در رابطه (۲) با مدل هوترن-بارنت غیر از ساده‌سازی‌های که اشاره شد در سه مورد زیر است. الف) ما برای حل معادلات دینامیکی محیط فقط به جواب‌های رو به جلو و رو به عقب بسنده نمی‌کنیم. ب) در اغلب مواقع ما تابع جفت شدگی را یک تابع خاص در نظر می‌گیریم در حالی که در مدل هوترن-بارنت، تابع جفت شدگی را عمومی در نظر گرفته است. ج) جملات بر هم کنش متفاوت است. معادلات اوایلر-لاگرانژی به صورت زیر خواهند بود:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q + \int_0^\infty d\omega \alpha(\omega) \dot{X}_\omega = 0, \quad (4)$$

$$\ddot{X}_\omega + \omega^2 X_\omega - \alpha(\omega) \dot{q} = 0, \quad (5)$$

از حل معادله (۵) داریم:

$$X_\omega = A_s(\omega) \cos \omega t + B_s(\omega) \sin \omega t + \frac{\alpha(\omega)}{\omega} \int_0^t dt' \dot{q}(t') \sin[\omega(t-t')] e^{-\epsilon^+ |t-t'|}, \quad (6)$$

$$A_s(\omega) = X_\omega(0), \quad B_s(\omega) = \frac{1}{\omega} \dot{X}_\omega(0),$$

که در آن 0^+ نشان‌دهنده یک مقدار بی‌نهایت کوچک مثبت است. با استفاده از (۶) می‌توانیم جابه‌جایی $X_\omega(0)$ و سرعت $\dot{X}_\omega(0)$ به محیط تحمیل کنیم (این شرایط اولیه نیست؛ زیرا رابطه (۶) برای همه زمان‌ها برقرار است). انتخاب $t=0$ دلخواه است و ما می‌توانیم بدون از دست دادن کلیت شرایط اولیه را برای یک زمان محدود غیر صفر در نظر بگیریم. وجود جمله‌نمایی در رابطه (۶) برای استفاده از تبدیلات فوریه بسیار مهم است و به طریق زیر قابل درک است. برای حل معادله (۶) می‌توانیم از ساختار تابع گرین $G(t)$ که در معادله زیر صدق می‌کند استفاده کنیم:

$$\ddot{G} + \omega^2 G = \delta(t), \quad (7)$$

پیوستاری، نتایج بسیار مهم‌تری برای یک نوسانگر کوانتومی اتلافی نسبت به یک محیط گسسته به دست می‌آوریم. ساختار این مقاله به صورت زیر است. در قسمت دوم لاگرانژی و معادلات حرکت را برای یک نوسانگر جفت شده با یک محیط پیوستاری به دست می‌آوریم. در بخش‌های ۳ و ۴ دینامیک کوانتومی را برای یک جفت شدگی خاص که متناسب با سرعت است، بررسی می‌کنیم. در قسمت ۵ هامیلتونی را کوانتیزه می‌کنیم و با استفاده از تبدیلات لاپلاس، جواب‌های معادلات حرکت را به دست می‌آوریم. در قسمت ۶ فرض می‌کنیم محیط یک حمام حرارتی باشد و ارزش انتظاری عملگرهای مختلف را نسبت به متغیرهای محیط، با استفاده از تقریب ویگنر-ویسکوف به دست می‌آوریم. سرانجام در قسمت ۷ نتایج را می‌آوریم.

۲. لاگرانژی و معادلات دینامیکی

ما یک سامانه دینامیکی در نظر می‌گیریم که توسط معادله لاگرانژی زیر توصیف می‌شود:

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \omega_0^2 q^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega (\dot{X}_\omega^2 - \omega^2 X_\omega^2) + \int_0^\infty d\omega \alpha(\omega) \dot{q} X_\omega, \quad (2)$$

در اینجا q مکان و ω_0 بسامد نوسانگر است و همچنین X_ω مکان و ω بسامد نوسانگرهای محیط است. نوسانگر و محیط به شکل خطی و از طریق سرعت با هم جفت می‌شوند و $\alpha(\omega)$ تابع جفت‌شدگی است. همچنین فرض کرده‌ایم نوسانگرهای محیط نمی‌توانند به طور مستقیم با یکدیگر جفت شوند. متغیرهای دینامیکی در رابطه (۲) به معنی میدان نیستند، اما وابستگی X_ω به کمیت پیوستاری ω بر خلاف یک محیط شامل نوسانگرهای گسسته، بسیاری از خصوصیات یک نظریه میدان را به این سامانه می‌بخشد. انرژی کل سامانه توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$E = \frac{1}{2} \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 q^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega (\dot{X}_\omega^2 + \omega^2 X_\omega^2) - \int_0^\infty d\omega \alpha(\omega) \dot{q} X_\omega, \quad (3)$$

$$X_{\omega}(\omega') = \pi [A_{\omega}(\omega) + iB_{\omega}(\omega)] \delta(\omega - \omega') + \pi [A_{\omega}(\omega) - iB_{\omega}(\omega)] \delta(\omega + \omega') + P \frac{\alpha(\omega) \dot{q}(\omega')}{\omega' - \omega^r} + \frac{\alpha(\omega)}{r\omega} [\delta(\omega - \omega') - \delta(\omega + \omega')] P \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\dot{q}(\xi)}{\xi - \omega'}, \quad (13)$$

در اینجا عدد بی نهایت کوچک 0^+ که در معادله (۶) وارد شده است باعث به وجود آمدن مقدار اصلی کوشی شده که آن را با نماد P نشان داده ایم. اگر از معادلات (۴) و (۵) تبدیل فوریه بگیریم به دست می آوریم:

$$(-\omega'^r + \omega_r) q(\omega') + \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \alpha(\omega) \dot{X}_{\omega}(\omega') = 0, \quad (14)$$

$$(-\omega'^r + \omega_r) X_{\omega}(\omega') - \alpha(\omega) \dot{q}(\omega') = 0, \quad (15)$$

با استفاده از رابطه

$$\dot{X}_{\omega}(\omega') = -i\omega' X_{\omega}(\omega'), \dot{q}(\omega') = -i\omega' q(\omega')$$

و استفاده از روابط (۱۳) و (۱۴) می توان نوشت:

$$\left[(\omega'^r - \omega_r) q(\omega') + i\omega' \dot{q}(\omega') P \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\alpha^r(\omega)}{\omega' - \omega^r} \right] + i \frac{\alpha^r(|\omega'|)}{r} P \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\dot{q}(\xi)}{\xi - \omega'} = -i\pi\omega' \alpha(|\omega'|) [A_{\omega}(|\omega'|) + i \operatorname{sgn}(\omega') B_{\omega}(|\omega'|)], \quad (16)$$

معادله بالا، رابطه $q^*(\omega') = q(-\omega')$ را که برای حقیقی بودن $q(t)$ لازم است برآورده می کند. هنگامی که $q(\omega)$ را از رابطه (۱۶) به دست آوردیم می توانیم با جایگذاری آن در (۶) تابع $X_{\omega}(t)$ را نیز به دست آوریم. در به دست آوردن رابطه (۱۶) فرض کرده ایم انتگرال های زمان و بسامد با هم جابه جاپذیر باشند. اگر این شرط معتبر نباشد جواب به دست آمده برای $q(\omega')$ از معادله (۱۶) با جواب های $q(t), X_{\omega}(t)$ که از معادلات (۴ و ۵) به دست می آید، یکسان نیست. در واقع برای یک ثابت جفت شدگی ثابت (برای مثال مستقل از بسامد) $\alpha(\omega) = a$ انتگرال های زمانی و بسامدی با هم جابه جا نمی شوند، اما در این حالت معادلات حرکت درحوزه زمان به آسانی قابل حل خواهند بود و احتیاج به تبدیلات فوریه و تبدیل معادلات به حوزه بسامد نداریم. برای این که رابطه (۱۶) صادق

برای مثال توابع گرین رو به جلو $G_r(t)$ و روبه عقب $G_a(t)$ توسط معادلات زیر توصیف می شوند:

$$G_r = \frac{1}{\omega} \theta(t) \sin \omega t e^{-\omega^+ t}, \quad (8)$$

$$G_a = -\frac{1}{\omega} \theta(-t) \sin \omega t e^{+\omega t}, \quad (9)$$

اینجا $\theta(t)$ تابع پله ای است. جملات نمایی در معادلات (۸) و (۹) برای وجود تبدیلات فوریه ضروری است و عدد بی نهایت کوچک 0^+ نشان دهنده قطب های توابع گرین است. همچنین تابع G_r در نیمه بالای صفحه مختلط ω تحلیلی است. تابع G_a در نیمه پایینی صفحه مختلط ω نیز تحلیلی است. جواب عمومی رابطه (۶) از تفاضل توابع گرین رو به جلو و رو به عقب به دست می آید:

$$G_r - G_a = \frac{1}{\omega} \sin \omega t e^{-\omega^+ |t|}, \quad (10)$$

که در واقع جواب همگن معادله (۷) است (معادله (۷) بدون قسمت دلتا). این باعث به وجود آمدن عامل نمایی در (۶) می شود که برای تعریف تبدیل فوریه $X_{\omega}(t)$ ضروری است. با جایگذاری (۶) در رابطه (۴) به دست می آوریم:

$$\ddot{q} + \omega_r q + \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^t \dot{q}(t') \frac{\alpha^r(\omega)}{\omega} \sin[\omega(t-t')] e^{-\omega^+ |t-t'|} + \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \alpha(\omega) \left\{ \frac{1}{r} [A'_{\omega}(\omega) + iB'_{\omega}(\omega)] \exp(-i\omega t) + c.c. \right\} = 0, \quad (11)$$

