



استفاده از نظریه گرامیان برای مکان‌یابی مناسب عملگرها و حسگرها

در آزمایش‌های ارتعاشات زمینی بال یک هواپیمای سبک

سید امین باقرزاده^۱، داود اسدی^۲

۱- دانشگاه آزاد اسلامی - واحد نجف‌آباد - دانشکده فنی و مهندسی

۲- دانشگاه آزاد اسلامی - واحد علوم و تحقیقات - دانشکده مکانیک و هوافضا

چکیده

مقاله‌ی حاضر به استفاده از نظریه‌ی گرامیان (Gramian) برای مکان‌یابی مناسب عملگرها و حسگرها در آزمایش‌های ارتعاشات زمینی بال یک هواپیمای سبک اختصاص دارد. در مقاله‌ی حاضر این تئوری تشریح شده و بر اساس آن روشی برای مکان‌یابی مناسب عملگرها و حسگرها بدست می‌آید. سپس از این نظریه برای مکان‌یابی مناسب عملگرها و حسگرها در سازی نسبتاً پیچیده‌ی بال یک هواپیمای سبک استفاده می‌شود تا کاربرد نظریه‌ی تشریح‌شده بصورت عملی مشاهده شود و در نهایت نتایج بدست آمده از این نظریه صحت‌سنجی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: نظریه‌ی گرامیان، عملگرها و حسگرها، آزمایش‌های ارتعاشات زمینی، بال هواپیمای سبک

مقدمه

آزمایش‌های ارتعاشات زمینی به منظور اطمینان از پایداری آیروداستیک و آیروسرووالاستیک هواپیماهای جدید و هواپیماهای بهبودیافته ضروری است. از اطلاعات بدست‌آمده از این آزمایش‌ها، از یک سو برای صحت‌سنجی روش‌های تحلیلی در ارتعاشات و تشخیص نقص‌های سازه‌ای و از سوی دیگر برای مدل‌سازی کنترل پرواز استفاده می‌شود.

سامانه‌های آزمایش ارتعاشات زمینی بطور معمول از ادوات مختلفی شامل تکیه‌گاه‌های سازه‌ای، تحریک‌کننده‌های سازه‌ای، شتاب‌سنج‌ها، وسایل کسب داده و ابزارهای تحلیلی تشکیل شده است. در این میان با توجه به لزوم تحریک کافی سازه و اندازه‌گیری کافی پاسخ‌ها در آزمایش‌های ارتعاشات زمینی، به تعداد بالایی از عملگرها و حسگرها نیاز است و از این رو مکان‌یابی مناسب عملگرها و حسگرها در این آزمایش‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار خواهد بود. این موضوع هنگامی آشکارتر می‌گردد که بدانیم در سامانه‌های مکانیکی قراردادن عملگرها در موقعیت‌های متفاوت باعث بروز رفتارهای مختلف می‌شود و نیز قراردادن حسگرها در موقعیت‌های متفاوت باعث اندازه‌گیری‌های مختلف می‌شود. از این رو یافتن مکان مناسب برای عملگرها و حسگرها در آزمایش‌های ارتعاشات زمینی به منظور بهینه‌سازی رفتارهای ارتعاشاتی موردنظر و ثبت داده‌های مناسب ضروری است. یکی از روش‌های مکان‌یابی مناسب عملگرها و حسگرها در آزمایش‌های ارتعاشات زمینی استفاده از نظریه‌ی گرامیان است [۱ تا ۶]. با این حال بر اساس آگاهی نگارندگان، تا کنون از نظریه‌ی گرامیان برای مکان‌یابی مناسب عملگرها و حسگرها در آزمایش‌های ارتعاشات زمینی بال هواپیما استفاده نشده است. از این رو، هدف این مقاله استفاده از نظریه‌ی گرامیان برای این منظور است.

گرامیان کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری

گرامیان کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری، یک معیار کمی برای اندازه‌گیری کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری سیستم است. مزیت عمده‌ی استفاده از نظریه‌ی گرامیان در مکان‌یابی مناسب عملگرها و حسگرها در آزمایش‌های ارتعاشات زمینی آن است که در این روش تنها به مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های گرامیان کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری نیاز است و نیازی به آگاهی از کنترل‌کننده‌ی مورد استفاده در آزمایش‌ها و نیز دینامیک عملگرها و سنسورها نمی‌باشد.

