فرآیندهای تصادفی

مبحث چهارم:فرآیند های تصادفی گسسته زمان

دکتر آقاجانی

دانشکده برق دانشگاه آزاد اسلامی واحد نجف آباد

۱- معرفی فرآیند گسسته زمان

قضیه نمونه برداری نایکویست

- اگر تبدیل فوریه یک سیگنال با باند محدود $|f|<W$ باشد نمونه های سیگنال با فاصله $T\le\frac{1}{2W}$ سیگنال را کاملا توصیف می کند.
- با نمونه برداری خواهیم داشت:

$$x(t)\xleftrightarrow{FT}X(f),\quad X(f)=0\quad\forall|f|\ge W$$

$$comb_T\{x(t)\}\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{T}REP_{\frac{1}{T}}\{X(f)\}$$

- باز سازی سیگنال از روی نمونه ها

$$X(f)=REP_{\frac{1}{T}}\{X(f)\}rect(Tf)$$

- عکس تبدیل فوریه

$$x(t)=Tcomb_T\{x(t)\}*\frac{1}{T}\operatorname{sinc}(\frac{t}{T})$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT)\operatorname{sinc}(\frac{t-kT}{T})$$

فرآیند گسسته زمان

- ممان مرتبه اول

$$m_X(n) = E\{X[n]\}$$

- ممان مرتبه دوم ساده (تابع همبستگی)

$$R_X(n_1, n_2) = E\{X(n_1T)X^*(n_2T)\} = E\{X[n_1]X^*[n_2]\}$$

- ممان مرتبه دوم مرکزی(تابع کوواریانس)

$$C_X(n_1, n_2) = E\{\tilde{X}(n_1T)\tilde{X}^*(n_2T)\} = E\{\tilde{X}[n_1]\tilde{X}^*[n_2]\}$$
$$= R_X(n_1, n_2) - m_X[n_1]m_X^*[n_2]$$

فرآیند گسسته زمان WSS

- ممان مرتبه اول

$$m_X(n) = m_x$$

- ممان مرتبه دوم ساده (تابع همبستگی)

$$R_X(m) = E\{X[n+m]X^*[n]\}$$

- ممان مرتبه دوم مرکزی(تابع کوواریانس)

$$C_X(m) = E\{\tilde{X}[n+m]\tilde{X}^*[n]\}$$
$$= R_X(m) - |m_X|^2$$

دو فرآیند گسسته زمان

WSS

$$R_{XY}(m) = E\{X[n+m]Y^*[n]\}$$

$$C_{XY}(m) = E\{\tilde{X}[n+m]\tilde{Y}^*[n]\}$$

$$C_{XY}(m) = R_{XY}(m) - |m_X|^2$$

حالت کلی

$$R_{XY}(n,\ell) = E\{X[n]Y^*[\ell]\}$$

$$C_{XY}(n,\ell) = E\{\tilde{X}[n]\tilde{Y}^*[\ell]\}$$

$$C_{XY}(n,\ell) = R_{XY}(n,\ell) - m_X(n)m^*_Y(\ell)$$

توان و انرژی سیگنال گسسته زمان

- توان لحظه ای فرآیند گسسته زمان

$$E[|x[n]|^2]=R_x(n,n)\overset{wss}{=}R_x(0)$$

- انرژی

$$E_x=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E[|x[n]|^2]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}R_x(n,n)\overset{wss}{=}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}R_x(0)=\infty$$

- توان متوسط

$$P_x=\langle E[|x[n]|^2]\rangle_n=\langle R_x(n,n)\rangle_n\overset{wss}{=}\langle R_x(0)\rangle_n=R_X(0)$$

- متوسط زمانی فرآیند گسسته

$$\langle x[n]\rangle_n=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N}x[n]$$

فرآیند گسسته محدود شده در زمان

- سیگنال محدود شده و تبدیل فوریه

$$x_N(n) = \begin{cases} x(n), & |n| \le N \\ 0, & |n| \ge N+1 \end{cases} \qquad x_N(n) \xrightarrow{DTFT} X_N(f)$$

- طیف توان

$$S_x(f) = \lim_{N \to \infty} \frac{E\{|X_N(f)|^2\}}{2N+1}$$

- توان متوسط

$$P_x = \int_{-0.5}^{+0.5} S_x(f)\,df$$

طیف توان و تابع همبستگی

- طیف توان فرآیند گسسته زمان

$$< R_X(n+m,n) >_n \xleftrightarrow{DTFT_m} S_X(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} < R_X(n+m,n) >_n e^{-j2\pi fm}$$

- طیف توان فرآیند گسسته زمان ساکن (WSS)

$$R_X(m) \xleftrightarrow{DTFT_m} S_X(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_X(m) e^{-j2\pi fm}$$

$$R_X(m) = \int_{-0.5}^{0.5} S_X(f) e^{j2\pi fm} df$$

طیف توان متقابل

- طیف توان متقابل دو فرآیند

$$S_{XY}(f) = \lim_{N \to \infty} \frac{E\{X_N(f) Y_N^*(f)\}}{2N+1}$$

- طیف توان متقابل و تابع همبستگی متقابل

$$< R_{XY}(n+m,n) >_n \xleftrightarrow{DTFT_m} S_{XY}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} < R_{XY}(n+m,n) >_n e^{-j2\pi fm}$$

