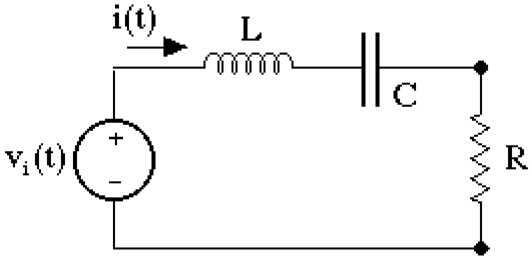
ابزار های ریاضی مورد نیاز درس کنترل خطی به همراه دستورات معادل در MATLAB

۱- معادلات دیفرانسیل:

بر خلاف معادلات معمولی، معادلات دیفرانسیل معادله ای بین یک تابع، متغیر (های) مستقل، مشتقات و انتگرال های تابع نسبت به متغیر (های) مستقل میباشد. چنانچه تابع فقط یک متغیر مستقل داشته باشد، معادلات دیفرانسیل معمولی و چانچه چند متغیر مستقل داشته باشد، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی خواهیم داشت.

رنج وسیعی از سیستم ها در مهندسی را می توان با استفاده از معادلات دیفرانسیل مدل کرد که متغیر مستقل زمان (t) میباشد. به عنوان مثال معادله دیفرانسیل یک مدار RLC سری به صورت زیر میباشد:



$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{c}\int i(t)dt = \mathrm{v_i}(t)$$

در درس کنترل خطی چون سیستم های در نظر گرفته شده خطی هستند، معادلات دیفرانسیل بیان کننده آنها نیز معمولی خطی هستند. یک معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه n را میتوان توسط رابطه زیر بیان کرد:

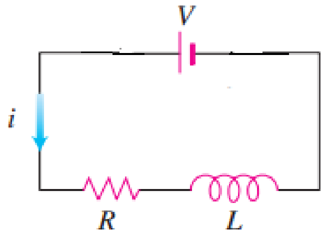
$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t)$$

که ضرائب a_0 ، a_1 ، ... و a_{n-1} اعداد ثابت هستند. جواب هر معادله دیفرانسیل شامل دو قسمت جواب عمومی(گذرا) و جواب خصوصی(ماندگار) میباشد. لذا جواب معادله اخیر به صورت زیر میباشد:

$$y(t) = \text{ General Solution+Personal Solution } = y_g(t) + y_p(t)$$

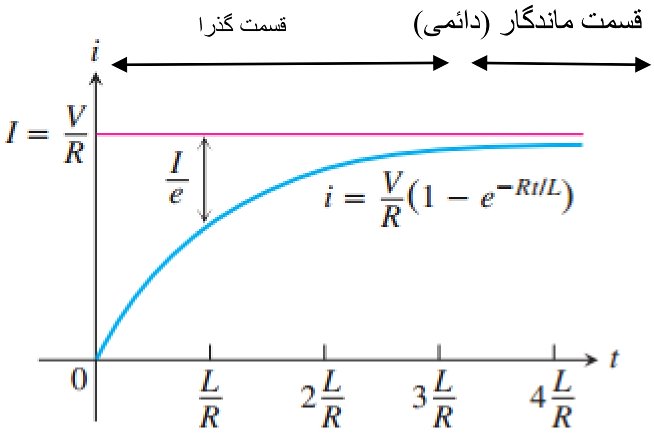
که جواب عمومی به صورت مجموعی از توابع نمایی و جواب خصوصی بر حسب تابع تحریک *f(t)* به دست می اید.