فرض کنید که معادلات حاکم بر دینامیک یک سیستم بصورت زیر باشد:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1)$$

یک عملگر در یک سامانه‌ی سازه‌ای باید بنحوی قرار گیرد که بتوان سیستم فوق را با کمینه‌ی تلاش کنترلی به صورت بهینه کنترل نمود. این کمینه‌ی تلاش کنترلی را می‌توان از حل عبارت زیر بدست آورد:

$$\Gamma_{\min}(u) = \min \left\{ \int_0^T u^T(t)u(t)dt \right\} \quad (2)$$

مسئله‌ی فوق یک مسئله‌ی کنترل بهینه است که باید در زمان محدود T ، سامانه را از شرایط $x(0) = x_0$ به $x(T) = x_T$ برود. می‌توان نشان داد که حل بهینه برای این مسئله مطابق زیر است: [۷]

$$u_{\min} = -B^T e^{A(T-t)} W^{-1}(T) (e^{AT} x_0 - x_T) \quad (3)$$

و در نتیجه:

$$\Gamma_{\min} = (e^{AT} x_0 - x_T)^T W^{-1}(T) (e^{AT} x_0 - x_T) \quad (4)$$

که در آن W بیانگر گرامیان کنترل‌پذیری است و بصورت زیر قابل تعریف است:

$$W(t) = \int_0^t e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (5)$$

مشاهده می‌شود که کمینه‌ی انرژی کنترلی شامل عبارت $W^{-1}(T)$ می‌باشد. این موضوع به این معنی است که اگر $W^{-1}(T)$ کوچک باشد که معادل کوچک بودن مقادیر ویژه‌ی آن است، برخی از متغیرهای حالت تنها هنگامی می‌توانند از $x(0) = x_0$ به $x(T) = x_T$ بروند که ورودی بسیار بزرگی مورد استفاده قرار گیرد. می‌توان اثبات کرد [۸] که هنگامی که $T \rightarrow \infty$ می‌توان ماتریس گرامیان مشاهده‌پذیری را از رابطه‌ی لیاپانوف زیر بدست آورد:

$$AW + WA^T + BB^T = 0 \quad (6)$$

که در آن W بیانگر حل حالت پایایی ماتریس گرامیان مشاهده‌پذیری است که مستقل از زمان است. بنابر این هنگامی که $T \rightarrow \infty$ بدست می‌آید:

$$W = W(T) \quad (7)$$

مشاهده‌پذیری بیانگر کیفیتی است که یک مود سیستم قابل اندازه‌گیری است. مقدار این پارامتر باید برای هر مود سیستم به اندازه‌ای بالا باشد که مشاهده‌پذیری را ضمانت نماید. اگر سیستم از $x(0) = x_0$ با $u(t) = 0$ آغاز نماید، انرژی خروجی بصورت زیر قابل تعریف است:

$$\int_0^{\infty} y^T(t)y(t)dt = x_0^T Q x_0 \quad (8)$$

که در آن Q گرامیان مشاهده‌پذیری است و بصورت زیر قابل تعریف است:

$$Q = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt \quad (9)$$

مجدداً حل حالت پایای معادله‌ی فوق هنگامی که $T \rightarrow \infty$ به صورت زیر خواهد بود:

$$A^T Q + Q A + C^T C = 0 \quad (10)$$

مانند قبل، مقادیر ویژه‌ی ماتریس گرامیان مشاهده‌پذیری، بیانگر میزان مشاهده‌پذیری سیستم است.

به منظور سنجش کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری بر مبنای نظریه‌ی گرامیان به معیاری نیاز است تا بر مبنای آن بتوان تشخیص داد که آیا عملگرها و حسگرها در مکان مناسبی قرار دارند یا نه. معیار زیر برای این منظور پیشنهاد می‌شود:

$$PI = \left(\sum_{j=1}^{2n} \lambda_j \right) \sqrt{2n \prod_{j=1}^{2n} \lambda_j} \quad (11)$$

که در آن λ بیانگر مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های گرامیان است. اگر یکی از مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های گرامیان به سمت صفر میل کند، این معیار به سرعت کاهش خواهد یافت که به معنای قرارگرفتن عملگرها و حسگرها در مکان نامناسب است.

مدلسازی بال هواپیما

در سیستم‌های انعطاف‌پذیر، مودهای ویژه بصورت ذاتی حضور دارند. هنگامی که یک عملگر یا حسگر در نزدیکی یک نقطه‌ی گره از یک مود ویژه قرار بگیرد، عملگر به نیروی بسیار بالایی برای کنترل این مود نیاز خواهد داشت و قرار دادن حسگر در این نقطه نیز اطلاعات قابل استفاده‌ای را ارائه نمی‌نماید. از این رو باید رفتار مودال یک سیستم را مورد توجه قرار داد. با استفاده از روش مبتنی بر نظریه‌ی گرامیان می‌توان به این مهم دست یافت و مشخص نمود که چه تعداد و چه مودهای ویژه‌ای باید برای مکان‌یابی مناسب عملگرها و حسگرها مورد توجه قرار گیرند. لازم به یادآوری است که معمولاً تنها مودهای ویژه‌ی پایین مورد توجه قرار می‌گیرند چراکه تحریک مودهای ویژه‌ی بالا سخت‌تر است و نیز عملگرها و حسگرها نمی‌توانند به بسامدهای بالا به نحو مقتضی پاسخ گویند.