در اینجا $A'_{\omega}(\omega) = -i\omega B_{\omega}(\omega)$ و $B'_{\omega}(\omega) = i\omega A_{\omega}(\omega)$ است. حل معادله دیفرانسیل - انتگرال فوق درحوزه زمان برای اغلب توابع جفت شدگی $\alpha(\omega)$ دشوار است. اگر معادله فوق درحوزه بسامد نوشته شود با انتخاب تابع جفت شدگی $\alpha(\omega)$ به روش های سیستماتیک قابل حل خواهد بود. برای سادگی محاسبات به جای این که از معادله (۱۱) تبدیل فوریه بگیریم از معادله (۶) تبدیل فوریه می گیریم و نتیجه حاصل شده را در تبدیل فوریه معادله (۴) قرار می دهیم. با استفاده از رابطه

$$f(t) = \frac{1}{r\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) \exp(-i\omega t), \quad (12)$$

بین فضای زمان و بسامد و استفاده از رابطه (۶) می توان نوشت:

تراستفاده کرده‌ایم با مباحث چالش برانگیزتر ریاضیات سروکار داریم. در اینجا به جای ثابت جفت شدگی که فقط مقایر گسسته می‌پذیرد از یک تابع پیوستاری $\alpha(\omega)$ که هر تابعی در فضای توابع حقیقی می‌تواند باشد استفاده کرده‌ایم. علاوه بر این برای بعضی توابع جفت شدگی $\alpha(\omega)$ برای این که معادله (۱۶) حل پذیر باشد احتیاج به اعمال محدودیت‌هایی روی $A_R(\omega), B_R(\omega)$ می‌باشیم در حالی که برای بعضی از توابع جفت شدگی، چنین محدودیتی لازم نیست [۳۵ و ۳۶]. نظریه ریاضیات عمومی نشان می‌دهد که یک زیرفضا از توابع جفت شدگی وجود دارد که معادله (۱۶) جواب‌های بدیهی می‌دهد، اگرچه به هیچ وجه مشخص نیست این زیرفضا چیست. علاوه بر شکل معادله (۶)، احتیاج به یک جواب کلی‌تر برای معادله (۵) داریم که در آن امکان تحمیل شرایط برای زمان‌های گذشته یا آینده متناهی فراهم باشد. در اینجا گذشته در بی‌نهایت ($t \rightarrow -\infty$) انتخاب می‌شود، و شکل لازم برای جواب عمومی معادله (۵) از تابع گرین رو به عقب (۸) به دست می‌آید.

$$X_\omega = A_R(\omega) \cos \omega t + B_R(\omega) \sin \omega t + \frac{\alpha(\omega)}{\omega} \int_{-\infty}^t dt' \dot{q}(t') \sin[\omega(t-t')] e^{-\sigma^+ |t-t'|}, \quad (17)$$

در اینجا توابع $A_R(\omega), B_R(\omega)$ تعیین کننده مقادیر تابع $X_\omega(t)$ در حد $t \rightarrow -\infty$ است به شرط این که انتگرال آخر در حد $t \rightarrow -\infty$ صفر باشد (ویژگی آخر ممکن است برای همه راه حل‌ها مناسب نباشد). با استفاده از روابط (۱۷) می‌توان نوشت:

$$\ddot{q} + \omega_\sigma q + \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t d\omega \int_{-\infty}^t dt' \dot{q}(t') \frac{\alpha^r(\omega)}{\omega} \sin[\omega(t-t')] e^{-\sigma^+ |t-t'|} + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha(\omega) \left\{ \frac{1}{r} [A_R(\omega) + iB_R(\omega)] \right\} = \sigma, \quad (18)$$

در اینجا $A_R'(\omega) = -i\omega A_R(\omega)$ و $B_R'(\omega) = -i\omega B_R(\omega)$ با گرفتن تبدیل فوریه از دو طرف معادله (۱۷) به دست می‌آوریم:

باشد باید رفتار تابع جفت شدگی به گونه‌ای باشد که انتگرال شامل $\alpha^2(\omega)$ و اگر نشود. به محض این که تابع جفت شدگی و حالت محیط در زمان $t=0$ تعیین شد، (۱۶) یک معادله انتگرال با مقدار اصلی کوشی ارائه می‌دهد که به عنوان یک معادله انتگرال منفرد شناخته می‌شود. در یک طبقه‌بندی استاندارد، معادله (۱۶) یک معادله انتگرال منفرد ناهمگن است. یک روش سیستماتیک برای حل معادله انتگرال منفرد وجود دارد که از برخی تحلیل‌های پیچیده ریمان و هیلبرت بهره می‌برد [۳۳ و ۳۴]. معادله انتگرالی (۱۶) با استفاده از نظریه توابع تحلیلی و داشتن شرایط مرزی قابل حل خواهد بود و معمولاً یک مسئله ریمان نامیده می‌شود (گاهی اوقات مسئله هیلبرت نیز نامیده می‌شود). اگر مسئله جواب باشد از روش‌های ریمان می‌توان جوابی برای آن یافت [۳۳ و ۳۴].

نکات زیر در مورد معادلات دینامیکی بالا بسیار مهم است. با داشتن تابع جفت شدگی و ضرایب $A_0(\omega'), B_0(\omega')$ ، معادله (۱۶) قابل حل است مشروط بر این که جواب در شرط $q(\omega') = q * (-\omega')$ صدق کند و انتگرال شامل $q(\omega')$ و اگر نشود. به عبارت دیگر ما می‌توانیم برای بررسی دینامیک نوسانگر q از مجموعه بزرگی از توابع $q(t)$ که تبدیل فوریه آنها وجود دارد استفاده کنیم و از رابطه (۱۶) برای یافتن مقادیر جابه‌جایی و سرعت محیط در $t=0$ که باعث ایجاد دینامیک $q(t)$ است استفاده کنیم. باید توجه داشت که برای جواب‌های $X_\omega(t), q(t)$ ممکن است تبدیلات فوریه وجود نداشته باشد برای مثال هیچ دلیل ریاضی برای محدود بودن تابع $q(t)$ وجود ندارد. حتی در صورت وجود $q(\omega)$ برای $q(t)$ تنها روش به دست آوردن آن، معادله (۱۶) است که البته وقتی امکان پذیر است که انتگرال‌های حاوی $q(\omega)$ وجود داشته باشند. به دلیل این که در اینجا از یک محیط پیوستاری که شامل بی‌نهایت نوسانگر مستقل است استفاده می‌کنیم، روابط دینامیکی کاملاً متفاوت از یک محیط گسسته شامل تعداد محدودی نوسانگر می‌شود. تجزیه و تحلیل سامانه دینامیکی متشکل از تعداد نوسانگر گسسته عمدتاً یک مسئله جبری است [۲۱]. در بررسی صورت گرفته در این مقاله به دلیل این که از دینامیک بسیار غنی -

$$P \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\alpha^r(\xi)}{\xi^r - \omega^r} = \frac{\gamma^r a^r \omega_s^r}{\omega^r + \gamma^r}, \quad (22)$$

با این انتخاب، تابع جفت شدگی معادله انتگرالی (۱۶) به صورت تبدیل خواهد شد:

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\dot{q}(\xi)}{\xi - \omega} = -\pi \left[\frac{\omega^r \gamma^r a^r \omega_s^r + (\omega^r - a^r \omega_s^r)(\omega^r + \gamma^r)}{a^r \omega_s^r \omega^r \gamma} \right] \dot{q}(\omega) - \frac{r\pi^r}{a\omega_s} \left(\frac{\omega^r + \gamma^r}{r\gamma} \right) [sgn(\omega) A_r(|\omega|) + iB_r(|\omega|)], \quad (23)$$

جواب عمومی معادله (۲۳) از حل معادله همگن زیر به دست می‌آید:

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\dot{q}(\xi)}{\xi - \omega} = -\pi \left[\frac{\omega^r \gamma^r a^r \omega_s^r + (\omega^r - a^r \omega_s^r)}{a^r \omega_s^r \omega^r \gamma} \right] \dot{q}(\omega), \quad (24)$$

از حل معادله (۲۴) می‌توانیم $q'(\omega)$ را به دست آوریم و سپس با گرفتن تبدیل فوریه از آن به دست می‌آوریم (پیوست الف را ببینید):

$$\dot{q}(t) = \frac{C_1}{\alpha^r + (t - \beta)^r} + \frac{C_2}{\alpha^r + (t + \beta)^r}, \quad (25)$$

سپس با انتگرال‌گیری از معادله (۲۵) به دست می‌آوریم:

$$q(t) = \frac{C_1}{\alpha} \text{Arctg} \left(\frac{t - \beta}{\alpha} \right) + \frac{C_2}{\alpha} \text{Arctg} \left(\frac{t + \beta}{\alpha} \right) + C_3 \quad (26)$$

در اینجا C_1, C_2, C_3 ثابت‌هایی دلخواه هستند و داریم:

$$\beta = \frac{\sqrt{r(a^r \omega_s^r - \gamma^r - \gamma^r a^r \omega_s^r) - \gamma^r a^r \omega_s^r}}{r}, \quad (27)$$

$$\alpha = -\frac{\gamma a^r \omega_s^r}{r}$$

با قرار دادن (۲۶) در معادله (۶) به دست می‌آوریم:

$$X_\omega(t) = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{a^r \omega_s^r - \gamma^r}} \left(-rCi \left(\left| \omega \left(-\sqrt{a^r \omega_s^r - \gamma^r} + t \right) \right| \right) \right) \omega \sqrt{a^r \omega_s^r - \gamma^r} \cos \left(\omega \left(-\sqrt{a^r \omega_s^r - \gamma^r} + t \right) \right) + rCi \left(\left| \sqrt{a^r \omega_s^r - \gamma^r} \omega \right| \right) \omega \sqrt{a^r \omega_s^r - \gamma^r} \cos \left(\omega \left(-\sqrt{a^r \omega_s^r - \gamma^r} + t \right) \right) + \left(\frac{-r\sqrt{a^r \omega_s^r - \gamma^r} \omega Si}{\left(\sqrt{a^r \omega_s^r - \gamma^r} \omega \right)} \right) + \pi \left| \sqrt{a^r \omega_s^r - \gamma^r} \omega \right|$$

$$X_\omega(\omega') = \pi \left[A_R(\omega) + iB_R(\omega) \right] \delta(\omega - \omega') + \pi \left[A_R(\omega) - iB_R(\omega) \right] \delta(\omega + \omega') + P \frac{\alpha(\omega) \dot{q}(\omega')}{\omega^r - \omega'^r} + \frac{i\pi\alpha(\omega) \dot{q}(\omega')}{r\omega} \left[\delta(\omega - \omega') - \delta(\omega + \omega') \right], \quad (19)$$

