درس مبانی مهندسی برق

مدرس : امیر بکتاش

کمیت های الکتریکی

۱- ولتاژ یا اختلاف پتانسیل الکتریکی V(V)

- کمیت نسبی است
- ویژگی ها: ۱- دامنه یا اندازه ۲- فطبیت یا پلاریته ۳- فرکانس: تعداد نوسانات یک شکل موج در یک ثانیه (برق شهر ۵۰ هرتز)

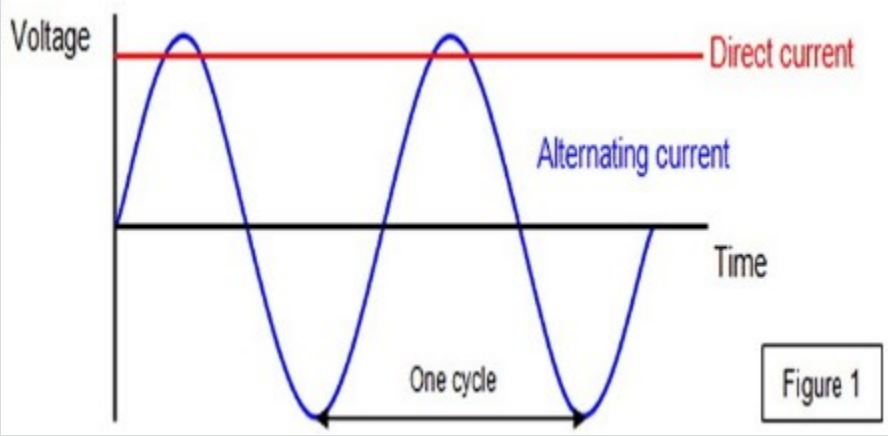
۲- جریان الکتریکی I(A)

ویژگی ها: ۱- دامنه ۲- جهت ۳- فرکانس

انواع انرژی الکتریکی:

۱- نوع مستقیم dc : جریان در آن تغییر علامت نداده و همواره مثبت یا منفی است مثل باطری

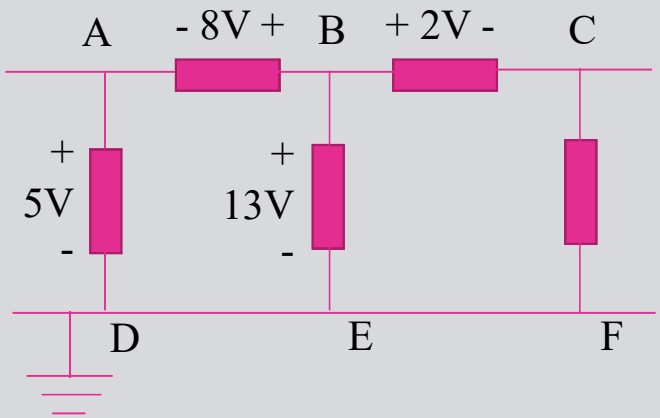
۲- نوع متناوب ac : جریان به طور متناوب تغییر علامت می دهد مانند برق شهر



نقطه مبنا (مرجع یا زمین): در اندازه گیری و تعیین ولتاژ نقاط عموما یک نقطه را مبنا فرض کرده و ولتاژ آن را صفر میگیریم و ولتاژ نقاط دیگر را بر مبنای آن تعیین میکنیم.

نقاط هم پتانسیل: نقاطی که با سیم به هم متصل شده اند و ولتاژ همه آنها یکی است را نقاط هم پتانسیل میگویند.

مثال: در مدار زیر با انتخاب نقطه D به عنوان نقطه مبنا، ولتاژ نقطه B را تعیین کنید.



چون نقطه D مبنا است پس باید ولتاژ B نسبن به آن تعیین شود.

$$V_B = V_{BD} = V_{BA} + V_{AD} = 8 + 5 = 13V$$

از طرف دیگر چون نقاط D و E و F با سیم به هم وصل شده اند پس هم پتانسیل هستند و همه آنها را می توان یک نقطه در نظر گرفت. پس داریم :

$$V_B = V_{BD} = V_{BE} = 13V$$

۳- توان P(W)

انرژی مصرف شده یا تولید شده در یک ثانیه = حاصلضرب ولتاژ در جریان P=V.I

طبق قانون بقای انرژی : توان مصرفی (خروجی) در یک سیستم با توان تولیدی (ورودی) آن سیتم برابر است.

در محاسبه توان، ولتاژ و جریان را طوری در نظر میگیریم که جریان از سر مثبت ولتاژ خارج گردد. در اینصورت اگر توان مثبت شد تولیدی و اگر منفی شد مصرفی می باشد.