مثال: مدار R-L زیر را در نظر بگیرید. معادله دیفرانسیل بیان کننده این مدار در زیر بیان شده است (که با استفاده از قوانین کیرشهف و روبط جریان ولتاژ مقاومت و سلف به دست آمده اند)



$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{V}{L},$$

رابطه و شکل جواب معادله دیفرانسیل فوق به صورت زیر است



$$i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R} e^{-(R/L)t}$$

نکته: جواب معادلات دیفرانسیل مرتبه اول $\dot{y} + p(t)y = q(t)$ به صورت زیر میباشد:

$$y = e^{-\int p(t)dt} \left[\int q(t) e^{\int p(t)dt} dt + C \right]$$

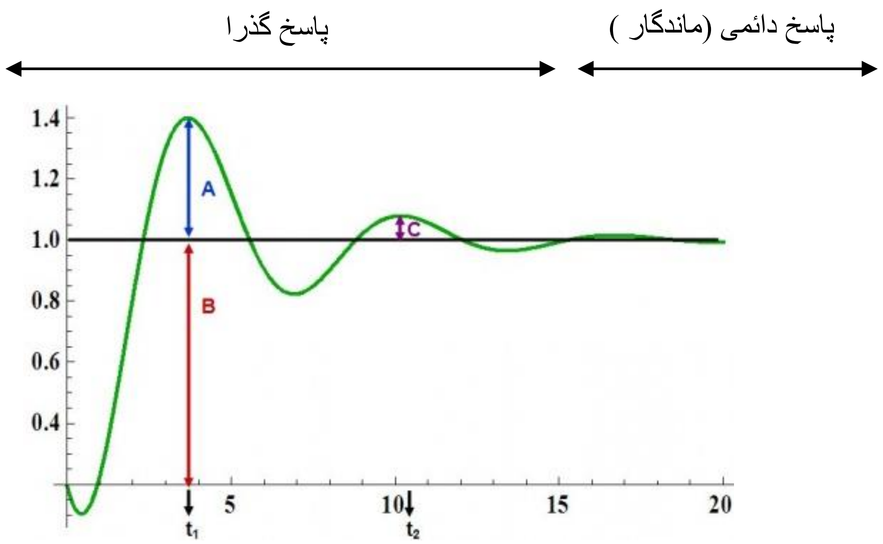
نکته: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b$ دارای جوابی به صورت زیر است:

$$y = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + k_3$$

که ضرائب k_i با توجه به شرایط اولیه و نهایی و s_1 و s_2 از معادله مشخصه زیر بدست می اید:

$$\Delta(s) = s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

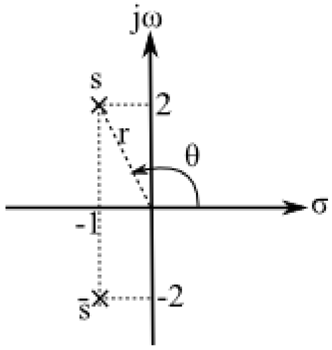
مثال: نمونه ای از جواب یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم:



۲ - اعداد و توابع مختلط

در مباحث مهندسی، اعداد مختلط را عموما با متغیر s و بصورت $s=\sigma+j\omega$ نشان میدهند که σ بخش حقیقی و ω بخش موهومی s نام دارد ($\sigma=\mathrm{Re}(s), \omega=\mathrm{Im}(s)$). این اعداد در صفحه s (شکل ۱) قابل نمایش هستند.

بعنوان مثال عدد $s=-1+2j$ در این صفحه نمایش داده شده است. اندازه، فاز و مزدوج هر عدد مختلط بصورت زیر می باشند:



شکل ۱

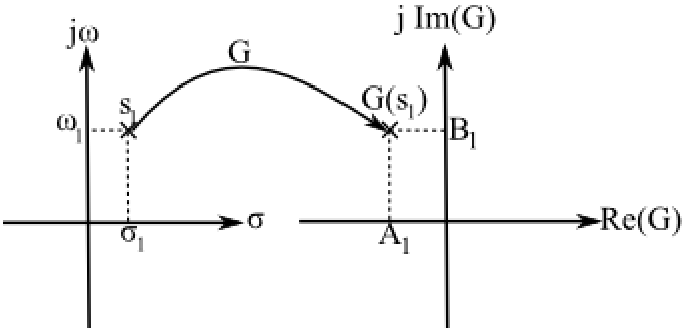
نمایش اعداد مختلط: $\begin{cases} \text{فرم دکارتی}: s=\sigma+j\omega \\ \text{فرم قطبی}: s=|s|\angle s \end{cases}$