با جایگذاری معادله (۱۹) در معادله (۱۴) به دست می‌آوریم:

$$\left[\left(\omega'^r - \omega_s^r \right) q(\omega') + i\omega' \dot{q}(\omega') \right] + \frac{\pi\alpha^r(|\omega'|)}{r} \dot{q}(\omega) = -\pi\alpha(|\omega'|) \left[A_R(|\omega'|) + i sgn(\omega') B_R(|\omega'|) \right], \quad (20)$$

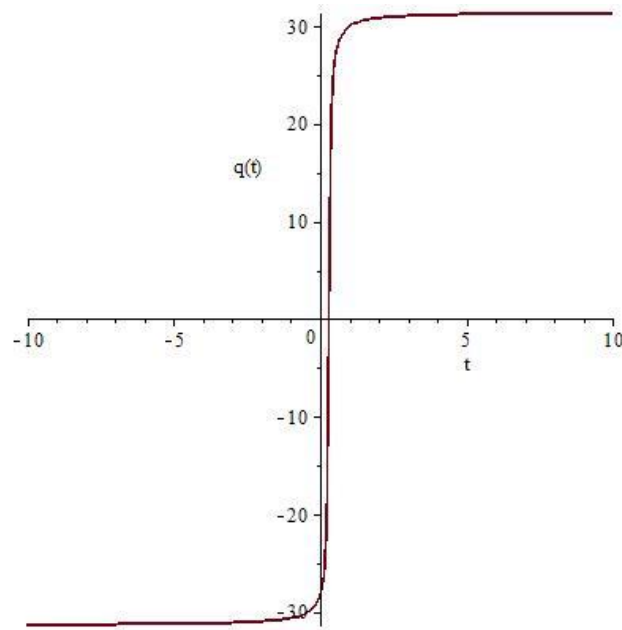
معادله فوق نمایش معادله (۱۸) درحوزه بسامد است. از معادله (۲۰) می‌توان $\dot{q}(\omega')$ را به دست آورد و سپس با استفاده از آن $\dot{q}(t)$ را به دست آورد و با جایگذاری $\dot{q}(t)$ در معادله (۱۷) می‌توان $X_\omega(t)$ را به دست آورد. معادله فوق مسیسه‌تری برای حل دینامیکی مسئله نسبت به معادله (۱۶) است. بنابراین به نظرمی‌رسد که به دلیل این که از هر دو معادله (۱۶) و (۲۰) می‌توان به جواب دینامیکی مسئله رسید باید معادله (۱۶) را کنار گذاشت. اما به دلیل این که امکان تحمیل شرایط به طور مستقیم بر روی محیط در یک زمان محدود وجود دارد، معادله (۱۶) امکان پیدا کردن جواب‌های خاصی را فراهم می‌کند که در معادله (۲۰) امکان پذیر نیست. این مورد را در بخش‌های ۳ و ۴ به طور کامل بررسی خواهیم کرد. قبل از انجام کوانتش سامانه برای یک شکل کلی تابع جفت شدگی $\alpha(\omega)$ ، از نظر کلاسیکی نشان می‌دهیم که یک تابع جفت شدگی خاص اتلافی متناسب با سرعت را نشان می‌دهد.

۳. جفت شدگی برای اتلافی متناسب با سرعت

تابع جفت شدگی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\alpha(\omega) = a\omega_s \omega \left[\frac{r\gamma}{\pi(\omega^r + \gamma^r)} \right]^{\frac{1}{r}}, \quad \gamma > 0 \quad (21)$$

تابع فوق به شکل یکنواخت از مقدار صفر در $\omega = 0$ تا مقدار مجانبی $a\omega_s \sqrt{\frac{r\gamma}{\pi}}$ در $\omega \rightarrow \infty$ افزایش می‌یابد و a ثابتی دلخواه با بعد زمان است. تابع (۲۱) رابطه انتگرالی زیر را برآورده می‌کند:



شکل ۱. نمودار $q(t)$ بر حسب زمان برای معادله (۲۶) برای مورد، $(A_s(\omega) = B_s(\omega) = 0, a = 1, C_1 = 1, C_r, C_p = 0, \omega_s = 0/5, \lambda = 0/4)$.

شدت افزایش می‌یابد و نوسانگر توسط محیط تقویت می‌شود و در زمان $t \rightarrow \infty$ به دامنه اولیه بر می‌گردد و تمامی انرژی از دست رفته به نوسانگر برمی‌گردد. معادله (۲۶) دقیقاً جواب-های معادلات زیر هستند:

$$\ddot{q} + \gamma \dot{q} + \omega_s^2 q = f_1(t), \quad t \geq \frac{1}{\gamma_0}$$

$$(t \leq \frac{1}{\gamma_0} \quad \ddot{q} - \gamma \dot{q} + \omega_s^2 q = f_1(t), \quad (30))$$

در اینجا $f(t)$ ترکیبی از توابع ارک تانژانتی و مشتقات اول و دوم آن خواهد بود و به دلیل این که به شکل نوسانی نیست معادله حرکت ذره نیز نوسانی نخواهد بود. در واقع معادلات فوق معادلات حرکت یک ذره اتلافی یا تقویت شده اهمی (اتلاف یا تقویت متناسب با سرعت) واداشته را نشان می‌دهد که به شکل بندادی می‌توان آن را کوانتیزه کرد.

از شکل ۲ مشاهده می‌کنیم که $X_\omega(t)$ در بسامدهای پایین دامنه به شدت افزایش می‌یابد و در تمامی نواحی به صورت نوسانی - اتلافی تغییر می‌کند. به علت دشواری به دست آوردن جواب معادله غیرهمگن (۲۳) در حوزه بسامد، جواب معادله غیرهمگن آن را در حوزه زمان به دست می‌آوریم. با استفاده از معادله (۱۱) می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} & -\gamma \omega \sqrt{a^2 \omega_s^2 - \gamma^2} \text{Si} \left(\omega \left(-\sqrt{a^2 \omega_s^2 - \gamma^2} + t \right) \right) + \\ & \omega \sqrt{a^2 \omega_s^2 - \gamma^2} \pi \text{Ssi} \left(\omega \left(-\sqrt{a^2 \omega_s^2 - \gamma^2} + t \right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

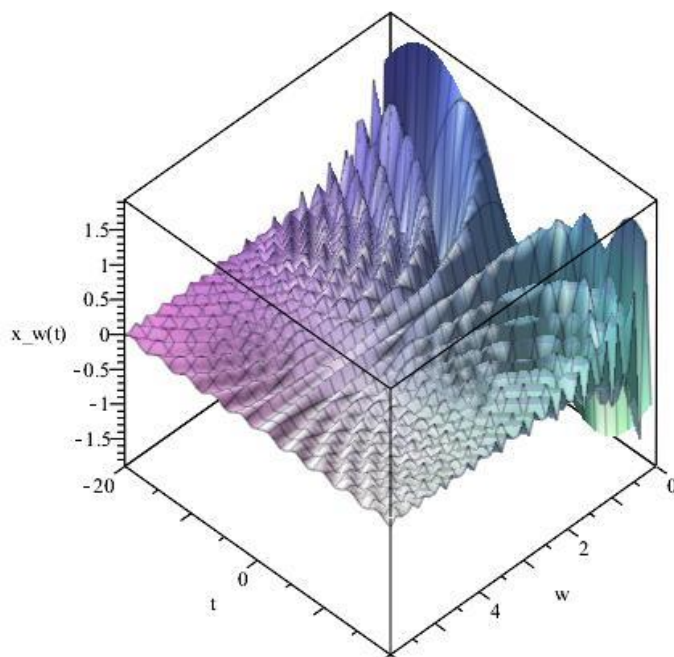
$$\sin \left(\omega \left(-\sqrt{a^2 \omega_s^2 - \gamma^2} + t \right) \right),$$

در اینجا تعریف کرده‌ایم:

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt, \quad (29)$$

$$\text{Ssi}(x) = \text{Si}(x) - \frac{1}{\gamma} \pi, \quad \text{Ci}(x) = \gamma + \text{Ln}(x) + \int_0^x \frac{\cos(t) - 1}{t} dt,$$

در شکل ۱ نمودار تابع $q(t)$ بر حسب زمان t رسم شده است. همان طور که مشاهده می‌شود نمودار حرکت سامانه غیرنوسانی خواهد بود. در لحظه اولیه $(t \rightarrow -\infty)$ نوسانگر در بیشینه دامنه جابه‌جایی خود $(q(t) = -30)$ قرار دارد و تمامی انرژی در نوسانگر متمرکز است. با گذشت زمان دامنه نوسانگر به آهستگی کاهش می‌یابد و انرژی نوسانگر به محیط منتقل می‌شود سپس در یک بازه زمانی کوچک، دامنه نوسانگر به شدت کاهش یافته تا در لحظه $t = \frac{1}{\gamma_0}$ به حالت سکون می‌رسد و تمامی انرژی خود را به محیط منتقل می‌کند. سپس دوباره با گذشت زمان، دامنه نوسانگر در یک بازه زمانی کوچک به



شکل ۲. نمودار سه بعدی $X_w(t)$ مربوط به معادله (۲۸) بر حسب (ω, t) برای مورد $(A_s(\omega) = B_s(\omega) = 0, a = 1, \omega_0 = 0.5, \lambda = 0.4)$.