به منظورمدلسازی مسئله در قدم اول لازم است تا مدلی برای المان‌های بال ارائه شود. در شکل (۱) فرض می‌شود که بال را در راستای دهانه‌ی بال بصورت n جرم متمرکز مدلسازی کنیم که هرکدام از المان‌ها دارای جرم m_i و فاصله از محل اتصال بال به بدنه‌ی x_i باشند و به هر کدام نیروی P_i (شامل نیروی گرانش، نیروهای آیرودینامیک و نیروهای ناشی از خمش سازه) وارد می‌شود که موجب خیز نسبت به مرجع به میزان q_i می‌شود. در اینجا متغیرهای حالت را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} z_0 &= q_0 & \dot{z}_0 &= \dot{q}_0 \\ z_1 &= q_0 + q_1 & \dot{z}_1 &= \dot{q}_0 + \dot{q}_1 \\ &\vdots & &\vdots \\ z_n &= q_0 + q_n & \dot{z}_n &= \dot{q}_0 + \dot{q}_n \end{aligned} \quad (12)$$

همچنین مطابق معادلات مقاومت مصالح برای خیز یک تیر یک سردرگیر در نقطه‌ی i بر اثر اعمال نیرو در نقطه‌ی j داریم:

$$a_{ij} = \frac{x_i^2}{6EI} (3x_j - x_i) \quad x_j \geq x_i \quad (13)$$

لذا برای خیز تیر در حالت کلی داریم:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1l} \\ f_{2l} \\ \vdots \\ f_{nl} \end{bmatrix} \quad (14)$$

که در آن ماتریس $[a_{ij}]$ ماتریس انعطاف‌پذیری نامیده می‌شود. اکنون برای بدست آوردن ماتریس سختی می‌توان از معادله‌ی زیر استفاده کرد:

$$[k_{ij}] = [a_{ij}]^{-1} \quad (15)$$

بنابر این خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} f_{1l} \\ f_{2l} \\ \vdots \\ f_{nl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

بدست آوردن معادلات حاکم بر سیستم

در اینجا به منظور بدست آوردن معادلات حاکم بر سیستم از معادله‌ی لاگرانژ استفاده می‌شود:

$$d/dt \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q_j \quad j=1 \cdots n \quad (17)$$

که در آن T انرژی جنبشی، U انرژی پتانسیل، F تابع اتلاف انرژی، Q_j نیروی عمومی خارجی j ام و q_j مختصه‌ی عمومی j ام است.

می‌دانیم که انرژی جنبشی بصورت زیر قابل محاسبه است:

$$T = \frac{1}{2} [m_0 \dot{z}_0^2 + m_1 \dot{z}_1^2 + \cdots + m_n \dot{z}_n^2] \quad (18)$$

لذا خواهیم داشت:

$$T = \frac{1}{2} \left[(m_0 + m_1 + \cdots + m_n) \dot{q}_0^2 + m_1 \dot{q}_1^2 + \cdots + m_n \dot{q}_n^2 + 2m_1 \dot{q}_0 \dot{q}_1 + \cdots + 2m_n \dot{q}_0 \dot{q}_n \right] \quad (19)$$

بنابر این خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} d/dt \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_0} \right) &= (m_0 + \cdots + m_n) \dot{q}_0 + m_1 \dot{q}_1 + \cdots + m_n \dot{q}_n \\ d/dt \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) &= m_1 (\dot{q}_0 + \dot{q}_1) \\ &\vdots \\ d/dt \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right) &= m_n (\dot{q}_0 + \dot{q}_n) \end{aligned} \quad (20)$$

انرژی پتانسیل شامل پتانسیل ناشی از گرانش و خمش سازه است:

$$U = U_I + U_G \quad (21)$$

انرژی پتانسیل گرانشی بصورت زیر قابل محاسبه است:

$$U_G = -m_0 g z_0 - m_1 g z_1 - \cdots - m_n g z_n \quad (22)$$

لذا خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} m_T & m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ m_1 & m_1 & 0 & \dots & 0 \\ m_2 & 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n & 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_0 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ 0 & k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 + \dots + P_n \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad (31)$$

مشاهده می‌شود که متغیر حالت q_0 که مربوط به مود جسم صلب است قابل حذف است:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \quad (32)$$

که در بیان ماتریسی خواهد بود:

$$M\ddot{\vec{q}} + K\vec{q} = \vec{p} \quad (33)$$

که در آن M ماتریس جرم و K ماتریس سختی است. مطابق [7] می‌توانیم ماتریس میرایی را به صورت زیر فرض کرد:

$$C = \alpha M + \beta K, \quad \begin{cases} \|C\| \ll \|M\| \\ \|C\| \ll \|K\| \end{cases} \quad (34)$$

