بسم الله الرحمن الرحیم

فرآیندهای تصادفی

مقدمه

دکتر آقاجانی

دانشکده برق دانشگاه آزاد اسلامی واحد نجف آباد

مراجع

- **Athanasios Papoulis, S. Unnikrishna Pillai, “Probability, Random Variables, and Stochastic Processes”, McGraw-Hill Education, 4 Edition ,2002**
- **Peebles, P. Z. "Probability, Random Variables and Random Signal Processing.“, McGraw-Hill Education, 4 Edition (2001).**
- **Harold J. Larson, Bruno O. Shubert, “Probabilistic Models in Engineering Sciences: Random variables and stochastic processes”, Wiley, 1979**
- **Narahari Umanath Prabh, “Stochastic Processes: Basic Theory and Its Applications”, 2007**

نحوه ارزیابی

- امتحان اول در تاریخ دوشنبه ۱۳۹۳/۲/۸ (E1)
  - ➢ *مبحث اول و دوم*
- امتحان دوم در تاریخ ۱۳۹۳/۳/۱۷ (E2)
  - ➢ *مبحث ۳ و ۴ و ۵*
- فعالیت کلاسی (E3)
  - ➢ *مشارکت در مباحث کلاس*
  - ➢ *تحویل تمرین ها*
    - ۵ سری تمرین در انتهای هر مبحث (یک یا دوهفته فرصت تحویل)

$$POINT = \frac{E3}{3} + \frac{E2}{12} + \frac{E1}{5} \quad \checkmark$$

- تکالیف و منابع درس در www.aghajany.ir

مباحث درس

- مقدمه ای بر فرآیند های تصادفی
  - *مفاهیم اساسی احتمالات*
  - *متغیر های تصادفی*
  - *امید ریاضی*
  - *آشنایی با چند متغیر تصادفی*
  - *بردار تصادفی*
- معرفی فرآیندهای تصادفی
  - *تعریف و توصیف فرآیندهای تصادفی*
  - *ممان های اول و دوم فرآیندها*
  - *دسته بندی فرآیندها*
  - *فرآیندهای ساکن*

مباحث درس (ادامه)

- *آشنایی با چند فرآیند مهم*
- *عبور فرآیند از سیستم خطی*
- *فرآیند های ارگادیک*

- طیف توان و بسط های متعامد فرآیند ها
  - *معرفی طیف توان و طیف توان متقابل*
  - *نکاتی در مورد طیف توان*
  - *طیف توان در ورودی وخروجی سیستم های LTI*
  - *بسط های متعامد فرآیندها*
  - *فرآیند ابداع*

- فرآیندهای گسسته زمان
  - *فرآیند با باند محدود*

مباحث درس (ادامه)

- سیستم ها و سیگنال های گسسته
- طیف توان فرآیند های گسسته زمان
- مدل های فرآیندهای گسسته زمان

- تخمین
  - معرفی معیار های تخمین
  - تخمین خطی
  - تخمین خطی بر حسب بردار داده
  - تخمین خطی بر حسب فرآیند پیوسته زمان

مبحث اول

مقدمه ای بر فرآیندهای تصادفی

فهرست

۱. مفاهیم اساسی احتمالات
۲. متغیر تصادفی
۳. امید ریاضی
۴. چند نمونه متغیر تصادفی
۵. بردار تصادفی

۱- مفاهیم اساسی احتمالات

تعریف

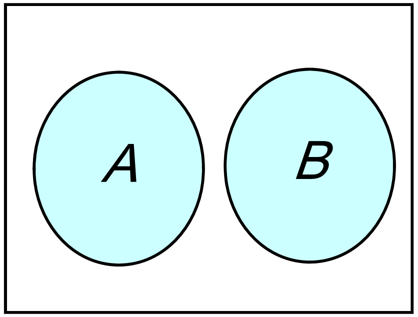
- آزمایش تصادفی
  - *آزمایشی که منجر به نتایج مختلفی مثل $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots\}$ شود و نتیجه از قبل معلوم نباشد. مثل پرتاب سکه، تاس و ...*
- فضای نمونه(Sample Space)
  - *مجموعه کلیه نتایج آزمایش تصادفی* $\Omega = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots\}$
  - *اگر تعداد نقاط قابل شمارش باشد فضای نمونه گسسته است ، پرتاب تاس*
  - *اگر تعداد تقاط غیر قابل شمارش باشد فضای نمونه پیوسته است، دامنه نویز*
- پیشامد (Event)
  - *زیر مجموعه ای از فضای نمونه، مجموعه ای از برخی نتایج*

$$E \subset \Omega$$

- پیشامد فضای نمونه Ω ،پیشامد حتمی
- پیشامد تهی Φ ،پیشامد غیر ممکن

پیشامد های جدا از هم

- پیشامد های جدا از هم پیشامدهای بدون اشتراک هستند. یعنی رخداد توام هر دو غیر ممکن است.