صورت نوسانی - اتلافی کاهش می یابد و به این مفهوم است که نوسانگر به صورت نوسانی - اتلافی با محیط خود تبادل انرژی می کند و پس از گذشت زمانی، نوسانگر متوقف می شود و تمامی انرژی خود را به محیط منتقل می کند.

همچنین شکل ۴ نشان می دهد دامنه نوسانگرهای محیط در محدوده بزرگی از بسامد ثابت می ماند و در بسامدهای کوچک شدیداً افزایش می یابد.

۴. جفت شدگی برای اتلافی متناسب با سرعت II

شکل های معادلات دینامیکی (۱۶) و (۱۷) را می توان با به عقب بردن حد انتگرال گیری از $t=0$ در معادلات (۶) و (۱۱) به $t \rightarrow -\infty$ دست آورد. بخشی از $X_w(t)$ در (۱۷) که از حل معادله همگن (۵) با $(q(t)=0)$ به دست می آید توصیف کننده حالت محیط در $t \rightarrow -\infty$ است، اگر جمله آخر در معادله (۱۷) در $t \rightarrow -\infty$ صفر شود. برای تابع جفت شدگی (۲۱) که معادله (۲۲) را برآورده می کند می توان معادله (۲۰) را به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\omega^r}{\omega + i\gamma} (\omega + i\gamma - \omega_0) = g(\omega),$$

$$\ddot{q} + \omega_0^r q + \text{sgn}(t) \gamma \omega_0^r \frac{d}{dt} \int_0^\infty dt' \dot{q}(t') \exp^{-\gamma|t-t'|} = -f_r(t), \quad (31)$$

$$f(t) = \int_0^\infty d\omega \omega \left[\frac{\gamma}{r\pi(\omega^r + \gamma^r)} \right]^{\frac{1}{r}} \{ [A_s(\omega) + iB_s(\omega)] \exp(-i\omega t) + c.c. \}, \quad (32)$$

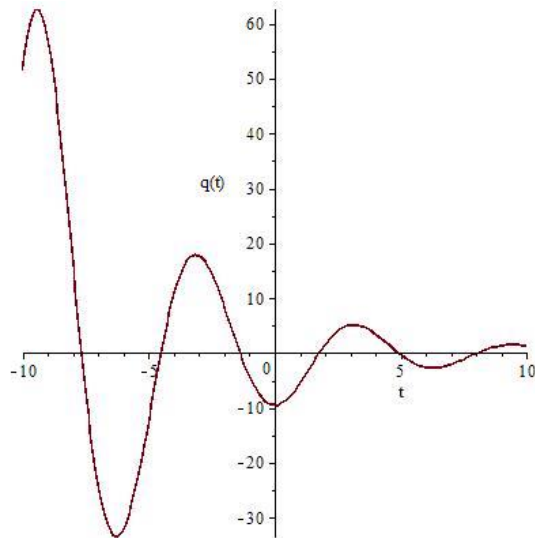
از حل معادله دیفرانسیل - انتگرال (۳۱) به دست می آوریم (پیوست ب ببینید):

$$q(t) = -\frac{A}{\omega_0} \int_0^t \sin(At') \dot{f}_r(t-t'), \quad (33)$$

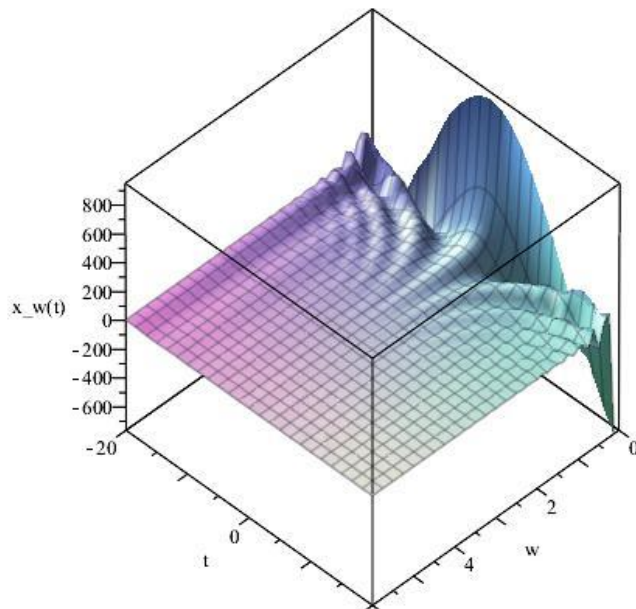
در اینجا، $A = \sqrt{\frac{\omega_0(1+\gamma)}{1+\gamma+\omega_0^r \text{sgn}(t)}}$ است. برای مورد خاصی که $f_r(t) = e^{-\gamma t}$ باشد می توان نوشت:

$$q(t) = \frac{A\pi}{\omega_0} \left[\frac{e^{-\gamma t}}{\gamma^r + A^r} \right] [-\gamma \sin At - A \cos At], \quad (34)$$

در شکل ۳ نمودار $q(t)$ بر حسب زمان رسم شده است. مشاهده می شود که در لحظه اولیه ($t = -10$) نوسانگر در بیشینه جابه جایی خود ($q = -60$) قرار دارد و تمامی انرژی در نوسانگر متمرکز است. با افزایش زمان، دامنه نوسانگر به



شکل ۳. نمودار $q(t)$ برای جواب معادله (۳۴) مورد، $(A_0(\omega), B_0(\omega) \neq 0, \omega_0 = 0/1, \lambda = 0/2)$.



شکل ۴. شکل سه بعدی $X_\omega(t)$ بر حسب (ω, t) برای مورد $(A_0(\omega), B_0(\omega) \neq 0, \omega_0 = 0/1, \lambda = 0/2)$.

$$g(t) = \int_0^\infty d\omega \omega \left[\frac{\gamma}{r\pi(\omega^r + \gamma^r)} \right]^{\frac{1}{r}} \quad (37)$$

$$\left\{ [A_R(\omega) + iB_R(\omega)] \exp(-i\omega t) + c.c. \right\},$$

به دلیل حضور ω^2 در طرف چپ معادله (۳۵)، جواب معادله

همگن ($g(\omega) = 0$) به صورت زیر است:

$$q(\omega) = r\pi b \delta(\omega) \Rightarrow q(t) = b, \quad (38)$$

در اینجا b ثابتی دلخواه است. با قرار دادن $q(t) = b$ در معادله

$$g(\omega) = -i\omega^r \omega \left[\frac{r\pi\gamma}{\omega^r + \gamma^r} \right]^{\frac{1}{r}} [sgn(\omega)A_R(|\omega|) + iB_R(|\omega|)], \quad (35)$$

در حوزه زمان می توان معادله (۱۸) را به شکل خلاصه شده زیر نوشت:

$$\ddot{q} + \omega_0^r q + \gamma \omega_0^r \frac{d}{dt} \int_0^\infty dt' \dot{q}(t') \exp[-\gamma(t-t')] = -\dot{g}(t), \quad (36)$$

(۵) به دست می آوریم:

$$X_{\omega}(t) = A_R(\omega)\cos(\omega t) + B_R(\omega)\sin(\omega t), \quad (39)$$

با قراردادن معادله (۳۹) در معادله (۴) مشاهده می کنیم که اگر بخواهد رابطه فوق همواره برقرار باشد باید داشته باشیم:

$$A_R(\omega) = B_R(\omega) = 0, \quad (40)$$

بنابراین نتیجه می گیریم:

$$X_{\omega}(t) = 0, \quad (41)$$

با قرار دادن معادله (۴۱) در معادله (۵) به دست می آوریم:

$$q(t) = 0 \quad (42)$$

در این حالت سامانه و نوسانگرهای محیط همه در حالت ترازمندی قرار دارند و هیچ گونه تبادل انرژی بین نوسانگر و محیط صورت نمی گیرد و معادلات (۴) و (۵) فقط جواب های بدیهی $X_{\omega}(t) = 0, q(t) = 0$ را خواهند داشت. جواب کلی معادله (۳۵) ترکیبی از جواب عمومی معادله (۳۵) و جواب معادله نا همگن زیر است.

$$q(\omega) = -G_R(\omega)g(\omega), \quad (43)$$

$$G_R(\omega) = -\frac{\omega + i\gamma}{(\omega' + i0^+)(\omega + i\gamma - \omega)}, \quad (44)$$

در معادله (۳۷) ما یک تابع گرین معرفی کرده ایم و روشی برای برخورد با قطب $\omega' = 0$ ارائه کرده ایم. ما قطب $\omega' = 0$ را به صفحه پایینی صفحه مختلط، جایی که قطب دیگر نیز قرار دارد، انتقال داده ایم. بنابراین تابع گرین که در نیم صفحه بالا تحلیلی است را انتخاب کرده ایم. در واقع در اینجا تابع گرین یک روش متفاوت برای برخورد با قطب $\omega' = 0$ ارائه می دهد که با جواب (۳۰) متفاوت است. اگر از معادله (۳۷) تبدیل معکوس فوری بگیریم داریم.

$$G_R(t) = \frac{-|t|\gamma}{r(\gamma + i\omega_s)} + \frac{i\omega_s \left[\theta(t) + \theta(-t)e^{(\gamma + i\omega_s)t} - \frac{1}{r} \right]}{(\gamma + i\omega_s)^2}, \quad (45)$$

همان طور که از رابطه (۲۹) انتظار داریم تابع گرین $G_R(t)$ در معادله دیفرانسیل زیر صدق می کند:

$$\ddot{G}_R + \omega_s G_R + \gamma \omega_s \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t d\omega \dot{G}_R(t) \exp[-\gamma(t-t')] = \delta(t), \quad (46)$$

جواب کلی موقعیت برای نوسانگر به صورت معادله (۴۷) خواهد بود، حال مورد خاصی را بررسی می کنیم که داشته باشیم:

$$q(t) = b - \int_{-\infty}^{\infty} dt' G_R(t-t') \dot{g}(t'), \quad (47)$$

$$g(t) = e^{-\gamma t} (m \sin \omega_s t + n \cos \omega_s t), \quad (48)$$

در اینجا m, n ضرایبی ثابت و دلخواه هستند. از حل معادله (۴۷) به دست می آوریم:

$$q(t) = e^{-\gamma t} \sin(\omega_s t), \quad (49)$$

مشاهده می شود که حرکت ذره نوسانی - اتلافی است و $q(t)$ یک تابع گذرا خواهد بود که به نسبت $\frac{1}{\gamma}$ فرو افت می کند و پس از مدتی به سمت صفر میل خواهد کرد. بنابراین معادله حرکت نوسانگر غیر پایدار است.