بنابر این نتیجه‌هایی درباره‌ی معادلات حاکم بر سیستم چنین خواهد بود:

$$M\ddot{\vec{q}} + C\dot{\vec{q}} + K\vec{q} = \vec{p} \quad (35)$$

حل معادلات حاکم بر سیستم

اکنون به دنبال یافتن پاسخ معادله‌ی حاکم بر سیستم بدون ماتریس میرایی (حل مسئله‌ی مقدار ویژه) هستیم:

$$M\ddot{\vec{q}} + K\vec{q} = \vec{p} \quad (36)$$

لازم به ذکر است که این فرض به منظور ساده‌سازی و یافتن یک حل بسته برای سیستم در نظر گرفته شده است و پاسخ‌های ناشی از این فرض تا

زمانی که $\frac{\|C\|}{\|M\|} \ll 1$ و $\frac{\|C\|}{\|K\|} \ll 1$ معتبر است. برای این منظور حل پیشنهادی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\vec{q} = \vec{\varphi} \sin(\omega t + \psi) \Rightarrow \ddot{\vec{q}} = -\vec{\varphi} \omega^2 \sin(\omega t + \psi) \quad (37)$$

لذا داریم:

$$(K - M\omega^2) \vec{\varphi} \sin(\omega t + \psi) = \vec{p} \quad (38)$$

بنابر این با جد کردن حل بدیهی داریم:

(39)

$$\begin{bmatrix} k_{11} - m_1 \omega^2 & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} - m_2 \omega^2 & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} - m_n \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$U_G = -g[(m_0 + m_1 + \dots + m_n)q_0 + m_1 q_1 + \dots + m_n q_n] \quad (23)$$

و انرژی پتانسیل ناشی از خمش سازه بصورت زیر قابل محاسبه است:

$$U_I = \int (f_{1I} dq_1 + f_{2I} dq_2 + \dots + f_{nI} dq_n) \quad (24)$$

لذا بنابر (16) خواهیم داشت:

$$U_I = \frac{1}{2} [k_{11} q_1^2 + \dots + k_{nn} q_n^2 + 2k_{12} q_1 q_2 + 2k_{13} q_1 q_3 + \dots + 2k_{n(n-1)} q_n q_{n-1}] \quad (25)$$

بنابر این برای مجموع انرژی‌های پتانسیل خواهیم داشت:

$$\frac{\partial U}{\partial q_0} = -g(m_0 + m_1 + \dots + m_n) \quad (26)$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = k_{11} q_1 + \dots + k_{1n} q_n - m_1 g$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_n} = k_{n1} q_1 + \dots + k_{nn} q_n - m_n g$$

همان گونه که بیان شد نیروهای گرانش و خمش سازه پیشتر در انرژی پتانسیل بررسی شدند و تنها نیروی باقیمانده، نیروی آیرودینامیک وارد بر المان‌های بال است. مطابق تعریف نیروی عمومی خارجی و مختصه‌ی عمومی سیستم (متغیرهای حالت) داریم:

$$\sum Q_i \delta q_i = \sum P_i \delta x_i \quad (27)$$

یا

$$Q_0 \delta q_0 + Q_1 \delta q_1 + \dots + Q_n \delta q_n = P_{A0} \delta q_0 + P_{A1} (\delta q_0 + \delta q_1) + \dots + P_{An} (\delta q_0 + \delta q_n) \quad (28)$$

که در آن P_{Aj} بیانگر نیروی آیرودینامیک وارد بر المان j ام بال است. بنابر این داریم:

$$\begin{aligned} Q_0 &= P_{A0} + \dots + P_{An} \\ Q_1 &= P_{A1} \\ &\vdots \\ Q_n &= P_{An} \end{aligned} \quad (29)$$

در نهایت، با توجه به مطالب بیان شده بر اساس معادله‌ی لاگرانژ داریم:

(30)

$$\begin{bmatrix} m_T & m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ m_1 & m_1 & 0 & \dots & 0 \\ m_2 & 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n & 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_0 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ 0 & k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{A0} + \dots + P_{An} + m_T g \\ P_{A1} + m_1 g \\ P_{A2} + m_2 g \\ \vdots \\ P_{An} + m_n g \end{bmatrix}$$

که در آن $m_T = m_0 + m_1 + \dots + m_n$

می‌توان مجموع نیروهای آیرودینامیک و گرانش را به عنوان نیروی خارجی بصورت زیر تعریف کرد:

$$A = \begin{bmatrix} -2\xi_1\omega_1 & -\omega_1 & \cdots & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2\xi_n\omega_n & -\omega_n \\ 0 & 0 & \cdots & -\omega_n & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$B(p) = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1^T(p) \\ 0 \\ \vdots \\ \bar{\varphi}_n^T(p) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$C(p) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\varphi}_1(p) & \cdots & 0 & \bar{\varphi}_n(p) \\ & \omega_1 & & & \omega_n \end{bmatrix} \quad (52)$$