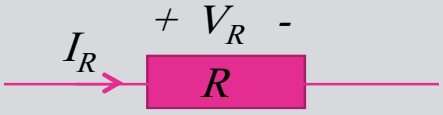
عناصر الکتریکی

۱- مقاومت الکتریکی (Resistance)

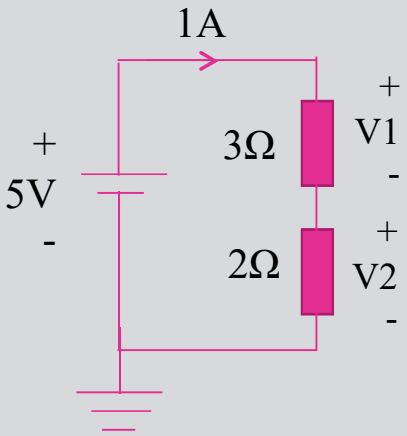
- هر جسمی در برابر عبور جریان الکتریکی از خود مقاومت نشان میدهد.
- علامت R واحد اهم Ω
- قانون اهم

ولتاژ و جریان یک مقاومت با رابطه روبرو به هم وابسته هستند: $V_R = R \cdot I_R$

نکته: مقاومت همیشه مصرف کننده انرژی است و این انرژی را به صورت حرارت آزاد میکند. پس در مقاومت همیشه جریان به سر مثبت ولتاژ وارد میشود.



مثال) در مدار روبرو ولتاژ هر مقاومت را حساب کنید.



با توجه به جریان داده شده و قانون اهم داریم:

$$V_1 = R_1 \cdot I = 3\Omega \times 1A = 3V \quad , \quad V_2 = 2\Omega \times 1A = 2V$$

توجه داشته باشید که :

۱- جریان به سر مثبت هر مقاومت وارد میشود.

۲- مجموع ولتاژهای ۱ و ۲ برابر ولتاژ منبع شده، یعنی ولتاژ منبع روی دو مقاومت تقسیم شده است.

توجه: از لحاظ الکتریکی مواد عموما به دو دسته رسانا و عایق تقسیم میگردند که هر دو نقش بزرگی در صنعت برق دارند.

۱- منابع الکتریکی (Source)

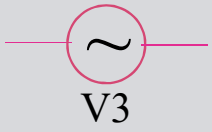
منابع را می توان در دسته بندی های گوناگونی قرار داد.

ولتاژ جریان	مستقیم dc متناوب ac	مستقل وابسته

- منبع ولتاژ (مستقل): المانی که ولتاژ دو سر آن مستقل از جریانی که از آن عبور میکند، ثابت بماند.

مثال: برق باطری (dc)

برق شهر (ac)



- منبع جریان (مستقل): المانی که جریان عبوری از آن وستقل از ولتاژ دو سرش ثابت باشد.

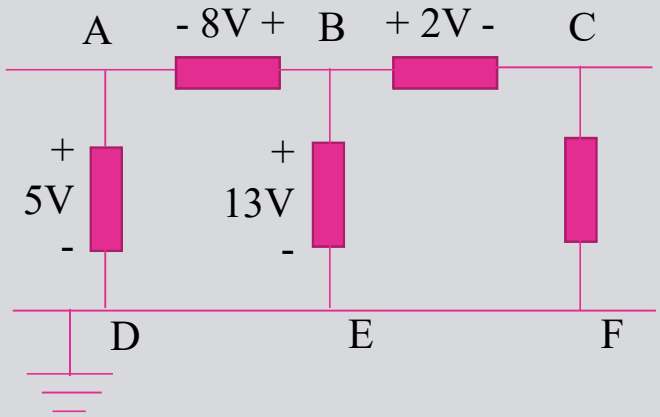
I1

نکته: منبع ولتاژ هیچ گاه نباید اتصال کوتاه گردد و منبع جریان نیز هیچ گاه نباید مدار باز شود.
در اتصال کوتاه ولتاژ صفر است و در مدار باز جریان صفر است.

قوانین اساسی مدارهای الکتریکی:

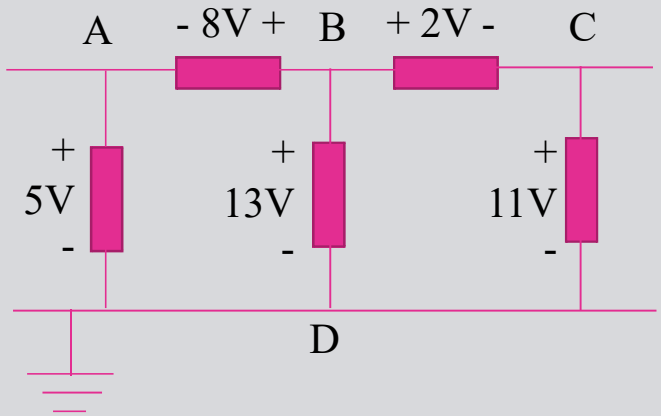
۱- قانون ولتاژ حلقه (KVL):در هر مدار الکتریکی، چنانچه روی یک مسیر بسته (حلقه) حرکت کنیم، حاصلجمع ولتاژ تمامی عناصر مدار برابر صفر میگردد.

نکته: در نوشتن ولتاژ عناصر اگر به سر مثبت رسیدیم آن ولتاژ را با علامت مثبت می نویسیم و اگر به سر منفی رسیدیم با علامت منها می نویسیم.