۵. کوانتس هامیلتونی

در این قسمت با تعریف اندازه حرکت های بندادی برای نوسانگر و محیط به صورت:

$$\Pi_q(t) = q(t), \quad (50)$$

$$a \Pi_{X_{\omega}}(t) = \dot{X}_{\omega}(t), \quad (51)$$

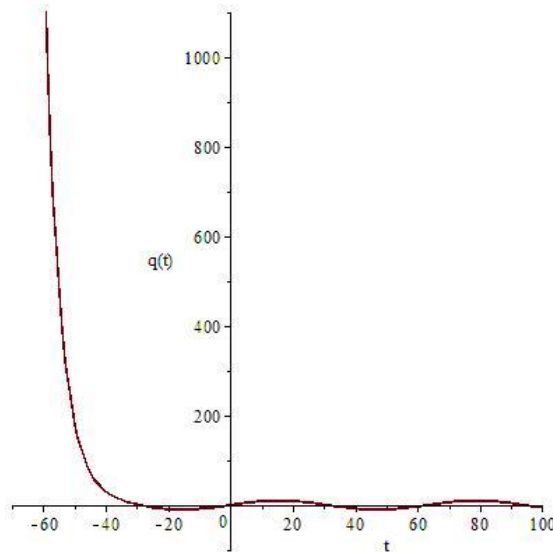
به کوانتس سامانه در تصویر هایزنبرگ، با استفاده از روابط جابه جایی بندادی در زمان های مساوی زیر می پردازیم:

$$\begin{aligned} [\hat{q}(t), \hat{\Pi}_q(t)] &= i\hbar, \\ [\hat{X}_{\omega}(t), \hat{\Pi}_{X_{\omega}}(t)] &= i\hbar \delta(\omega - \omega'), \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} [\hat{\Pi}_{X_{\omega}}(t), \hat{\Pi}_{X_{\omega'}}(t)] &= 0, \\ [\hat{\Pi}_q(t), \hat{X}_{\omega}(t)] &= 0, \quad [\hat{X}_{\omega}(t), \hat{X}_{\omega'}(t)] = 0, \\ [\hat{q}(t), \hat{X}_{\omega}(t)] &= 0, \quad [\hat{q}(t), \hat{X}_{\omega'}(t)] = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

رابطه جابه جایی برای محیط به دلیل پیوستاری بودن بسامد مشابه نظریه میدان است. در این حالت هامیلتونی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{r} \hat{\Pi}_q^2 + \frac{1}{r} \omega_s^2 \hat{q}^2 + \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (\hat{\Pi}_{X_{\omega}}^2 + \omega^2 \hat{X}_{\omega}^2) \\ &- \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha(\omega) [\hat{\Pi}_q \hat{X}_{\omega} + \hat{X}_{\omega} \hat{\Pi}_q], \end{aligned} \quad (54)$$



شکل ۵. نمودار عملگر مکان نوسانگر ($\hat{q}(t)$) بر حسب زمان برای مورد ($\omega_e = 0/1, \gamma = 0/2$).

با استفاده از معادله حرکت هایزنبرگ داریم:

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha^r(\omega)}{s^r + \omega_e^r} = \frac{\gamma \omega_e^r}{s + \gamma}, \quad (62)$$

به دست می آوریم:

$$L(\hat{q}) = \frac{(s + \gamma)\hat{q}(0)}{(s^r + \omega_e^r)(s + \gamma) - \gamma \omega_e^r}, \quad (63)$$

با استفاده از رابطه (۶۱) به دست می آوریم:

$$L(\hat{X}_\omega) = -\frac{\omega_e^r \alpha(\omega)}{s(s^r + \omega_e^r)} L(\hat{q}), \quad (64)$$

با گرفتن تبدیلات معکوس لاپلاس از دو طرف معادلات بالا می توان $\hat{q}(t)$ ، $\hat{X}_\omega(t)$ را به دست آورد. در شکل های ۵ و ۶ نمودار آنها رسم شده است.

مشاهده می شود که نوسانگر در لحظه ($t = -60$) در بیشینه جابه جایی خود قرار دارد و تمام انرژی در نوسانگر متمرکز است و با گذشت زمان دامنه نوسانگر با شیب تندی کاهش می یابد و انرژی نوسانگر به سرعت به محیط منتقل می شود و در محدوده $(-60 \leq t \leq -30)$ معادله حرکت نوسانگر غیر نوسانی و تنها اتلافی خواهد بود. همچنین در لحظه ($t = -30$) نوسانگر به حالت سکون می رسد و تمامی انرژی خود را به محیط منتقل می کند. بعد از این زمان معادله حرکت ذره نوسانی- اتلافی خواهد بود ولی اتلاف بسیار کمتری خواهد داشت و پس از

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = \hat{\Pi}_q - \int_0^{\infty} d\omega \alpha(\omega) \hat{X}_\omega(t), \quad \frac{d\hat{X}_\omega}{dt} = \hat{\Pi}_{X_\omega}, \quad (55)$$

$$\frac{d\hat{\Pi}_q}{dt} = -\omega_e^r \hat{q}, \quad (56)$$

$$\frac{d\hat{\Pi}_{X_\omega}}{dt} = -\omega_e^r \hat{X}_\omega + \alpha(\omega) \hat{\Pi}_q.$$

از ترکیب روابط فوق به دست می آوریم:

$$\hat{q}(t) + \omega_e^r \hat{q}(t) + \int_0^{\infty} d\omega \alpha(\omega) \hat{X}_\omega(t) = 0, \quad (57)$$

$$\hat{X}_\omega(t) + \omega_e^r \hat{X}_\omega(t) + \omega_e^r \alpha(\omega) \int_0^t \hat{q}(t') dt' = 0. \quad (58)$$

با گرفتن تبدیلات لاپلاس از دو طرف معادلات بالا داریم:

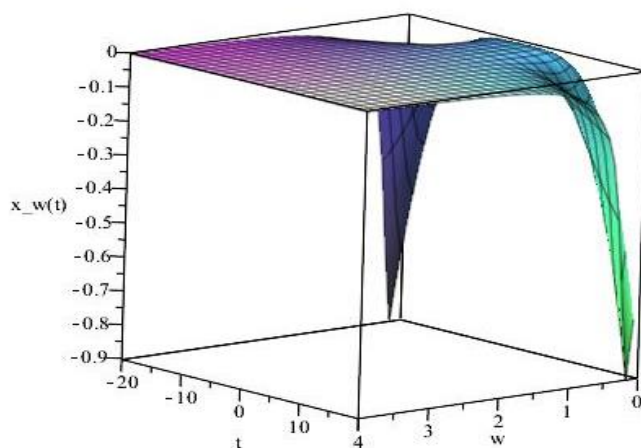
$$(s^r + \omega_e^r) L(\hat{q}) + s \int_0^{\infty} d\omega \alpha(\omega) L(\hat{X}_\omega) = \hat{q}(0), \quad (59)$$

$$s(s^r + \omega_e^r) L(\hat{X}_\omega) + \omega_e^r \alpha(\omega) L(\hat{q}) = 0. \quad (60)$$

با حل معادلات فوق به دست می آوریم:

$$L(\hat{q}) = \frac{\hat{q}(0)}{s^r + \omega_e^r - \omega_e^r \int_0^{\infty} \frac{\alpha^r(\omega)}{s^r + \omega_e^r}}, \quad (61)$$

با استفاده از رابطه



شکل ۶. شکل سه بعدی عملگر نوسانگرهای محیط $(\hat{X}_\omega(t))$ بر حسب (ω, t) برای مورد $(\omega_e = 0/1, \lambda = 0/2)$.

در اینجا از انرژی‌های نقطه صفر $(\frac{\hbar\omega_e}{2}, \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{2})$ صرف نظر

کرده‌ایم. همچنین از رابطه (۵۳) و تقریب موج چرخان استفاده کرده‌ایم. با استفاده از معادله حرکت هایزنبرگ داریم:

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -i\omega_e \hat{a} - \frac{1}{2} \int d\omega \alpha(\omega) \sqrt{\frac{\omega_e}{\omega}} \hat{b}_\omega, \quad (68)$$

$$\frac{d\hat{b}_\omega}{dt} = -i\omega \hat{b}_\omega + \frac{1}{2} \alpha(\omega) \sqrt{\frac{\omega_e}{\omega}} \hat{a}, \quad (69)$$

با استفاده از رابطه (۶۹) می‌توان نوشت:

$$\hat{b}_\omega(t) = \hat{b}_\omega(0) e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} \alpha(\omega) \sqrt{\frac{\omega_e}{\omega}} \int_0^t \hat{a}(t') e^{-i\omega(t-t')} dt', \quad (70)$$

با قراردادن رابطه (۷۰) در رابطه (۶۸) داریم:

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -i\omega_e \hat{a} - \frac{1}{2} \int d\omega \alpha(\omega) \frac{\omega_e}{\omega} \int_0^t \hat{a}(t') e^{-i\omega(t-t')} dt' + \hat{G}_a, \quad (71)$$

\hat{G}_a در اینجا عملگر نونفه است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{G}_a = -\frac{1}{2} \int d\omega \sqrt{\frac{\omega_e}{\omega}} \alpha(\omega) \hat{b}_\omega(0) e^{-i\omega t}, \quad (72)$$

حال عملگر کند تغییر $\hat{A}(t)$ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\hat{a}(t) = \hat{A}(t) e^{-i\omega_e t}, \quad (73)$$

ملاحظه می‌کنیم که می‌توان نوشت:

مدتی تمامی انرژی خود را به محیط منتقل می‌کند.