$$|s|=r=\sqrt{\sigma^2+\omega^2} \quad , \quad \theta=\angle s=tg^{-1}(\frac{\omega}{\sigma})$$

$$\bar{s}=\sigma-j\omega$$

هر تابعی از اعداد مختلط نیز یک تابعی مختلط است که دارای بخش های حقیقی و موهومی هستند (شکل ۲ را ببینید):

$$G(s)=A_1+jB_1 \quad \Rightarrow \begin{cases} |G|=\sqrt{A_1^2+B_1^2} \\ \angle G=tg^{-1}(\frac{B_1}{A_1}) \end{cases}$$



شکل ۲

تابع G را در یک ناحیه **تحلیلی (analytic)** گویند اگر G و مشتقاتش در این ناحیه موجود باشند. مثلا تابع $G_1(s)=\dfrac{1}{s+2}$ و مشتقش $\dfrac{d}{ds}G_1(s)=-\dfrac{1}{(s+2)^2}$ همه جا وجود دارد، بجز s = -2 ، بنابراین G_1 در همه جای صفحه s بجز نقطه s = -2 تحلیلی است. به این نقطه تکین گویند. دو مفهوم دیگر در مورد توابع مختلط **صفر** (zero) ها و **قطب** (pole) های این توابع می باشد:

$$\begin{cases} s_1 \text{ is zero if } \mathrm{G}(s_1)=0 \\ s_1 \text{ is pole if } \mathrm{G}(s_1)\to\infty \end{cases}$$

نکته: گویند تابع $G(s)$ در نقطه $s = -a$ دارای یک قطب از مرتبه n است اگر حاصلضرب $(s+a)^nG(s)$ ، بازاء $n=1,2,..$ ، دارای یک مقدار غیرصفر محدود در $s= -a$ باشد.

بعنوان مثال تابع $G_2(s) = \dfrac{K(s+4)(s+6)}{s(s+1)(s+10)^2}$ دارای صفرهایی در $s = -4$ و $s = -6$ و دو قطب ساده $s = 0$ و $s = -1$ و یک قطب مرتبه دو (مضاعف) در $s = -10$ است. دقت کنید که برای مقادیر خیلی بزرگ s تابع G_2 میتواند بصورت زیر نوشته شود

$$G_2(s) = \frac{K}{s^2}$$

لذا این تابع دارای یک صفر از مرتبه ۲ در $s = \infty$ است.

۲-۱ نمودارهای حوزه فرکانس

تابع مختلط $G(s)$ را در نظر بگیرید. نمودارهای حوزه فرکانس با تبدیل s به $j\omega$ و بیان آن بفرم اندازه–فاز بدست می آید:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$$

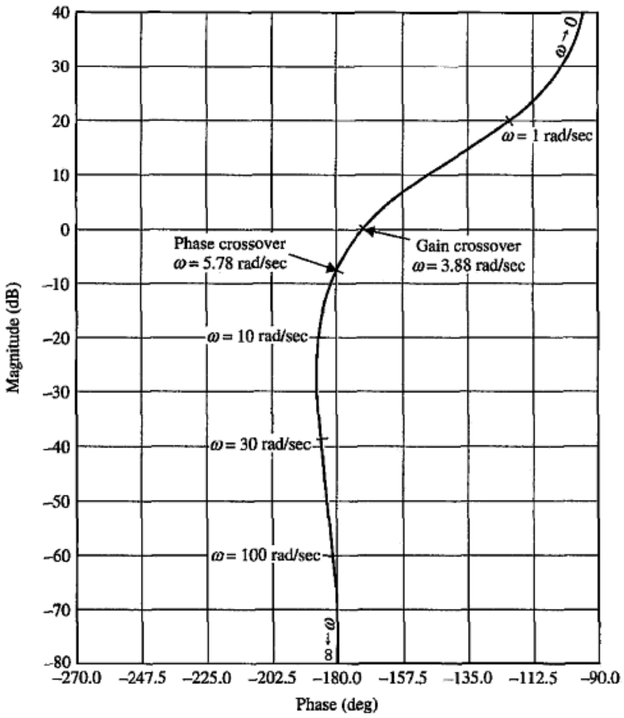
نمودارهای حوزه فرکانس زیر در مباحث سیستم های کنترل مورد استفاده قرار می گیرند:

۱- نمودارهای قطبی (Polar diagram)

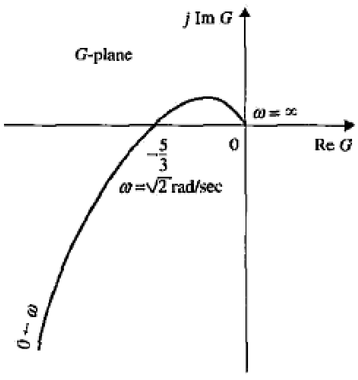
۲- نمودارهای بود (Bode diagram)

۳- نمودارهای دامنه–فاز (Magnitude-Phase diagram)

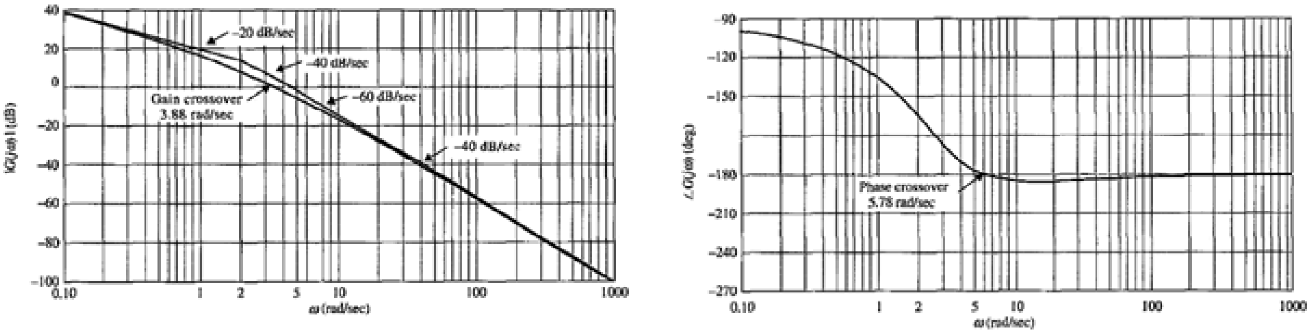
در زیر این نمودارها برای توابع مختلط خاصی آورده شده است:



Magnitude-phase plot of $G(s) = \frac{10(s+10)}{s(s+2)(s+5)}$.



Polar plot of $G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}$.



Bode plot of $G(s) = \frac{10(s+10)}{s(s+2)(s+5)}$.

۳- تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس یک ابزار ریاضی مفید در حل معادلات دیفرانسیل خطی می باشد. تبدیلات لاپلاس عملگرهایی مانند مشتق و انتگرال را به عملگرهای جبری تبدبل می کنند، بطوریکه یک معادله دیفرانسیل خطی را بیک معادله جبری بر حسب s تبدیل میکنند. نهایتا جواب معادله دیفرانسیل با استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس بدست می آید.

عموما آنالیز و طراحی سیستم های کنترل خطی در حوزه لاپلاس (s) بدون حل معادلات دیفرانسیل توصیف کننده سیستم انجام میشود.

روش های گرافیکی مانند دیاگرام بُد، مکام هندسی و دیاگرام نایکویست نیز از تبدیل لاپلاس جهت بدست آوردن عملکرد سیستم استفاده میکنند.

تابع زمانی $f(t)$ که برای $t<0$ مقدار آن صفر است را در نظر بگیرید، تبدیل لاپلاس این تابع که با $F(s)$ نشان داده میشود بصورت زیر تعریف میشود:

$$L\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

تابع $f(t)$ میتواند از $F(s)$ و بکمک تبدیل معکوس لاپلاس بدست آید: $f(t) = L^{-1}\left[F(s)\right]$.