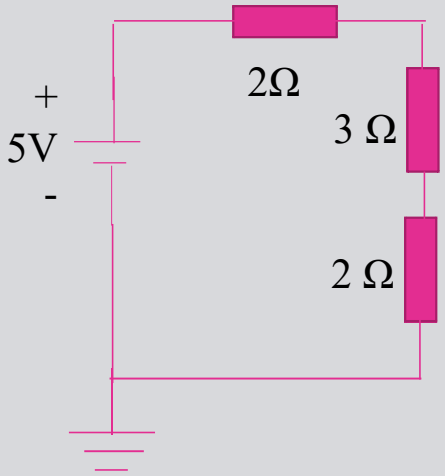
مثال: رابطه kvl را برای مدار روبرو بنویسید.

مدار دارای سه حلقه می باشد که می توان برای هرکدام یک رابطه نوشت. برای این کار از یک نقطه دلخواه حلقه شروع کرده و تا رسیدن به همین نقطه، همه ولتاژها را با هم جمع می زنیم.



$$\begin{cases} -V_{AB}+V_{BD}-V_{AD}=0 \\ V_{BC}+V_{CD}-V_{BD}=0 \\ -V_{AB}+V_{BC}+V_{CD}-V_{AD}=0 \end{cases}$$

- ۲ رابطه اول برای ۲ حلقه کوچک و رابطه سوم برای حلقه بزگتر میباشد.
- با دقت در روابط مشخص است که رابطه سوم صرفا حاصلجمع ۲ رابطه اول است. پس این رابطه از لحاظ ریاضی مستقل نبوده و اطلاعات بیشتری از دو رابطه قبلی برای ما ندارد.



- مثال) ولتاژ مقاومت ۳ اهمی را تعیین کنید.

برای حل مسئله از قانون kvl استفاده میکنیم. در اولین مرحله باید ولتاژ و جریانهای مدار را نامگذاری کنیم.

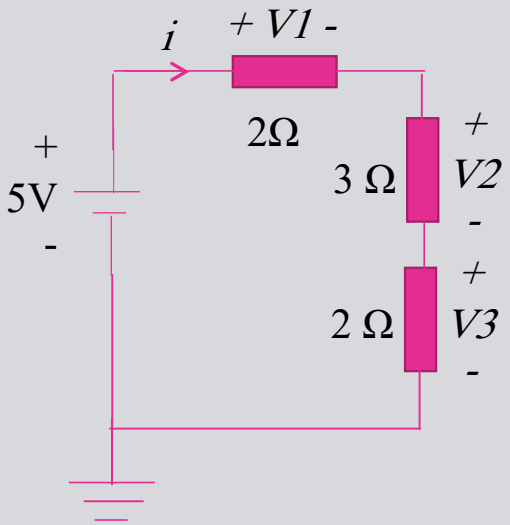
۱- ولتاژها یا جریانها را به دلخواه نامگذاری میکنیم.

۲- با نامگذاری یکی، دومی را چنان تعیین میکنیم که جریان به سر مثبت ولتاژ هر مقاومت وارد گردد.

۳- یک نقطه از حلقه مورد نظر را انتخاب کرده و ولتاژهای حلقه را مینویسیم.

۴- در رابطه به دست آمده با توجه به قانون اهم به جای ولتاژها از معادل آنها استفاده میکنیم.

۵- جریان مجهول را تعیین کرده و ولتاژهای مجهول را از روی آن به دست می آوریم.



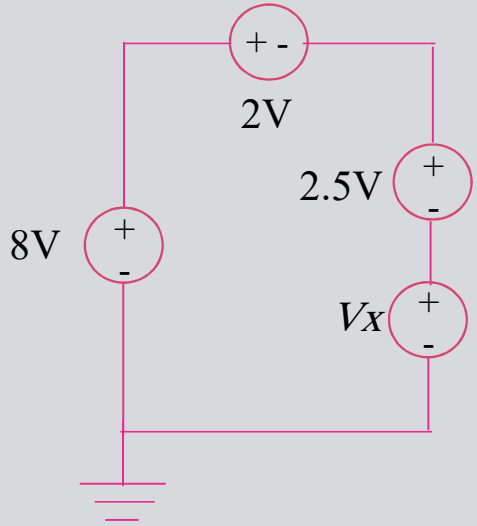
مانند شکل روبرو جهت جریان را انتخاب کرده و نامگذاری میکنیم. ولتاژها را نیز متناسب با جهت جریان علامت گذاری و نام گذاری میکنیم. اکنون از یک نقطه شروع کرده و ولتاژها را می نویسیم.

$$+V_1+V_2+V_3-5=0$$

حال به جای ولتاژها از قانون اهم، جریانها را می نویسیم.

$$+2i+3i+2i-5=0$$

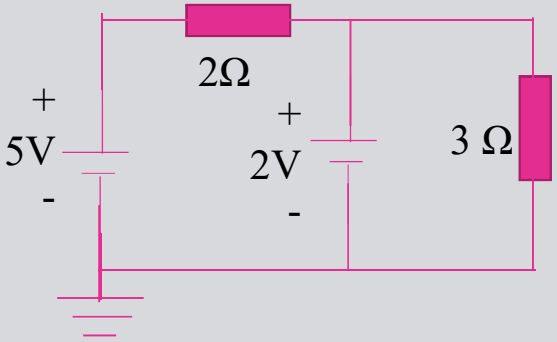
از روی رابطه فوق، جریان برابر $\frac{5}{7}$ به دست می آید که در نتیجه $V2=\frac{15}{7}$