اکنون برای $p=1, \dots, n$ که معرف المانهای بال مورد بررسی می‌باشد، باید معادلات لیاپونوف گرامیان را حل نمود تا ماتریس‌های گرامیان کنترل-پذیری و مشاهده‌پذیری بدست آیند:

$$AW + WA^T + BB^T = 0 \quad (53)$$

$$A^T Q + QA + C^T C = 0 \quad (54)$$

اکنون به ازای هر المان یک ماتریس گرامیان کنترل‌پذیری و مشاهده-پذیری بدست آمده است که می‌توان بر مبنای معیار سنجش کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری معرفی‌شده در بخش قبل، درباره‌ی مناسب یا نامناسب بودن المان مذکور برای قراردادن عملگر یا حسگر بر روی آن تصمیم گرفت.

نتایج

در مطالعه‌ی حاضر از نظریه‌ی گرامیان برای مکان‌یابی مناسب عملگرها و حسگرها در آزمایش‌های ارتعاشات زمینی بال یک هواپیمای سبک استفاده می‌شود. مدل المان محدود این بال بصورت شکل (۲) است. بر این اساس نحوه‌ی توزیع جرم در طول دهانه‌ی بال برای دو مدل بال واقعی با ۲۵ المان (خط مقطع) و بال ساده‌سازی‌شده (خط ممتد) بصورت شکل (۳) خواهد بود.

اکنون با استفاده از روش یادشده می‌توان مقدار معیار سنجش کنترل-پذیری و مشاهده‌پذیری را برای موده‌های ویژه نخست سیستم بصورت شکل (۴) بدست آورد. با بررسی معیار سنجش کنترل‌پذیری و مشاهده-پذیری مشاهده می‌شود که اگرچه مقدار این معیار برای کنترل‌پذیری و مشاهده‌پذیری متفاوت است، با این حال مقدار معیار یادشده به صورت نرمال (تقسیم بر مقدار بیشینه‌ی معیار) یکسان است. این بدان معناست که در مورد بال مورد بررسی (تیر یک سر درگیر) مکان نامناسب برای قراردادن عملگرها و حسگرها یکسان است. مشاهده می‌شود که برای همه-ی موده‌ها، محل اتصال بال به بدنه (تکیه‌گاه تیر یکسر درگیر) که متناظر المان ۱ است، مکان نامناسبی برای قراردادن عملگر و حسگر است که بدیهی به نظر می‌رسد. همچنین در هر مود ویژه، نقاطی وجود دارد که معیار سنجش نرمال دارای مقدار صفر است که این نقاط مکان‌های نامناسبی برای قراردادن عملگر و حسگر هستند به عنوان مثال در مود اول بجز در المان ۱، چنین نقطه‌ای وجود ندارد. این بدان معناست که برای مود اول از دیدگاه تحریک یا ثبت داده‌های آزمایش‌های ارتعاشات، قراردادن عملگر و حسگر در هر نقطه از بال تفاوتی ایجاد نمی‌کند. اما در مود دوم علاوه بر المان ۱، در المان ۱۱ نیز معیار سنجش نرمال برابر صفر می‌شود یعنی اگر در آزمایش‌های ارتعاشات این بال کنترل، تحریک یا ثبت

با فرض جواب غیربدیهی $\bar{\varphi} \neq 0$ از حل معادله‌ی فوق پاسخ‌های $\omega_n \geq \dots \geq \omega_1$ بعنوان مقادیر ویژه سیستم بدست می‌آید. بر این اساس خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} k_{11} - m_1\omega_r^2 & k_{12} & \cdots & k_{1(n-1)} \\ k_{21} & k_{22} - m_2\omega_r^2 & \cdots & k_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{(n-1)1} & k_{(n-1)2} & \cdots & k_{(n-1)(n-1)} - m_{(n-1)}\omega_r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{a_1}{a_n}\right)_r \\ \left(\frac{a_2}{a_n}\right)_r \\ \vdots \\ \left(\frac{a_{(n-1)}}{a_n}\right)_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1n} \\ k_{2n} \\ \vdots \\ k_{(n-1)n} \end{bmatrix} \quad (40)$$

بنابر این توابع ویژه برای $r=1, \dots, n$ بصورت زیر قابل محاسبه است:

$$\bar{\varphi}_r = \begin{bmatrix} \left(\frac{a_1}{a_n}\right)_r \\ \vdots \\ \left(\frac{a_{(n-1)}}{a_n}\right)_r \\ 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