۶. ارزش انتظاری عملگرها در یک حمام حرارتی

در این قسمت فرض می‌کنیم محیط با یک حمام حرارتی باشد که از توزیع ماکسول-بولتزمن پیروی می‌کند و ارزش انتظاری متغیرهای مختلف را نسبت به حالت‌های حمام به دست می‌آوریم. عملگرهای $\hat{q}(t), \hat{\Pi}_q(t)$ را می‌توان بر حسب عملگرهای خلق و نابودی نوسانگر هماهنگ (\hat{a}^+, \hat{a}) به صورت زیر نوشت:

$$\hat{q}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{r\omega_e}} (\hat{a} + \hat{a}^+) \quad \hat{\Pi}_q(t) = -i \sqrt{\frac{\hbar\omega_e}{r}} (\hat{a} - \hat{a}^+), \quad (65)$$

همچنین عملگرهای $\hat{X}_\omega(t), \hat{\Pi}_{X_\omega}(t)$ را می‌توان بر حسب عملگرهای خلق و نابودی نوسانگرهای محیط $(\hat{b}_\omega^+, \hat{b}_\omega)$ به صورت زیر نوشت:

$$\hat{X}_\omega(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{r\omega}} (\hat{b}_\omega + \hat{b}_\omega^+), \quad \hat{\Pi}_{X_\omega}(t) = -i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{r}} (\hat{b}_\omega - \hat{b}_\omega^+), \quad (66)$$

با استفاده روابط (۶۵) و (۶۶) می‌توان هامیلتونی را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\hat{H} = \hbar\omega_e \hat{a}^+ \hat{a} + \int d\omega \hbar\omega \hat{b}_\omega^+ \hat{b}_\omega + \frac{i\hbar}{2} \int d\omega \alpha(\omega) \sqrt{\frac{\omega_e}{\omega}} (\hat{a} \hat{b}_\omega^+ - \hat{a}^+ \hat{b}_\omega), \quad (67)$$

$$\hat{A}(s) = \frac{\hat{a}(\circ)}{s + \frac{1}{\gamma}\beta + i\Delta\omega} - i \int_{\circ}^{\infty} \frac{\omega_e \alpha(\omega) \hat{b}_{\omega}(\circ) d\omega}{[s + i(\omega - \omega_e)][s + \frac{1}{\gamma}\beta + i\Delta\omega]} \quad (۸۲)$$

با گرفتن معکوس تبدیل فوریه از دو طرف معادله فوق به دست می‌آوریم:

$$\hat{a}(t) = u(t)\hat{a}(\circ) + \int_{\circ}^{\infty} d\omega \omega_e(t) \hat{b}_{\omega}(\circ) = e^{-i\omega_e t} \hat{A}(t), \quad (۸۳)$$

در اینجا تعریف کرده ایم:

$$u(t) = \exp\left[-\frac{1}{\gamma}\beta + i(\omega_e + \Delta\omega)t\right], \quad (۸۴)$$

$$v_{\omega}(t) = -\frac{\omega_e \alpha(\omega) e^{-i\omega t} [1 - \exp i(\omega - \omega_e - \Delta\omega)t] e^{-\frac{\beta t}{\gamma}}}{\omega(\omega_e - \omega + \Delta\omega - i\frac{\beta}{\gamma})}, \quad (۸۵)$$

اگر فرض کنیم انتقال بسامد ($\Delta\omega$) کوچک باشد به معادله لائزون می‌رسیم:

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = -\frac{1}{\gamma}\beta \hat{A} + \hat{G}_A(t), \quad (۸۶)$$

در اینجا $\hat{G}_A(t)$ عملگر نوفه است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{G}_A(t) = -i \int_{\circ}^{\infty} \frac{\omega_e \alpha(\omega) \hat{b}_{\omega}(\circ)}{\omega} e^{-i(\omega - \omega_e)t}, \quad (۸۷)$$

اگر فرض کنیم محیط یک حمام حرارتی باشد، ماتریس چگالی آن توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\rho}_R = \frac{\exp\left(-\frac{\hat{H}_R}{k_B T}\right)}{\text{Tr}_R \left[\exp\left(-\frac{\hat{H}_R}{k_B T}\right) \right]}, \quad (۸۸)$$

در این حالت می‌توان نوشت:

$$\langle \hat{G}_A(t) \rangle = \text{Tr}_R (\hat{\rho}_R \hat{G}_A(t)) = 0, \quad (۸۹)$$

بنابراین به دست می‌آوریم:

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = -\frac{1}{\gamma}\beta \langle \hat{A}(t) \rangle_R, \quad (۹۰)$$

از حل معادله دیفرانسیل بالا به دست می‌آوریم:

$$\langle \hat{A}(t) \rangle_R = e^{-\frac{\beta t}{\gamma}} \hat{a}(\circ), \quad (۹۱)$$

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^+(t)] = [\hat{A}(t), \hat{A}^+(t)] = 1, \quad (۷۴)$$

با قرار دادن رابطه (۷۳) در رابطه (۷۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = -\frac{1}{\gamma} \int_{\circ}^{\infty} d\omega \alpha^{\dagger}(\omega) \frac{\omega_e}{\omega} \int_{\circ}^t \hat{A}(t') \exp i(\omega - \omega_e)(t' - t) dt' + \hat{G}_A, \quad (۷۵)$$

در اینجا تعریف کرده ایم:

$$\hat{G}_A = -\frac{1}{\gamma} \int_{\circ}^{\infty} d\omega \sqrt{\frac{\omega_e}{\omega}} \alpha(\omega) \hat{b}_{\omega}(\circ) e^{-i(\omega - \omega_e)t}, \quad (۷۶)$$

به علت این که امکان حل دقیق معادله (۷۵) وجود ندارد در اینجا فرض می‌کنیم بر هم کنش بین نوسانگر و حمام حرارتی ضعیف باشد و از تقریب ویگنر-ویسکوف استفاده می‌کنیم. اگر از دو طرف معادله (۷۵) تبدیل لاپلاس بگیریم به دست می‌آوریم:

$$\hat{A}(s) = \frac{\hat{a}(\circ) + \hat{G}_A}{s + \frac{1}{\gamma} \int_{\circ}^{\infty} \frac{\omega_e \alpha^{\dagger}(\omega) d\omega}{\omega [s + (\omega - \omega_e)]}}, \quad (۷۷)$$

در اینجا تعریف کرده ایم:

$$\hat{G}(s) = -\frac{1}{\gamma} \int_{\circ}^{\infty} \frac{d\omega \sqrt{\omega_e} \alpha(\omega) \hat{b}_{\omega}(\circ)}{\sqrt{\omega} [s + i(\omega - \omega_e)]}, \quad (۷۸)$$

حال با استفاده از تقریب ویگنر-ویسکوف می‌توان نوشت:

$$\lim_{s \rightarrow \circ} -i \int_{\circ}^{\infty} \frac{\omega_e \alpha^{\dagger}(\omega) d\omega}{\omega [(\omega - \omega_e) - is]} = -i \int_{\circ}^{\infty} \frac{\omega_e \alpha^{\dagger}(\omega) d\omega}{\left[\frac{1}{\omega - \omega_e} + i\pi\delta(\omega - \omega_e) \right]} = \frac{\beta}{\gamma} + i\Delta\omega, \quad (۷۹)$$

در اینجا داریم:

$$\beta = \pi \alpha^{\dagger}(\omega_e) = \frac{\gamma a^{\dagger} \omega_e^{\dagger} \gamma}{(\omega_e^{\dagger} + \gamma^{\dagger})}, \quad (۸۰)$$

$$\Delta\omega = -\int_{\circ}^{\infty} \frac{\omega_e \alpha^{\dagger}(\omega) d\omega}{\omega(\omega - \omega_e)}, \quad (۸۱)$$

بنابراین رابطه (۷۷) به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

عملگرهای مکان و اندازه حرکت، نسبت به متغیرهای محیط ترکیبی از توابع نوسانی- اتلافی و اتلافی است ولی برای هامیلتونی سامانه (نوسانگر) صرفاً یک معادله اتلافی است که نشان دهنده این است که نوسانگر پس از مدتی تمامی انرژی خود را به محیط منتقل می کند. به دلیل این که در این قسمت فرض کردیم جفت شدگی ضعیف باشد، ثابت فروافت (β) کوچک و زمان فروافت بزرگ خواهد بود. همچنین از رابطه (۷۰) می توان نتیجه گرفت که ثابت فروافت به بسامد نوسانگر (ω_0) و ثابت اتلافی (γ) وابسته است و از بسامد نوسانگرهای محیط مستقل است. در حد زمان های بزرگ ($t \rightarrow \infty$) داریم:

$$\langle \hat{\Pi}_q(t) \rangle_R = \langle \hat{q}(t) \rangle_R = 0 \quad (98)$$

$$\langle \hat{\Pi}_q^\dagger(t) \rangle_R = \frac{\hbar \omega_s \bar{n}}{\gamma} \quad \langle \hat{H}_S(t) \rangle_R = \hbar \omega_s \bar{n}, \quad (99)$$

$$\langle \hat{q}^\dagger(t) \rangle_R = \frac{\hbar \bar{n}}{\gamma \omega_s}$$

در این حالت چشمداشتی عملگرهای مکان و اندازه حرکت مستقل از دما و صفر خواهد بود. همچنین چشمداشتی مربع عملگرهای مکان و اندازه حرکت وابسته به دما است و با افزایش دما زیاد می شود. در این حالت دردمای صفر مطلق ($\bar{n} = 0$) چشمداشتی انرژی نوسانگر نسبت به حالت های محیط صفر خواهد شد.