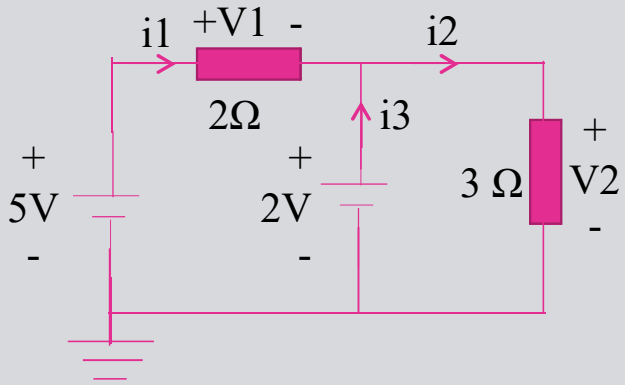


- مثال) در مدار روبرو ولتاژ منبع مجهول را تعیین کنید.
- روی حلقه یک kvl میزنیم:

$$2V + 2.5V + V_x - 8 = 0 \quad \rightarrow \quad V_x = 3.5\,V$$

- مثال) در مدار روبرو ولتاژ مقاومت ۲ اهمی را تعیین کنید.

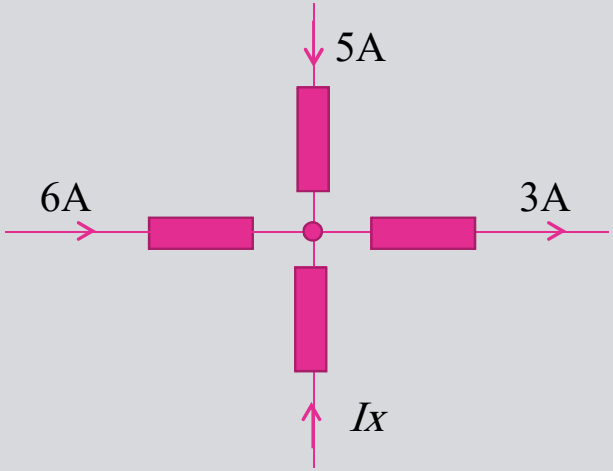




- ابتدا ولتاژ- جریانها را نامگذاری کرده مانند شکل روبرو.
- در این مدار ۳ حلقه وجود دارد که در صورت انتخاب حلقه مناسب می توان تنها با یک رابطه kvl مسئله را حل کرد.
- حلقه شامل ۲ منبع برای این کار مناسب است.

$$V_1 + 2 - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = 3V \,, \quad i_1 = \frac{3V}{2\Omega} = 1.5A$$

۲- قانون جریان گره (KCL): محل اتصال بیش از ۲ المان را گره گویند. جمع جریانهای وارد شده به گره با جریانهای خارج شده از آن برابر هستند.

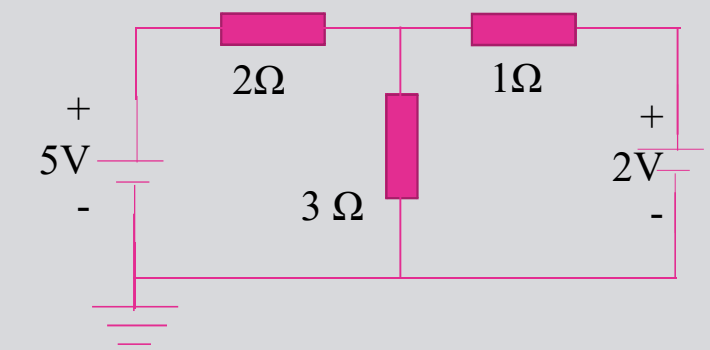


- مثال) جریان مجهول را تعیین کنید.

$$5A + 6A + I_x = 3A \quad \rightarrow \quad I_x = -8A$$

- جریان منفی به دست آمده نشان می دهد که در مدار واقعی جهت جریان بر خلاف جهتی است که در شکل انتخاب شده است.

• مثال) در مدار روبرو ولتاژ مقاومت ۲ اهمی را تعیین کنید.

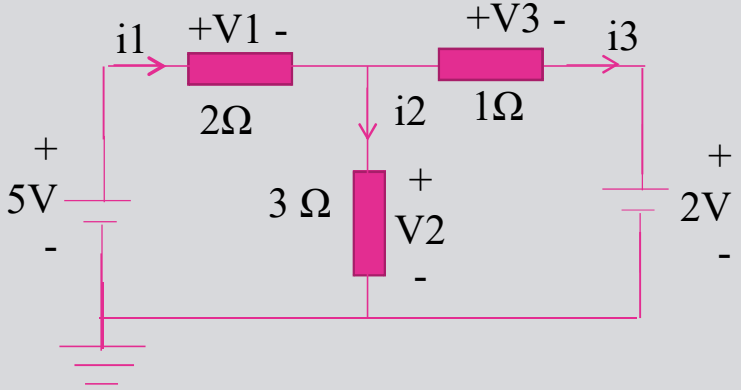


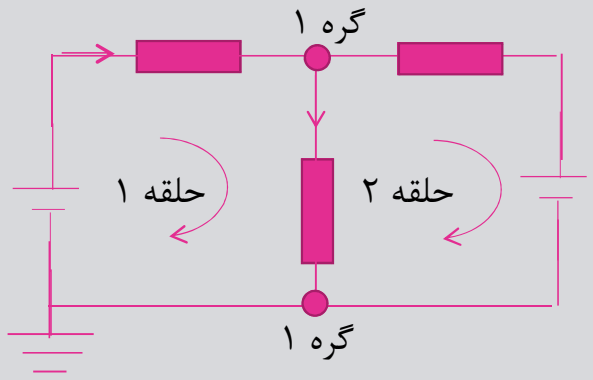
برای حل مسئله باید مراحل گفته شده انجام شوند:

۱- ولتاژها یا جریانها را به دلخواه نامگذاری میکنیم. با نامگذاری یکی، دومی را چنان تعیین میکنیم که جریان به سر مثبت ولتاژ هر مقاومت وارد گردد.

۲- برای گره ها و حلقه ها روابط KCL و KVL را می نویسیم.

توجه کنید که سه جریان مجهول داریم پس ۳ معادله نیاز داریم.





حلقه ۱:

$$+V_1+V_2-5=0$$

حلقه ۲:

$$+V_3+2-V_2=0$$

گره ۱:

$$i_1=i_2+i_3$$

۳- در روابط KVL به جای ولتاژ مقدار آنها را از قانون اهم جایگذاری میکنیم. در اینصورت یه دستگاه ۳ معادله ۳ مجهول به دست می آید.

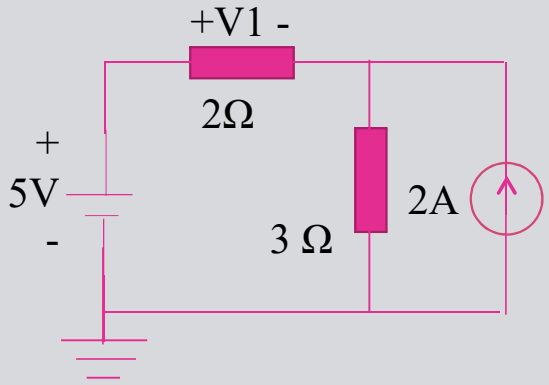
$$\begin{cases} +2i_1 + 3i_2 + 5 = 0 \\ +i_3 + 2 - 3i_2 = 0 \\ i_1 = i_2 + i_3 \end{cases}$$

۴- دستگاه را حل میکنیم تا تمامی جریانها مشخص شوند. برای حل می توانیم از رابطه ۱، جریان i1 را حساب کرده و از رابطه ۲، جریان i3 را و آنها را در رابطه ۳ قرار می دهیم.

$$\begin{cases} i_1 = 1.27\,A \\ i_2 = 0.82\,A \\ i_3 = 0.45\,A \end{cases}$$

پس ولتاژ مقاومت ۲ اهمی برابر است با ۲/۵۴ ولت.

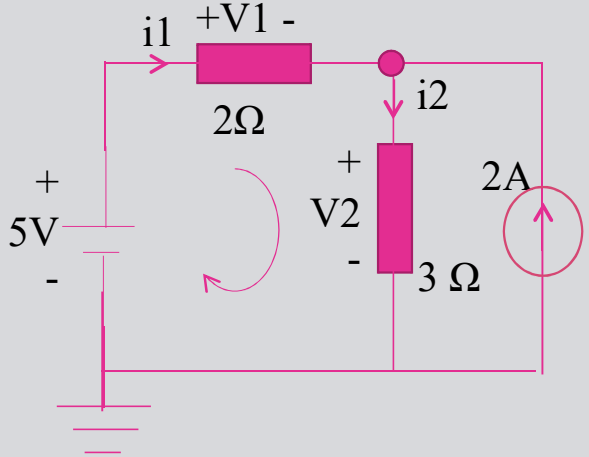
• مثال) در مدار روبرو ولتاژ V1 را تعیین کنید.



۱- نامگذاری ولتاژ- جریانها

۲- روابط kcl و kvl

نکته: از نوشتن kvl در حلقه های شامل منبع جریان صرفنظر میکنیم.



$$\begin{cases} +V_1 + V_2 - 5 = 0 \\ i_1 + 2 = i_2 \end{cases}$$

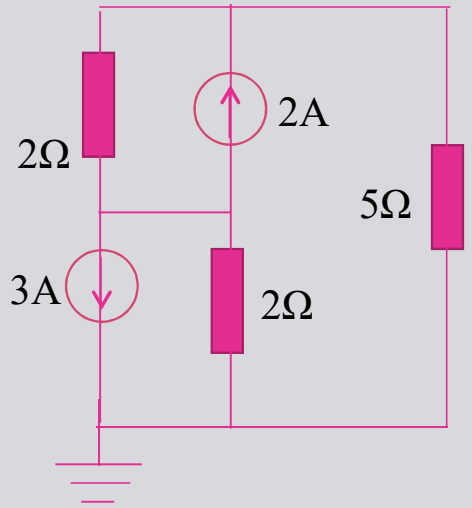
۳- قانون اهم

$$\begin{cases} +2i_1 + 3i_2 - 5 = 0 \\ i_1 + 2 = i_2 \end{cases}$$

۴- حل دستگاه

$$\begin{cases} i_1 = -0.2\ A \\ i_2 = 1.8\ A \end{cases} \rightarrow \quad V_1 = 2i_1 = -0.4\ V$$

• مثال) در مدار روبرو ولتاژ مقاومت ۵ اهمی را تعیین کنید.