با کنار هم قرار دادن این r تابع ویژه، ماتریس توابع ویژه بدست می‌آید:

$$\phi = [\bar{\varphi}_1 \quad \cdots \quad \bar{\varphi}_n] \quad (42)$$

می‌توان نشان داد که مختصه‌های عمومی سیستم حاصل برهنه‌ی موده‌های ویژه‌ی آن سیستم است:

$$\bar{q} = \phi \bar{\eta} \quad (43)$$

که در آن موده‌های ویژه‌ی سیستم است. لذا معادله‌ی حاکم بر سیستم بصورت زیر قابل بیان خواهد بود:

$$M\phi\bar{\eta} + C\phi\bar{\eta} + K\phi\bar{\eta} = \bar{p} \quad (44)$$

یا

$$\phi^T M\phi\bar{\eta} + \phi^T C\phi\bar{\eta} + \phi^T K\phi\bar{\eta} = \phi^T \bar{p} \quad (45)$$

مطابق تعارف زیر برای ماتریس جرم مودال، ماتریس میرایی مودال و ماتریس سختی مودال:

$$\begin{aligned} M_m &= \phi^T M \phi \\ C_m &= \phi^T C \phi \\ K_m &= \phi^T K \phi \end{aligned} \quad (46)$$

داریم:

$$M_m \bar{\eta} + C_m \bar{\eta} + K_m \bar{\eta} = \phi^T \bar{p} \quad (47)$$

که بصورت معادلات جداسازی‌شده‌ی موده‌های ویژه قابل بیان است:

$$\ddot{\eta}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = \phi_i^T \bar{p} \quad i=1, \dots, n \quad (48)$$

معادلات جداسازی‌شده‌ی n مود ویژه بصورت $2n$ معادله‌ی زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + B(p)u(p) \\ y(p) &= C(p)z \end{aligned} \quad p=1, \dots, n \quad (49)$$

که در آن

داده‌های مود ویژه‌ی دوم مد نظر است، عملگر و حسگر نباید در المان ۱۱ قرار گیرند. همچنین در مود سوم علاوه بر المان ۱، در المان‌های ۸ و ۱۵ نیز معیار سنجش نرمال برابر صفر می‌شود یعنی اگر در آزمایش‌های ارتعاشات این بال کنترل، تحریک یا ثبت داده‌های مود ویژه‌ی سوم مد نظر است، عملگر و حسگر نباید در المان‌های ۸ و ۱۵ قرار گیرند و الی آخر.

بر مبنای مطالب بیان‌شده، اگر در آزمایش‌های ارتعاشات این بال کنترل، تحریک یا ثبت داده‌ها در هر دو مود ویژه‌ی دوم و سوم مد نظر باشد، به یک معیار سنجش نرمال دو بعدی مانند شکل (۵) نیاز خواهد بود که یک بعد آن مود دوم و بعد دیگر مود سوم را بررسی نماید.

بر این اساس می‌توان نتیجه گرفت که اگر رفتار هر دو مود دوم و سوم مد نظر است، عملگرها و حسگرها نباید در المان‌های ۸، ۱۱ و ۱۵ قرار بگیرند (این نقاط، نقاط گره نامیده می‌شوند) چرا که در غیر این صورت معیار سنجش مشاهده‌پذیری یا کنترل‌پذیری صفر خواهند شد که به معنای صفر شدن یکی از مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های گرامیان است که متعاقباً معنای کنترلی‌ناپذیری و مشاهده‌ناپذیری را در نقاط یادشده می‌دهد. همچنین از بالاتر بودن معیار سنجش مشاهده‌پذیری یا کنترل‌پذیری در المان‌های متفاوت می‌تواند به عنوان سنجش‌های برای مناسب بودن تحریک و داده‌برداری برای مودهای مختلف استفاده نمود.