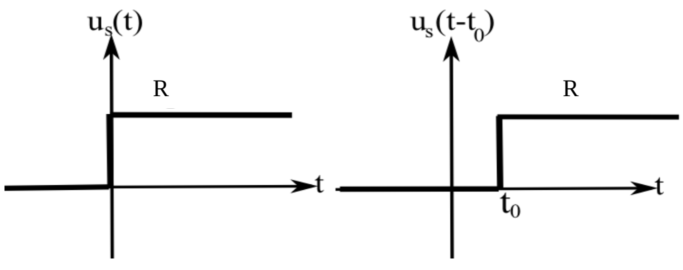
۳-۱ تبدیل لاپلاس توابع مهم:

۱- تابع نمایی **(Exponential function)**:

$$\boxed{F(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha}} \Leftarrow f(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

۲- تابع پله **(Step function)** : در شکل ۴ تابع پله واحد $u_s(t)$ و تابع پله واحد رخ داده در $t=t_0$ نشان داده شده است.

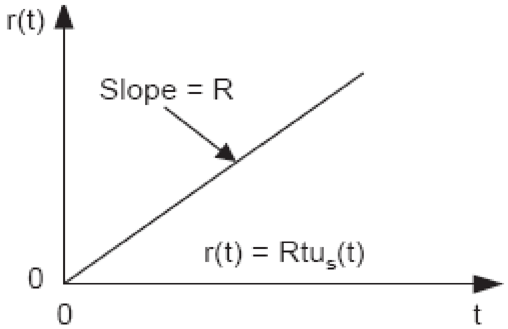
$$\boxed{F(s) = \frac{R}{s}} \Leftarrow f(t) = Ru_s(t) = \begin{cases} R & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



شکل ۴

از لحاظ فیزیکی، یک تابع پله رخ داده در $t=t_0$ ، معادل یک سیگنال ثابت است که بطور ناگهانی در $t=t_0$ به سیستم اعمال شود.

۳- تابع شیب **(Ramp function)**: در شکل ۵ تابع شیب نشان داده شده است:



شکل ۵

$$\boxed{F(s)=\frac{R}{s^2}} \Leftarrow f(t)=Rtu_s(t)=\begin{cases} Rt & t\ge 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

۴- تابع سینوسی

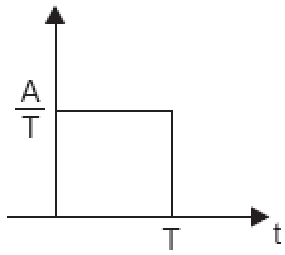
$$\boxed{F(s)=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}} \Leftarrow f(t)=\begin{cases} A\sin(\omega t) & t\ge 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

برای تابع کسینوس :

$$\boxed{F(s)=\frac{As}{s^2+\omega^2}}$$

۵- تابع پالس (شکل ۶)

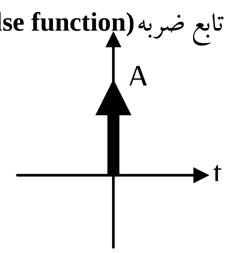
$$f(t)=\begin{cases} \dfrac{A}{T} & 0\le t\le T \\ 0 & t<0, t>T \end{cases} \Rightarrow f(t)=\frac{A}{T}u_s(t)-\frac{A}{T}u_s(t-T)\Rightarrow$$



شکل ۶

$$\boxed{F(s)=\frac{A}{Ts}(1-e^{-Ts})}$$

۶- تابع ضربه **(Impulse function)** : (شکل ۷)



شکل ۷

$$f(t)=\lim_{T\to o}\frac{A}{T} \quad \text{for } 0<t<T$$
$$=0 \quad \text{for } t<0, t>T$$
$$\Rightarrow \quad F(s)=A$$

در مباحث مهندسی وقتی A=1 ، تابع ضربه را تابع دلتای دیراک *(Dirac delta function)* گویند. تابع دلتای دیراک رخ داده در t=t$_0$ را بصورت $\delta(t-t_0)$ نشان میدهند که دارای ویژگی های زیر است:

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}0 & t\neq t_0\\ \infty & t=t_0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt=u_s(t) \quad\Rightarrow\quad \delta(t-t_0)=\frac{d}{dt}u_s(t)$$

۳-۲ خواص تبدیل لاپلاس

۱- $$L\left[\sum_i a_i f_i(t)\right]=a_i\sum_i F_i(s)$$

۲- $$L\left[e^{-\alpha t}f(t)\right]=F(s+\alpha)$$

۳- $$L\left[f(t)u_s(t)\right]=F(s)\quad\Rightarrow L\left[f(t-\alpha)u_s(t-\alpha)\right]=e^{-\alpha s}F(s)$$

۴- $$L\left[f(t)\right]=F(s)\quad\Rightarrow L\left[f(\frac{t}{\alpha})\right]=\alpha F(\alpha s)$$

۵- $$L\left[f(t)u_s(t)\right]=F(s)\quad\Rightarrow L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0)$$

$$L\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

۶- قضیه مقدار اولیه: $$f(0^+)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$$

۷- قضیه مقدار نهایی: $$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$$

به شرط آنکه $\lim_{t\to\infty}f(t)$ موجود باشد، که مستلزم آن است که قطب های sF(s) در سمت چپ محور $j\omega$ در صفحه s باشند.

۸- انتگرال کانولوشن

$$\begin{cases}L\left[f_1(t)\right]=F_1(s)\\ L\left[f_2(t)\right]=F_2(s)\end{cases}\quad\Rightarrow\quad L\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right]=F_1(s)F_2(s)$$

۳-۳ جدول تبدیل لاپلاس توابع زمانی در سیستم های کنترل خطی:

	$f(t)$	$F(s)$
1.	Unit impulse $\delta(t)$	1
2.	Unit step $1u_s(t)$	$\frac{1}{s}$
3.	t	$\frac{1}{s^2}$
4.	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\ (n=1,2,3,\ldots)$	$\frac{1}{s^n}$
5.	t^n, (n=1,2,3,…)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7.	$t\,e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8.	$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!},(n=1,2,3,\ldots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9.	$t^n e^{-at}\ (n=1,2,3,\ldots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
11.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
12.	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
13.	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
14.	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15.	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt}),\ b\neq a$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16.	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt}-ae^{-at}),\ b\neq a$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17.	$\frac{1}{ab}[1+\frac{1}{a-b}(be^{-bt}-ae^{-at})],\ b\neq a$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
18.	$\frac{1}{a^2}(1-e^{-at}-ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$

19.	$\frac{1}{a^2}(at-1+e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
20.	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
21.	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
22.	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}}e^{-\delta\omega_n t}\sin\omega_n\left(\sqrt{1-\delta^2}\right)t,\ \delta<1$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$
23.	$-\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}e^{-\delta\omega_n t}\sin\{\omega_n\left(\sqrt{1-\delta^2}\right)t-\varphi\},\ \delta<1$ $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\right)$	$\frac{s}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$
24.	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}e^{-\delta\omega_n t}\sin\{\omega_n\left(\sqrt{1-\delta^2}\right)t+\varphi\},\ \delta<1$ $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\right)$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2)}$
25.	$1-\cos\omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$
26.	$\omega t-\sin\omega t$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2+\omega^2)}$
27.	$\sin\omega t-\omega t\cos\omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}$
28.	$\frac{1}{2\omega}t\sin\omega t$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$
29.	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
30.	$\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}(\cos\omega_1 t-\cos\omega_2 t);\left(\omega_1^2\neq\omega_2^2\right)$	$\frac{s}{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)}$
31.	$\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t+\omega t\cos\omega t)$	$\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

٤ - تبدیل معکوس لاپلاس

توابع انتقال در مطالعه سیستم های کنترل بصورت نسبت دو چند جمله ای بصورت زیر می باشد:

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$$

که درجه چند جمله ای صورت، P، کوچکتر از درجه مخرج، Q، است. جهت یافتن تبدیل معکوس لاپلاس $F(s)$ باید این تابع را به کسر های جزیی اش تجزیه کرد

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)+\ldots+F_n(s)$$

و سپس از این کسر های جزیی تبدیل معکوس لاپلاس گرفت:

$$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[F_1(s)]+L^{-1}[F_2(s)]+\ldots+L^{-1}[F_n(s)]$$

اما جهت استفاده از روش کسرهای جزیی باید ابتدا ریشه های چند جمله ای مخرج، $Q(s)$، مشخص شوند. همچنین اگر بالاترین توان متغیر s در صورت بزرگتر از مخرج باشد، ابتدا باید صورت را بر مخرج تقسیم کرد و در واقع در این حالت داریم:

$$\begin{array}{r|l} P(s) & Q(s) \\ \hline R(s) & T(s) \end{array} \qquad \Rightarrow \frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{R(s)}{Q(s)}+T(s)$$

۴-۱ بسط کسرهای جزیی وقتی $F(S)$ دارای قطب های مجزی است:

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)};n>m$$

که z_i و p_j ها بترتیب *صفرها و قطب های* مجزی تابع انتقال F *هستند و* اگر مختلط باشند بطور حتم مزدوج آنها هم موجود است. پس تابع انتقال میتواند بصورت زیر بازنویسی شود:

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{a_1}{s+p_1}+\frac{a_2}{s+p_2}+\ldots+\frac{a_n}{s+p_n}$$

که

$$a_j=(s+a_j)\frac{P(s)}{Q(s)}\bigg|_{s=-p_j}$$

۴-۲ بسط کسرهای جزیی وقتی F(S) دارای قطب های مکرر است:

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{P(s)}{(s+r)^q}$$

در این حالت خواهیم داشت:

$$F(s)=\frac{a_1}{(s+r)^q}+\frac{a_2}{(s+r)^{q-1}}+\frac{a_3}{(s+r)^{q-3}}+\cdots+\frac{a_q}{(s+r)}$$

که

$$a_q = \frac{1}{(q-1)!}\frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}}\left[(s+r)^q F(s)\right]_{s=-r}$$

مثال: $G(s) = \dfrac{5(s+2)}{s(s+5)^3}$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{b}{s} + \frac{a_1}{(s+5)^3} + \frac{a_2}{(s+5)^2} + \frac{a_3}{(s+5)}$$

$$b = sG(s)\Big|_{s=0} = \left.\frac{5(s+2)}{(s+5)^3}\right|_{s=0} = \frac{2}{25} = 0.08$$

$$a_1 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+5)^3 G(s)\right]_{s=-5} = 0, \quad a_2 = \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left[(s+5)^3 G(s)\right]_{s=-5} = 5$$

$$a_3 = \frac{1}{0!}\frac{d^0}{ds^0}\left[(s+5)^3 G(s)\right]_{s=-5} = -15$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{0.08}{s} + \frac{5}{(s+5)^2} - \frac{15}{s+5} \Rightarrow \quad g(t) = (0.08 + te^{-5t} - 15e^{-5t})u_s(t)$$

۵ دستورات مرتبط در نرم افزار MATLAB

تابع	عملکرد
dsolve	حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل
Ode45	حل عددی معادلات دیفرانسیل
abs	بدست آوردن اندازه یک عدد مختلط
angle	بدست آوردن فاز یک عدد مختلط
conj	بدست آوردن مزدوج یک عدد مختلط
imag	بدست آوردن بخش موهومی یک عدد مختلط
real	بدست آوردن بخش حقیقی یک عدد مختلط
isreal	تشخیص اینکه عدد استفاده شده حقیقی است یا مختلط
laplace	تبدیل لاپلاس
ilaplace	عکس تبدیل لاپلاس

برای آشنایی بیشتر با کارکرد این توابع میتوانید از help نرم افزار MATLAB یا فصل اول کتاب "جعبه ابزار رباتیک MATLAB" نوشته اینجانب مراجعه نمایید.