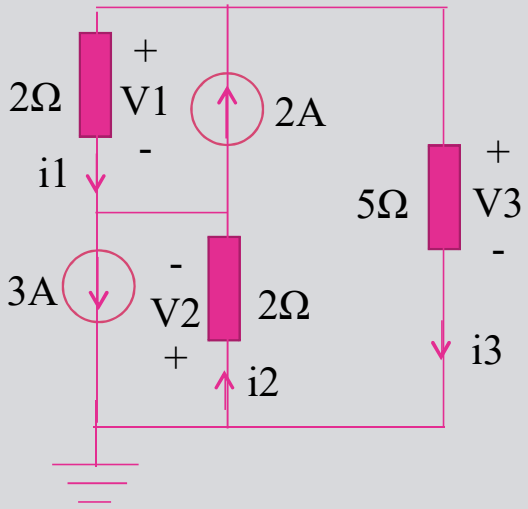


۱- نامگذاری ولتاژ- جریانها

۲- روابط kcl و kvl

نکته: از نوشتن kvl در حلقه های شامل منبع جریان صرفنظر میکنیم.

$$+V_3+V_2-V_1=0 \qquad 2=i_1+i_3 \quad , \quad i_1+i_2=2+3$$



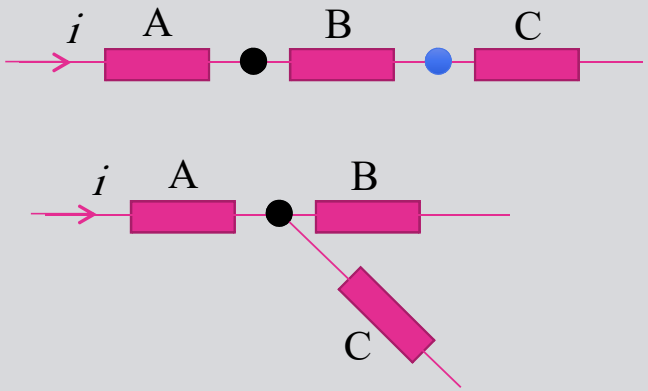
۳- قانون اهم

$$\begin{cases} 5i_3+2i_2-i_1=0 \\ 2=i_1+i_3 \\ i_1+i_2=2+3 \end{cases}$$

۴- حل دستگاه

$$V_1=5\,V$$

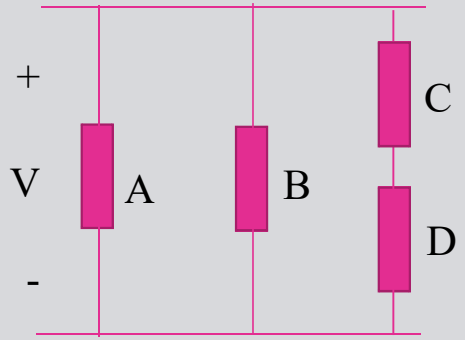
عناصر سری و موازی



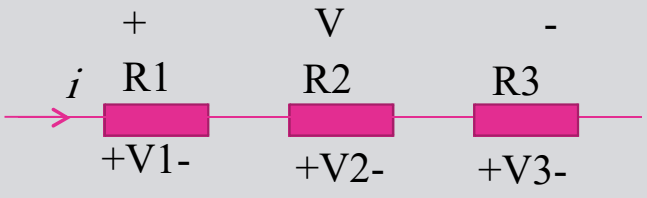
سری: هر دو عنصری که فقط از یک سر به هم متصل باشند و در آن سر المان دیگری وصل نباشد، با هم سری هستند.

نکته: جریان عناصر سری با هم برابر است ولی در مورد ولتاژ آنها نمی توان نظر داد.

موازی: هر دو عنصری که هر دو سر آنها به هم متصل باشند را موازی گویند.



نکته: ولتاژ دو سر عناصر موازی با هم برابر است ولی در مورد جریان عبوری از آنها نمی توان نظر داد.

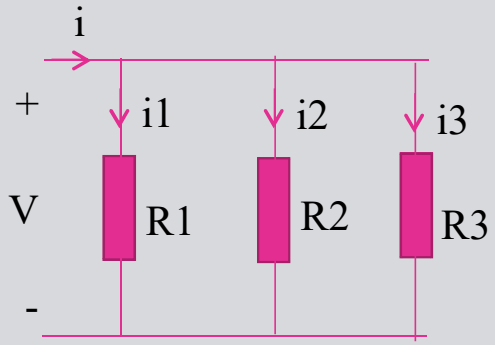


مقاومت های سری: مقاومت برایند برابر مجموع مقاومت هاست.