- طیف توان متقابل و تابع همبستگی متقابل فرآیند های توأماً WSS

$$R_{XY}(m) \xleftrightarrow{DTFT_m} S_{XY}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{XY}(m) e^{-j2\pi fm}$$

$$R_{XY}(m) = \int_{-0.5}^{0.5} S_{XY}(f) e^{j2\pi fm} df$$

طیف توان در حوزه Z

- در حالت کلی

$$< R_X(n+m,n) >_n \xleftrightarrow{Z\ transform} S_X(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} < R_X(n+m,n) >_n z^{-m}$$

- فرآیند WSS

$$R_X(m) \xleftrightarrow{ZT} S_X(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_X(m) z^{-m}$$

- طیف متقابل در حالت کلی

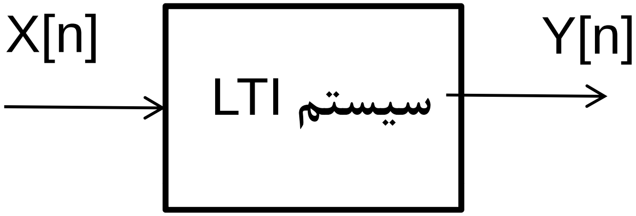
$$< R_{XY}(n+m,n) >_n \xleftrightarrow{ZT} S_{XY}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} < R_{XY}(n+m,n) >_n z^{-m}$$

- طیف متقابل فرآیند های WSS

$$R_{XY}(m) \xleftrightarrow{ZT} S_{XY}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{XY}(m) z^{-m}$$

۲– ممان ها و طیف توان در سیستم خطی

سیستم های خطی



- رابطه ورودی و خروجی

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k} h[n-k]x[k]$$

- ممان مرتبه اول

$$m_Y[n]=m_X[n]*h[n]=\sum_{k} h[n-k]m_x[k]$$

- ممان مرتبه دوم ساده(همبستگی)

$$R_{YX}[n,\ell]=R_X[n,\ell]*h[n]=\sum_{k} h[n-k]R_x[k,\ell]$$

$$R_{XY}[n,\ell]=R_X[n,\ell]*h^*[\ell]=\sum_{k} h[\ell-k]R_x[n,k]$$

$$R_Y[n,\ell]=R_X[n,\ell]*h[n]*h^*[\ell]=\sum_{k}\sum_{i} h[n-k]R_x[k,i]h^*[\ell-i]$$

فرآیند های WSS

- ممان مرتبه اول

$$m_Y[n] = m_X \sum_k h[n-k] = m_X H(0)$$

- ممان مرتبه دوم ساده(همبستگی)

$$R_{YX}[m] = R_X[m] * h[m]$$

$$R_{XY}[m] = R_X[m] * h^*[-m]$$

$$R_Y[m] = R_X[m] * h[m] * h^*[-m]$$

روابط طیف توان سیستم LTI

- حوزه فوریه

$$S_{YX}(f) = S_X(f) H(f)$$

$$S_{XY}(f) = S_X(f) H^*(f)$$

$$S_Y(f) = S_X(f) |H(f)|^2$$

- حوزه Z

$$S_{YX}(z) = S_X(z) H(z)$$

$$S_{XY}(z) = S_X(z) H^*(\frac{1}{z})$$

$$S_Y(z) = S_X(f) H(z) H^*(\frac{1}{z})$$

۳- مدل سازی فرآیند های گسسته زمان

مدل نویز سفید

- هر متغیر فرآیند نسبت به متغیر های قبلی ناهمبسته فرض می شود. (با متغیر های بعدی نیز ناهمبسته می شوند!)

$$R_w(m) = E\{W[n+m]W^*[n]\} = \sigma_w^2 \delta(m)$$

$$S_W(f) = \sigma_w^2$$

مدل میانگین متحرک (MA)

- مدل MA از مرتبه M هر متغیر تصادفی جدید فرآیند : ترکیبی خطی از M متغیر تصادفی اخیر نویز سفید و متغیر تصادفی جدید آن فرض می شود:

$$W(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow X(n)$$

$$X(n) = W[n] + \sum_{k=1}^{M} b_k W(n-k),$$

- با تبدیل Z از طرفین رابطه بالا:

$$X(z) = W(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}, b_0 = 1$$

$$H(z) = \frac{X(z)}{W(z)} = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

MA

- فرآیند MA(M) یک فرآیند M–همبسته است یعنی همبستگی بین متغیر های تصادفی آن تا M متغیر مجاور ادامه می یابد.

$$S_X(z) = S_w(f)H(z)H^*(\frac{1}{z}) = \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{M}\sum_{j=0}^{M} b_k b_j^* z^{j-k}$$

- چند جمله ای با توان های z^{-M} تا z^{M}

$$S_X(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_X(m) z^{-m}$$

- مقادیر تابع همبستگی برای $|m| \geq M+1$ صفر هستند.