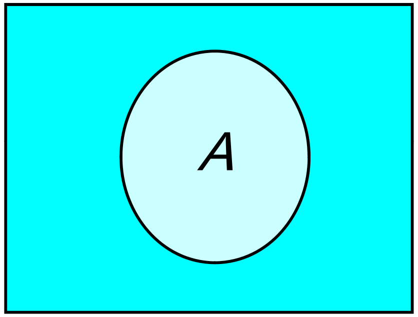


$$A \cap B = \phi$$

$$AB = \phi$$

پیشامد مکمل

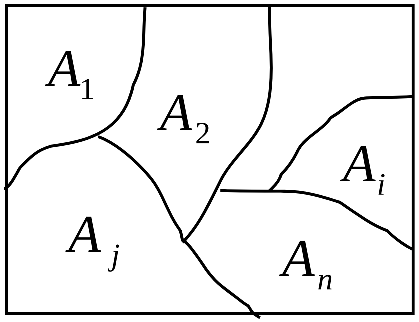
- پیشامد جدا از A که اجتماع آن با پیشامد مکمل $\overline{A}$ منجر به فضای نمونه می شود.



$\overline{A}$

افراز فضای نمونه

- مجموعه پیشامد هایی که دو شرط زیر را داشته باشند فضای نمونه را افراز (پارتیشن بندی) می کنند.



$$A_i \cap A_j = \phi, \quad \text{and} \quad \bigcup_{i=1} A_i = \Omega.$$

تعریف احتمال

- تابعی مثل p که به هر پیشامدمثل A یک عدد حقیقی مثل P(A) با سه شرط زیر نسبت می دهد:

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad P(A) \geq 0 \\
&\text{(ii)} \quad P(\Omega) = 1 \\
&\text{(iii)} \quad \text{If } A \cap B = \phi, \quad \text{then} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B).
\end{aligned}
$$

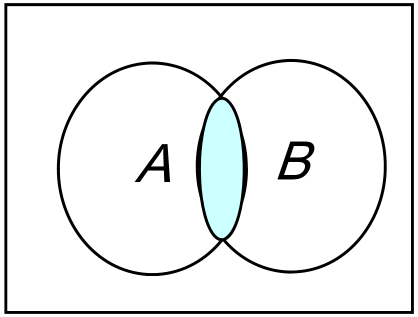
خواص تابع احتمال

- $\mathrm{P}(A \cup \overline{A}) = P(A) + \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 \quad \text{or} \quad \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - P(A).$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- $P(A) \leq 1$
- $P(\phi) = 0$

احتمال شرطی

- تعریف

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},$$



- رابطه زنجیره ای

$$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)$$

استقلال پیشامدها

- هر گاه قطعی بودن رخداد یکی هیچ تاثیری بر احتمال وقوع دیگری نداشته باشد.

$$P(A\,|\,B)=P(A)$$

شرط استقلال

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

$$A \perp\!\!\!\perp B$$

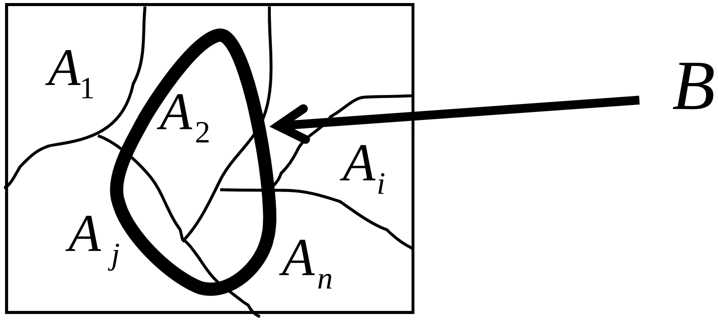
- با جدا بودن پیشامدها اشتباه نشود

شرط جدا از هم بودن

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

قانون احتمال کلی

- احتمال هر پیشامد برابر است با متوسط احتمالات شرطی آن وقتی که شرایط فضای نمونه را افراز کنند.



$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

قانون بیز (Bayes)

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)},$$

- مثال۱) در کیسه ای ۱۰۰۰ توپ وجود دارد یکی از این توپ ها سفید و بقیه سیاه می باشند. شخصی با احتمال خطای ۲۰ در صد توپ سفید را تشخیص می دهد. احتمال سفید بودن توپ خارج شده توسط شخص چقدر است؟