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \quad \rightarrow$$

$$V = R_1 i + R_2 i + R_3 i = (R_1 + R_2 + R_3) i \quad \rightarrow$$

$$V = R_{eq} i \quad , \quad R_{eq=} R_1 + R_2 + R_3 = \sum R_i$$



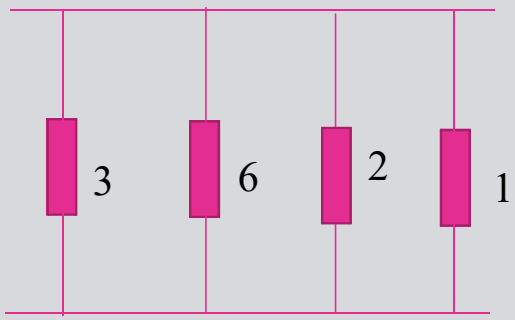
مقاومت های موازی: مقاومت برایند برابر عکس مجموع عکس مقاومت هاست.

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \quad \rightarrow$$

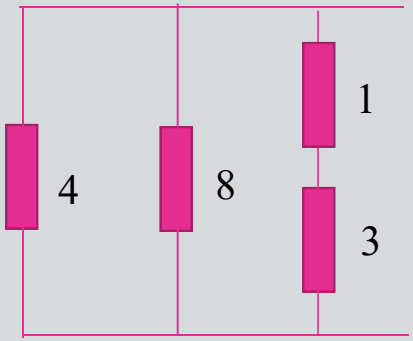
$$i = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \quad \rightarrow$$

$$V = R_{eq} i \quad , \quad R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_i}}$$

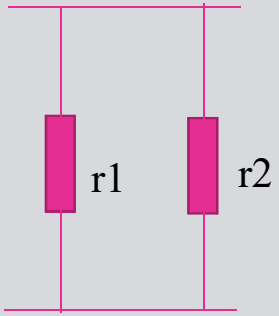
مثال: در مدارهای روبرو مقاومت معادل را پید کنید.



$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}} = \frac{1}{\frac{12}{6}} = 2\,\Omega$$

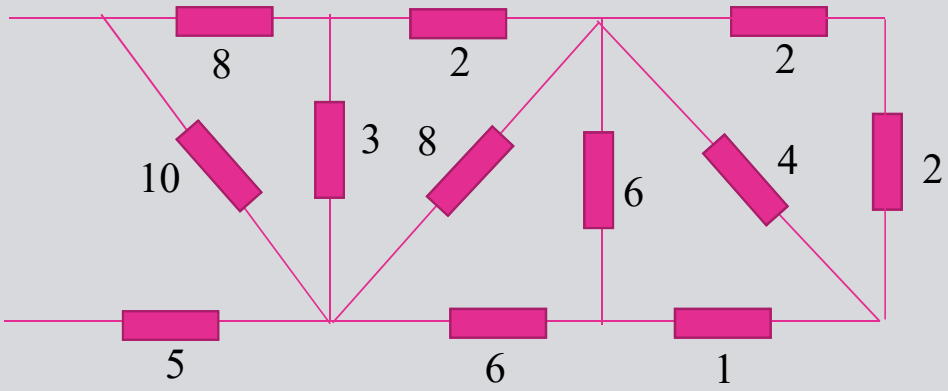


$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{8}} = 1.6\,\Omega$$

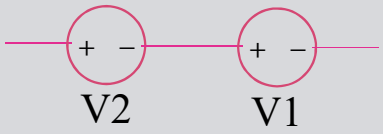


$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} = \frac{1}{\frac{r_2 + r_1}{r_1 r_2}} = \frac{r_1 r_2}{r_2 + r_1}$$

مثال: در مدارهای روبرو مقاومت معادل را پید کنید.

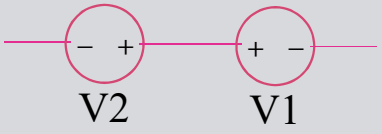


منابع ولتاژ سری: اگر منابع پلاریته یکسان داشته باشند، برایند آنها حاصلجمع آنهاست و اگر پلاریته عکس باشد، حاصل تفریق آنها.



+ Veq=V1+V2 -

منابع ولتاژ موازی: منابع ولتاژ را تنها در صورتی میتوان موازی کرد که دقیقا مساوی باشند.



+ Veq=V1-V2 -

منابع جریان موازی: اگر منابع جهت یکسان داشته باشند، برایند آنها حاصل جمع آنهاست و اگر جهت عکس باشد، حاصل تفریق آنها.

منابع جریان سری: منابع جریان را تنها در صورتی میتوان سری کرد که دقیقا مساوی باشند.

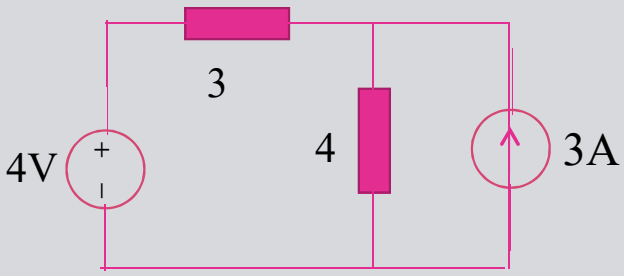
قضیه جمع آثار: در هر مدار خطی ولتاژ و جریان هر المان را می توان از حاصل جمع اثر تک تک منابع به طور مستقل به دست آورد.