مدل خود بازگشتی (AR)

- مدل AR از مرتبه N هر متغیر تصادفی جدید فرآیند : ترکیبی خطی از N متغیر تصادفی اخیر خود فرآیند و متغیر تصادفی جدید تویز فرض می شود:

$$X(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k X(n-k) + W[n]$$

$$W(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow X(n)$$

- با تبدیل Z از طرفین رابطه بالا:

$$X(z)\sum_{k=0}^{p} a_k z^{-k} = W(z), \quad a_0 \equiv 1$$

$$H(z) = \frac{X(z)}{W(z)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{p} a_k z^{-k}}$$

مدل (ARMA)

- مدل ARMA از مرتبه N و M هر متغیر تصادفی جدید فرآیند : ترکیبی خطی از N متغیر تصادفی اخیر خود فرآیند و M متغیر تصادفی اخیر نویز بعلاوه متغیر تصادفی جدید نویز فرض می شود:

$$X(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k X(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k W(n-k) \quad b_0 = 1$$

$$W(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow X(n)$$

- با تبدیل Z از طرفین رابطه بالا:

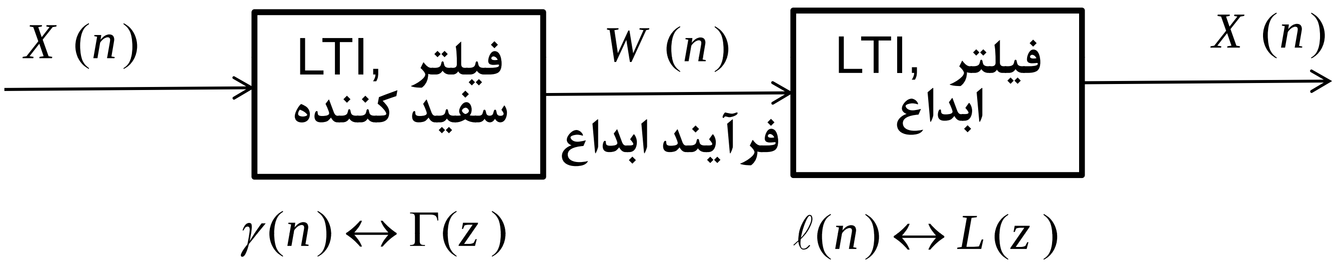
$$X(z)\sum_{k=0}^{p} a_k z^{-k} = W(z)\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}, \quad a_0 \equiv 1$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k} = \frac{X(z)}{W(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_p z^{-p}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

۳- فرآیند ابداع و مدلسازی فرآیندهای باطیف کسری

فرآیند ابداع

- فرآیند سفید و نرمالیزه که با فرآیند مورد نظر بطور خطی و علی معادل است.



- شروط مطابق با فیلتر های فوق

$$1)\ \ \Gamma(z)L(z)=1$$

$$2)\ \ S_W(z)L(z)L^*(z^{-1})=S_X(z)$$

3) علیــــــــت

- تابعی باید با دامنه فوق و فازی که سیستم را علی کند در نظر بگیریم؟!

شرط پالی- وینر

- شرط لازم و کافی برای علی شدن تابع تبدیل با دامنه مفروض به صورت زیر است:

$$\int_{-0.5}^{+0.5} \ln(S_X(f))df \neq \pm\infty$$

-

رابطه خطی و علی بین فرآیند و فرآیند ابداعش

- مدل MA مرتبه بی نهایت بر حسب فرآیند ابداع

$$X(n)=\ell(n)*w(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\ell(k)W(n-k)=\ell(0)W(n)+\sum_{k=1}^{\infty}\ell(k)W(n-k)$$

- مدل AR مرتبه بی نهایت بر حسب فرآیند ابداع

$$W(n)=\gamma(n)*X(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma(k)X(n-k)=\gamma(0)X(n)+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma(k)X(n-k)$$

$$X[n]=\frac{1}{\gamma(0)}W[n]+(-1)\sum_{k=1}^{\infty}\gamma(k)X(n-k)$$

روش تعیین فیلتر ابداع و سفید کننده

- تجزیه چگالی طیف توان

$$S_X(f)=K^2\frac{\prod_{i=1}^{M}(1-y_i e^{-j2\pi f})(1-y_i^{*}e^{+j2\pi f})}{\prod_{k=1}^{N}(1-z_i e^{-j2\pi f})(1-z_i^{*}e^{+j2\pi f})}$$

$$S_X(z)=K^2\frac{\prod_{i=1}^{M}(1-y_i z^{-1})(1-y_i^{*}z)}{\prod_{k=1}^{N}(1-z_i z^{-1})(1-z_i^{*}z)}$$

$$S_X(z)=L(z)L^{*}(z^{-1})$$

- صفرها و قطبهای داخل دایره واحد را جدا می کنیم
  - *برای علی بودن فیلتر ابداع و عکس آن (فیلتر سفید کننده):*

$$L(z)=K\frac{\prod_{i=1}^{M}(1-y_i e^{-j2\pi f})}{\prod_{k=1}^{N}(1-z_i e^{-j2\pi f})}$$