۷. نتیجه گیری

در اغلب تحقیقات انجام شده برای سامانه های اتلافی، از یک سری نوسانگرهای گسسته به عنوان محیط استفاده شده است. با این وجود در حدود بیست سال پیش وترو بارت توانایی یک محیط پیوستاری را برای بررسی سامانه های اتلافی نشان دادند. اخیراً نیز نشان داده شده است که از یک محیط پیوستاری می توان برای کوانتش بندادی معادلات ماکسول ماکروسکوپی در یک محیط دلخواه، به طوری که از معادله کرامرز- کرونینگ پیروی می کند، استفاده کرد [۲۲-۲۴]. نتایج مهمی که با استفاده از یک محیط پیوستاری به دست می آید حتی با اعمال شرایط حدی بر روی نتایج یک محیط پیوستاری نیز قابل به دست آوردن نیست. بنابراین استفاده از یک محیط پیوستاری از همان

در اینجا از $\langle \hat{A}(0) \rangle_R = \langle \hat{a}(0) \rangle_R \equiv \hat{a}(0)$ استفاده کرده ایم. همان طور که مشاهده می شود ارزش انتظاری عملگر کند تغییر $\hat{A}(t)$ نسبت به متغیرهای محیط به شکل نمایی فرو افت می کند. از روابط (۷۳) و (۹۱) می توان نوشت:

$$\langle \hat{a}(t) \rangle_R = e^{\left(-i\omega_s - \frac{\beta}{\gamma}\right)t} \hat{a}(0). \quad (92)$$

مشاهده می کنیم که تغییرات زمانی ارزش انتظاری عملگر نابودی میدان نسبت به متغیرهای میدان به شکل نوسانی- اتلافی خواهد بود. با اثبات مشابهی می توان نشان داد:

$$\langle \hat{a}^\dagger(t) \rangle_R = e^{\left(-i\omega_s - \frac{\beta'}{\gamma}\right)t} \hat{a}^\dagger(0), \quad (93)$$

$$\langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(t) \rangle_R = e^{-\beta t} \hat{a}^\dagger(0) \hat{a}(0) + \bar{n} [1 - e^{-\beta t}], \quad (94)$$

$$\beta' = \left[\frac{\lambda a^\dagger \omega_s \gamma}{\gamma \omega_s + \gamma'} \right], \quad \bar{n} = \langle \hat{a}^\dagger(0) \hat{a}(0) \rangle_R = \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega_s}{k_B T}} - 1}$$

با استفاده از (۲۸) و (۶۵) می توان نوشت:

$$\langle \hat{q}(t) \rangle_R = \sqrt{\frac{\hbar}{\gamma \omega_s}} \left(\langle \hat{a}(t) \rangle_R + \langle \hat{a}^\dagger(t) \rangle_R \right) = e^{-\frac{\beta}{\gamma} t} \left(e^{-i\omega_s t} \hat{a}(0) + e^{i\omega_s t} \hat{a}^\dagger(0) \right), \quad (95)$$

$$\langle \hat{\Pi}_q(t) \rangle_R = -i \sqrt{\frac{\hbar \omega_s}{\gamma}} \left(\langle \hat{a}(t) \rangle_R - \langle \hat{a}^\dagger(t) \rangle_R \right) = e^{-\frac{\beta}{\gamma} t} \left(e^{-i\omega_s t} \hat{a}(0) - e^{i\omega_s t} \hat{a}^\dagger(0) \right), \quad (96)$$

مشاهده می شود که معادله حاکم بر ارزش انتظاری عملگرهای مکان و اندازه حرکت نسبت به متغیرهای محیط ترکیبی از توابع نوسانی- اتلافی است. همچنین داریم:

$$\langle \hat{q}^\dagger(t) \rangle_R = \frac{\hbar}{\gamma \omega_s} \left[e^{\left(-i\omega_s - \frac{\beta'}{\gamma}\right)t} \hat{a}^\dagger(0) + e^{\left(i\omega_s - \frac{\beta'}{\gamma}\right)t} \hat{a}^{\dagger\dagger}(0) + e^{-\beta t} \left(\gamma \hat{a}^\dagger(0) \hat{a}(0) + 1 \right) + \gamma \bar{n} (1 - e^{-\beta t}) \right],$$

$$\langle \hat{\Pi}_q^\dagger(t) \rangle_R = -\frac{\hbar \omega_s}{\gamma} \left[e^{\left(-i\omega_s - \frac{\beta'}{\gamma}\right)t} \hat{a}^\dagger(0) + e^{\left(i\omega_s - \frac{\beta'}{\gamma}\right)t} \hat{a}^{\dagger\dagger}(0) - e^{-\beta t} \left(\gamma \hat{a}^\dagger(0) \hat{a}(0) + 1 \right) - \gamma \bar{n} (1 - e^{-\beta t}) \right],$$

$$\langle \hat{H}_S \rangle_R = \hbar \omega_s e^{-\beta t} \hat{a}^\dagger(0) \hat{a}(0) + \hbar \omega_s \bar{n} [1 - e^{-\beta t}], \quad (97)$$

مشاهده می شود که معادله حاکم بر مربع ارزش انتظاری

ابتدا بسیار توصیه می‌شود. تحقیقات تجربی روی نوسانگرهای ماکروسکوپی که دارای رفتار کوانتومی داشته باشند در سال‌های اخیر پیشرفت چشمگیری داشته است. نوسانگرها تا حالت زمینه خود سرد شده‌اند و حتی در برهم نهی از حالت‌های انرژی قرار گرفته‌اند. در این تحقیق به بررسی دینامیک کوانتومی یک نوسانگر اتلافی در یک محیط پیوستاری با استفاده از مدل جفت شدگی وابسته به سرعت می‌پردازیم. در قسمت دوم معادلات لاگرانژی را برای یک نوسانگرهماهنگ اتلافی در یک محیط پیوستاری به دست می‌آوریم. در قسمت‌های سوم و چهارم، برای مورد خاصی که تابع جفت شدگی با سرعت متناسب باشد (اتلافی اهمی) جواب‌های معادلات دیفرانسیل-انتگرال را به دست می‌آوریم. تنها تفاوت قسمت سوم و چهارم در این بود که در قسمت سوم حد پایین انتگرال را در $t_0 = 0$ در نظر گرفتیم در حالی که در قسمت چهارم حد پایین انتگرال را در $t_0 = -\infty$ در نظر گرفتیم. در قسمت سوم مشاهده کردیم که جواب معادله همگن برای موقیت مکانی نوسانگر غیرنوسانی است. این جواب، متناظر با یک نوسانگرهماهنگ تقویت شده در یک سامانه باز در بازه زمانی $(t < \frac{1}{\gamma_0})$ و متناظر با یک نوسانگرهماهنگ اتلافی در یک سامانه باز در بازه زمانی $(t > \frac{1}{\gamma_0})$ خواهد بود. در مورد جواب غیرهمگن مشاهده کردیم که موقعیت مکانی نوسانگر به شکل یک تابع نوسانی-اتلافی خواهد بود. در این حالت نوسانگر با محیط خود به شکل نوسانی - اتلافی تبادل انرژی می‌کند و پس از مدتی به حالت سکون می‌رسد و تمامی انرژی خود را به محیط منتقل می‌کند. در این حالت موقعیت مکانی نوسانگرهای محیط $(t > \frac{1}{\gamma_0})$ در تمامی نواحی بسامد تغییرات نوسانی-اتلافی خواهند داشت و در بسامدهای پایین افزایش شدید دامنه پیدا خواهند کرد. در قسمت چهارم ($t_0 = -\infty$) مشاهده کردیم که برای معادله همگن، تنها جواب‌های ممکن جواب‌های بدیهی هستند. در این حالت نوسانگر - q و نوسانگرهای محیط همواره در ترازمندی قرار دارند و هیچ گونه تبادل انرژی بین

آنها صورت نمی‌گیرد. برای جواب‌های معادله غیرهمگن، برای موقعیت مکانی نوسانگر - q مشاهده کردیم که یک تابع نوسانی - اتلافی خواهد بود. در قسمت پنجم با استفاده از روش کوانتش بندادی به کوانتش هامیلتونی کل سامانه پرداختیم. سپس با استفاده از معادله حرکت هایزنبرگ معادله دیفرانسیل - انتگرال حاکم بر عملگر مکان نوسانگر - q و مکان نوسانگرهای محیط را به دست آوردیم و سپس با استفاده از تبدیلات لاپلاس، جواب‌های آنها را به دست آوردیم. مشاهده کردیم که موقعیت مکانی نوسانگر - q در یک محدوده زمانی غیرنوسانی و به شدت نزولی است که در این حالت نوسانگر - q سریعاً انرژی خود را به محیط منتقل می‌کند و پس از مدتی به حالت سکون می‌رسد و تمامی انرژی خود را به محیط منتقل می‌کند. در قسمت ششم فرض کردیم محیط یک حمام حرارتی باشد و با استفاده از تقریب ویگنر-وایسکوف (برهم کنش ضعیف) ارزش انتظاری عملگرهای مختلف را نسبت به ویژه حالت‌های حمام گرمایی به دست آوردیم. مشاهده کردیم که ارزش انتظاری عملگرهای مکان و اندازه حرکت نسبت به ویژه حالت‌های حمام گرمایی ترکیبی از توابع نوسانی - اتلافی خواهد بود. این درحالی است که ارزش انتظاری مربع مکان و مربع اندازه حرکت، ترکیبی از توابع نوسانی و نوسانی - اتلافی خواهد بود. ثابت اتلافی به بسامد نوسانگر - q و ضریب اتلافی حمام گرمایی وابسته است و با افزایش این دو پارامتر افزایش می‌یابد و از بسامد نوسانگرهای حمام گرمایی مستقل است. در حد زمان‌های بزرگ، انرژی نوسانگر - q به یک مقدار پایا $\langle \hat{H}_S \rangle_R = \hbar \omega \bar{n}$ خواهد رسید که با افزایش دما زیاد خواهد شد و در دمای صفر مطلق ($\bar{n} = 0$) صفر خواهد شد.