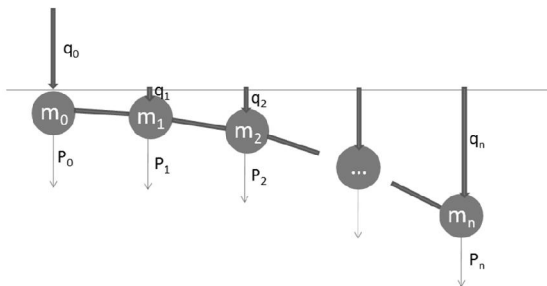
صحت‌سنجی نتایج بدست آمده

در این بخش به منظور صحت‌سنجی نتایج بدست‌آمده از نظریه‌ی گرامیان، یکبار عملگر را در یکی از نقطه‌های گره مود ویژه‌ی سوم (المان ۱۵) و بار دیگر در یک نقطه‌ی غیر گره مود ویژه‌ی سوم (المان ۲۰) قرار می‌دهیم و سعی می‌کنیم از طریق این عملگرها، رفتار مودهای مختلف سازه‌ی بال را کنترل نماییم. نتایج مربوطه در شکل (۶) آورده شده است. ملاحظه می‌شود که در شکل مربوط به مود دوم، از آنجا که هیچکدام از دو موقعیت المان ۱۵ و ۲۰، در نقاط گره مود دوم قرار ندارند، برای این مود، قرارگرفتن عملگر در هر کدام از دو موقعیت یادشده تفاوتی نمی‌کند و مود دوم را توسط عملگر قرارگرفته در هر دو موقعیت می‌توان کنترل کرد و نوسان با مرور زمان به سرعت صفر می‌شود. اما در شکل مربوط به مود سوم، اگر عملگر در نقطه‌ی گره مود سوم (المان ۱۵) قرار گیرد، کنترل این مود به سادگی ممکن نخواهد بود و نوساناتی با دامنه‌ی بزرگ بوجود می‌آیند که به سرعت نیز میرا نمی‌شوند که این به معنای عدم امکان کنترل مود سوم از طریق قرار دادن عملگر در نقطه‌ی گره آن است. در مقابل مشاهده می‌شود که مود سوم را می‌توان به راحتی از طریق عملگر قرارگرفته در المان ۲۰ کنترل نمود.

نتیجه‌گیری

در مطالعه‌ی حاضر به استفاده از نظریه‌ی گرامیان برای مکان‌یابی مناسب عملگرها و حسگرها پرداخته شد و ملاحظه گردید که با استفاده از نظریه‌ی گرامیان می‌توان مکان مناسب برای قرار دادن عملگرها و حسگرها را در آزمایش‌های ارتعاشات زمینی بدست آورد. سپس از این نظریه برای مکان‌یابی مناسب عملگرها و حسگرها در سامانه‌ی سازه‌ی بال یک هواپیمای سبک استفاده می‌شود و در نهایت نتایج بدست‌آمده از این نظریه صحت‌سنجی گردید. نتایج بدست‌آمده حاکی از آن است که با در نظر گرفتن مودهای ویژه‌ی نخست برای بال مورد بررسی، می‌توان نقاطی را یافت که برای هیچکدام از مودها، نقطه‌ی گره نباشد و لذا امکان یافتن نقاط مناسب برای قرار دادن عملگرها و حسگرها در بال مورد بررسی وجود دارد.

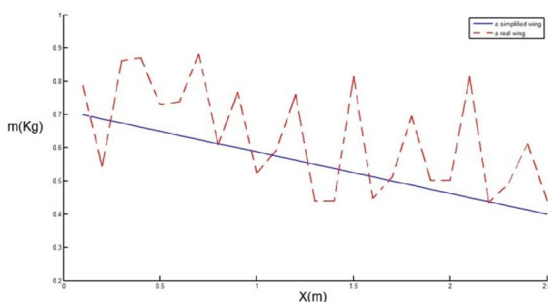
شکل‌ها و نمودارها



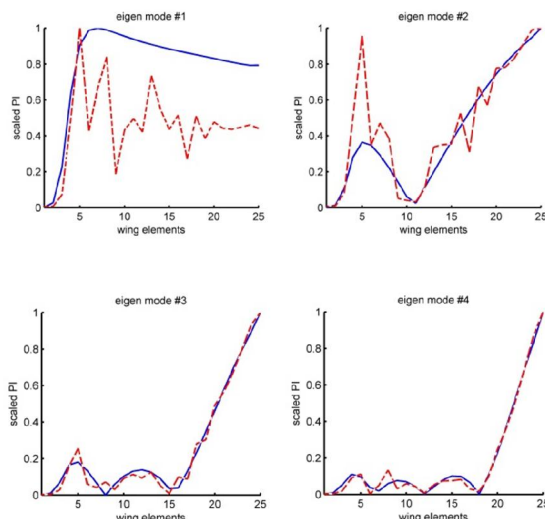
شکل ۱- مدل المان‌های بال.

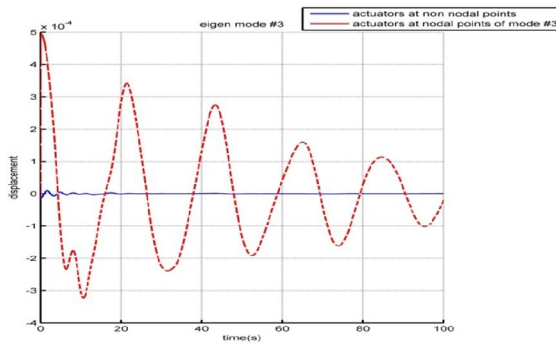


شکل ۲- مدل المان محدود بال هواپیمای سبک مورد بررسی.



شکل ۳- نحوه‌ی توزیع جرم در طول دهانه‌ی بال برای دو مدل بال واقعی (خط چین) و بال ساده‌سازی شده (خط ممتد).