پیوست (الف): اثبات رابطه (۲۵)

با استفاده از رابطه (۲۴) می‌توان نوشت:

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\dot{q}(\xi)}{\xi - \omega} = -\pi \left[\omega a^{-r} \omega_0^{-r} \gamma^{-1} + \gamma \omega^{-1} a^{-r} \omega_0^{-r} \right] \dot{q}(\omega),$$

(الف. ۱)

با معرفی A به صورت

$$A = P \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\dot{q}(\xi)}{\xi - \omega} \tag{الف. ۲}$$

و تبدیل فوریه گرفتن از آن به دست می آوریم:

$$F(A) = -F(\dot{q})F(\omega^{-1}) = \pi i \text{Sgn}(\omega)F(\dot{q}), \tag{الف. ۳}$$

اگر از طرف چپ رابطه (الف. ۱) تبدیل فوریه بگیریم و در ω ضرب کنیم به دست می آوریم:

$$i^r \text{Sgn}(\omega) \dot{F}(\dot{q}) = -a^{-r} \omega_e^{-r} \gamma^{-1} \ddot{F}(\dot{q}) - \gamma a^{-r} \omega_e^{-r} F(\dot{q}) + \gamma^{-1} F(\dot{q}) - \gamma F(\dot{q}) = 0, \tag{الف. ۴}$$

با ساده سازی رابطه فوق داریم:

$$\ddot{F}(\dot{q}) + \gamma a^r \omega_e^r \text{Sgn}(\omega) \dot{F}(\dot{q}) + (-\gamma^r + a^r \omega_e^r - \gamma^r a^r \omega_e^r) F(\dot{q}) = 0, \tag{الف. ۵}$$

معادله مشخصه معادله فوق به صورت زیر است:

$$\ddot{R} + \lambda a^r \omega_e^r R + (a^r \omega_e^r - \gamma^r - \gamma^r a^r \omega_e^r) = 0, \tag{الف. ۶}$$

از حل معادله مشخصه داریم:

$$R = -\alpha \pm \beta i \tag{الف. ۷}$$

در اینجا داریم:

$$\beta = \frac{1}{r} \sqrt{r \left(a^r \omega_e^r - \gamma^r - \gamma^r a^r \omega_e^r \right) - \gamma^r a^r \omega_e^r}, \quad \alpha = \frac{\gamma a^2 \omega_0^2}{2} \tag{الف. ۸}$$

بنا براین به دست می آوریم:

$$F(\dot{q}) = e^{-\alpha \omega} (C_1' \cos \beta \omega + C_2' \sin \beta \omega), \tag{الف. ۹}$$

با تبدیل فوریه گرفتن از دو طرف معادله فوق داریم:

$$r \pi \dot{q}(t) = F \left[e^{-\alpha \omega} (C_1' \cos \beta \omega + C_2' \sin \beta \omega) \right], \tag{الف. ۱۰}$$

بنا براین به دست می آوریم:

$$\dot{q}(t) = C' \left(\frac{1}{\alpha^r + (t-\beta)^r} + \frac{1}{\alpha^r + (t+\beta)^r} \right) + C'' \left(\frac{1}{\alpha^r + (t-\beta)^r} - \frac{1}{\alpha^r + (t+\beta)^r} \right), \tag{الف. ۱۱}$$

حال ثابت های C_2 و C_3 را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$C_2 = C_1' - C_2', \quad C_3 = C_1' + C_2' \tag{الف. ۱۲}$$

بنابراین به دست می آوریم:

$$\dot{q}(t) = C_1 \left(\frac{1}{\alpha^r + (t-\beta)^r} \right) + C_2 \left(\frac{1}{\alpha^r + (t+\beta)^r} \right) \tag{الف. ۱۳}$$

پیوست (ب): اثبات رابطه (۳۲)

در این قسمت رابطه (۳۳) را اثبات می کنیم. با تبدیل لاپلاس گرفتن از دو طرف رابطه (۳۱) می توان نوشت.

$$s^r L(q) - sq(0) - \dot{q}(0) + \omega_e^r L(q) - \text{sgn}(t) \gamma \omega_e^r L(\dot{q}) L(e^{-\gamma t}) = L(-\dot{f}), \tag{ب. ۱}$$

$$L(q) (s^r + \omega_e^r) - sq(0) - \dot{q}(0) - \frac{\text{sgn}(t) \gamma \omega_e^r s}{1+\gamma} (sL(q) - q(0)) = -L(\dot{f}), \tag{ب. ۲}$$

با ساده سازی رابطه فوق داریم.

$$L(q) \left(s^r + \omega_e^r - \frac{s^r \text{sgn}(t) \gamma \omega_e^r}{1+\gamma} \right) = L(-\dot{f}) + sq(0) + \dot{q}(0) - \frac{\text{sgn}(t) \gamma \omega_e^r sq(0)}{1+\gamma}, \tag{ب. ۳}$$

اگر فرض کنیم $q(0) = \dot{q}(0) = 0$ باشد، می توان نوشت.

$$L(q) (s^r + \omega_e^r + \gamma s^r - s^r \text{sgn}(t) \gamma \omega_e^r) = (1+\gamma) L(-\dot{f}) \tag{ب. ۴}$$

با گرفتن تبدیل معکوس لاپلاس از دو طرف معادله فوق به دست می آوریم.

$$q(t) = L^{-1} \left(\frac{-(1+\gamma)L(\dot{f})}{(1+\gamma)(s^r + \omega_e^r) - s^r \omega_e^r \gamma \text{sgn}(t)} \right) = -(1+\gamma) L^{-1} \left(\frac{L(\dot{f})}{s^r (1+\gamma - \omega_e^r \gamma \text{sgn}(t) + \omega_e^r (1+\gamma))} \right) = \frac{-(1+\gamma)}{1+\gamma - \omega_e^r \gamma \text{sgn}(t)} L^{-1} \left(L(\dot{f}(s)) + \frac{1}{s^r + A^r} \right) = \frac{1}{\omega_e} AL^{-1} \left(L(\dot{f}(s)) + \frac{A}{s^r + A^r} \right) = -\frac{A}{\omega_e} L^{-1} (L(\dot{f})) L^{-1} \left(\frac{A}{s^r + A^r} \right) = -\frac{A}{\omega_e} \dot{f}(t) \sin(At) = -\frac{A}{\omega_e} \int_0^t \sin(At') \dot{f}(t-t') dt', \tag{ب. ۵}$$

در اینجا $A = \sqrt{\frac{\omega_e (1+\gamma)}{1+\gamma + \omega_e^r \text{sgn}(t)}}$ است.

مراجع

1. H Dekker, *Phys. Rep.* **80** (1981)1.

2. C I Um, K H Yeon, and T F George, *Phys. Rep.* **362** (2002) 63.
3. U Weiss, “*Quantum Dissipative Systems*”, Singapore World Scientific (2008).
4. H Bateman, *Phys. Rev.* **38** (1931) 815.
5. M Blasone and P Jizba, *Can. J. Phys.* **80** (2002) 645.
6. M Blasone and P Jizba, *Ann. Phys.* **312** (2004) 354.
7. D C Latimer, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** (2005) 2021.
8. M C Baldiotti, R Fresneda, and D M Gitman, *Phys. Lett. A* **375** (2011) 1630.
9. H Majima and A Suzuki, *Ann. Phys.* **326** (2011) 3000.
10. E Celeghini, M Rasetti, and G Vitiello, *Ann. Phys.* **215** (1992) 156.
11. V B Magalinskii, *Sov. Phys. JETP* **9** (1959) 1381.
12. J Tuziemski and J K Korbicz, *EPL(Europhys. Lett.)* **112** (2015) 40008.
13. D Boyanovsky and D Jasnow, *Phys. Rev. A* **96** (2017) 062108.
14. L Ferialdi and A Smirne, *Phys. Rev. A* **96** (2017) 012109.
15. M Carlesso and A Bassi, *Phys. Rev. A* **95** (2017) 052119.
16. H Z Shen, *et al.*, *Phys. Rev. A* **97** (2018) 042121.
17. S H Lim, *et al.*, *J. Stat. Phys.* **170** (2018) 351.
18. P Bialas, J Spiechowicz, and J Łuczka, *arXiv preprint at arXiv:1805.04012* (2018).
19. P Bialas and J Łuczka, *Entropy* **20** (2018) 123.
20. G W Ford, *Contemp. Phys.* **58** (2017) 244.
21. D Shinichi, and F Yuki, *Phys. Rev. A* **101** (2020) 022105.
22. K Fardin, *Europ. Phys. J. Plus* **135** (2020) 243.
23. V P Tatarskii, *Sov. Phys. Usp.* **30** (1987) 134.
24. H Grabert, U Weiss, and P Talkner, *Z. Phys. B: Condens. Matter* **55** (1984) 87.
25. B Huttner and S M Barnett, *Phys. Rev. A* **46** (1992) 4306.
26. T G Philbin, *New J. Phys.* **12** (2010) 123008.
27. T G Philbin, *New J. Phys.* **13** (2011) 063026.
28. S A R Horsley, *Phys. Rev. A* **84** (2011) 063822.
29. S A R Horsley, *arXiv:1205.0486* (2012)
30. A D O’Connell *et al.*, *Nature* **464** (2010) 697.
31. J D Teufel *et al.*, *Nature* **475** (2011) 359.
32. J Chan, *et al.*, *Nature* **478** (2011) 89.
33. M Aspelmeyer, *et al.*, *J. Opt. Soc. Am. B* **27** (2010) 189.
34. M Poot and H S J Zant, *Phys. Rep.* **511**(2012) 273.
35. A C Pipkin, “*A Course on Integral Equations*”, New York Springer (1991).
36. N I Muskhelishvili, “*Singular Integral Equations*”, New York Dover (2008).