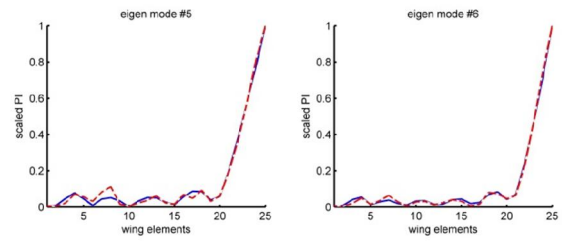


(ب)

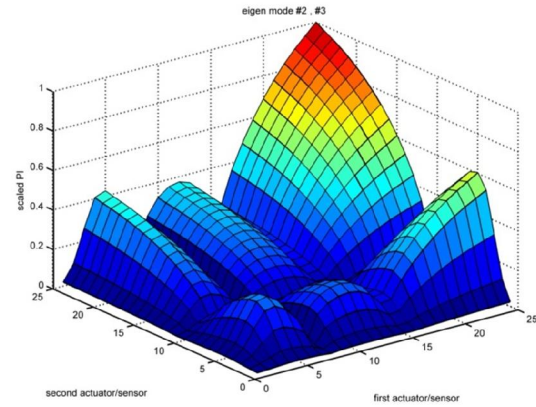
شکل ۶- کنترل رفتار الف) مود ویژه دوم و ب) مود ویژه سوم از طریق عملگر قرار گرفته در المان‌های ۱۵ (خط منقطع) و ۲۰ (خط ممتد).

مراجع

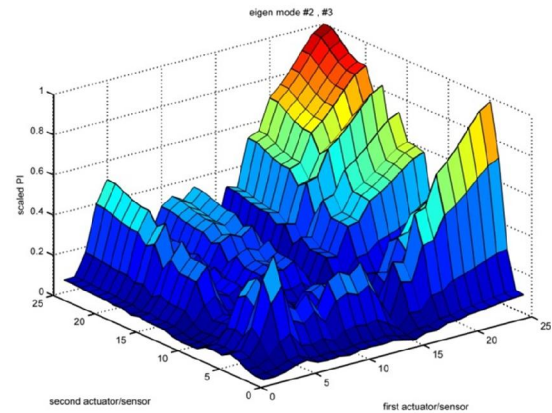
1. Marx, B., D. Koenig, and Didier Georges. "Optimal sensor and actuator location for descriptor systems using generalized Gramians and balanced realizations." American Control Conference, 2004. Proceedings of the 2004. Vol. 3. IEEE, 2004.
2. Williams, Trevor, and Jiafan Xu. "Closed-loop Gramians of flexible space structures." Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on. Vol. 3. IEEE, 1994.
3. Georges, Didier. "The use of observability and controllability gramians or functions for optimal sensor and actuator location in finite-dimensional systems." Decision and Control, 1995., Proceedings of the 34th IEEE Conference on. Vol. 4. IEEE, 1995.
4. Nguyen, Dang Toan. "Controllability gramian for optimal placement of power system stabilizers in power systems." APCCAS 2006-2006 IEEE Asia Pacific Conference on Circuits and Systems. 2006.
5. Tuna, S. Emre. "Sufficient conditions on observability gramian for synchronization in arrays of coupled linear time-varying systems." Automatic Control, IEEE Transactions on 55.11 (2010): 2586-2590.
6. Singh, Abhay K., and Juergen Hahn. "Optimal sensor location for nonlinear dynamic systems via empirical gramians." Dynamics and Control of Process Systems (2004): 965-971.
7. Dongen P. V.; 'Using Gramian Theory for Actuator and Sensor Placement'; technische universiteit eindhoven. 2004
8. Hac A. and Liu L.; 'Sensor and actuator location in motion control of flexible Structures'; Journal of Sound and Vibration 1993.



شکل ۴- معیار سنجش کنترل پذیری و مشاهده پذیری نرمال مدهای ویژه اول تا ششم برای دو مدل بال واقعی (خط چین) و بال ساده‌سازی شده (خط ممتد).

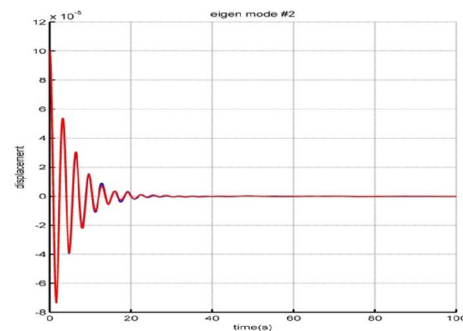


(الف)



(ب)

شکل ۵- معیار دو بعدی سنجش نرمال برای مدهای ویژه دوم و سوم برای الف) بال ساده‌سازی شده و ب) بال واقعی (۲۵ المان).



(الف)