برای به دست آوردن اثر منبع به طور مستقل، ابتدا بقیه منابع را صفر کرده و سپس مسئله را حل می کنیم و در نهایت همه جوابهای ناشی از منابع مختلف را با هم جمع می کنیم.

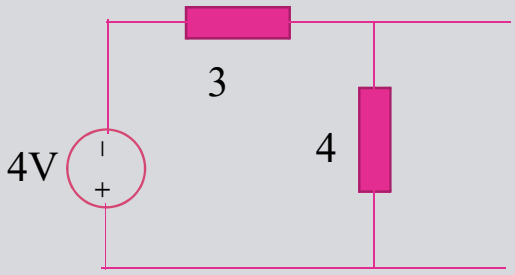
حذف اثر منبع ولتاژ= اتصال کوتاه کردن

حذف اثر منبع جریان= مدار باز کردن

مثال: ولتاژ مقاومت ۴ اهمی را با استفاده از روش جمع آثار تعیین کنید.

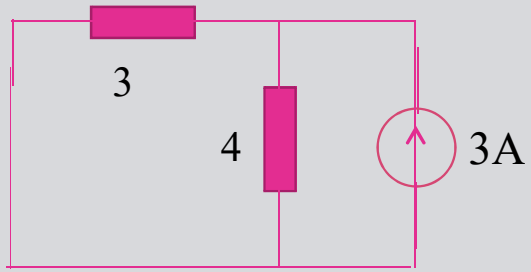


ابتدا منبع جریان حذف و اثر منبع ولتاژ را می بینیم.



$$i = \frac{4V}{7\Omega} = 0.57\ A \quad \rightarrow \quad V_4 = 4 \times 0.57 = 2.28\ V$$

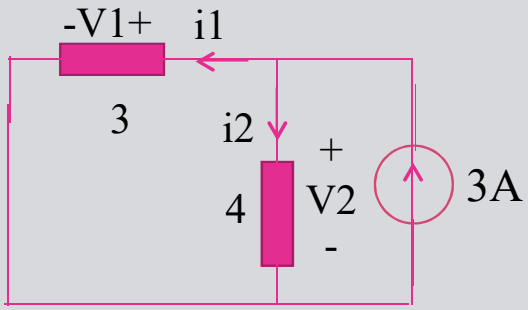
سپس منبع ولتاژ حذف و اثر منبع جریان را می بینیم.



$$-V_1 + V_2 = 0 \quad , \quad i_1 + i_2 = 3$$

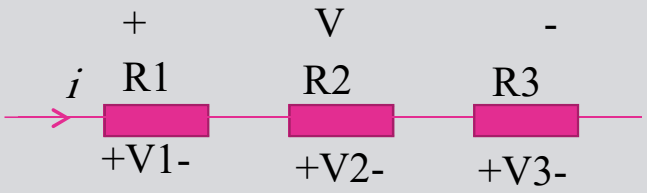
$$-3i_1 + 4i_2 = 0 \quad \rightarrow \quad -9 + 3i_1 + 4i_2 = 0$$

$$i_2 = \frac{9}{7} \quad \rightarrow \quad V_2 = \frac{36}{7}$$



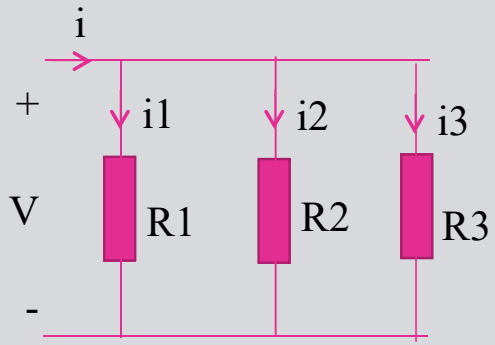
در نهایت دو جواب را با هم جمع میکنیم.

$$V_{2total} = \frac{36}{7} + 2.28 = 7.43\ V$$



قانون تقسیم ولتاژ: هرگاه چند مقاومت با هم سری باشند و لتاژ V روی همه آنها افتاده باشد، این ولتاژ متناسب با اندازه هر مقاومت روی آنها تقسیم میشود.

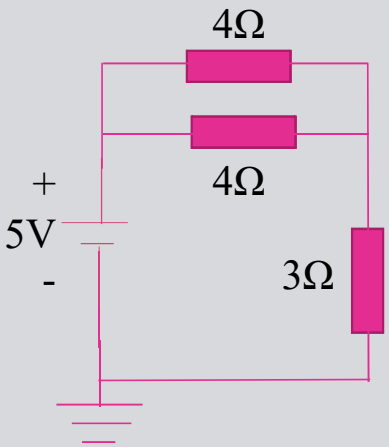
$$V_n = \frac{R_n}{\sum R_i} \cdot V$$



قانون تقسیم جریان: هر گاه چند مقاومت با هم موازی باشند و جریان i به کل آنها وارد شود، سهم هر مقاومت با اندازه آن نسبت عکس دارد.

$$i_n = \frac{\frac{1}{R_n}}{\sum \frac{1}{R_i}} \cdot i$$

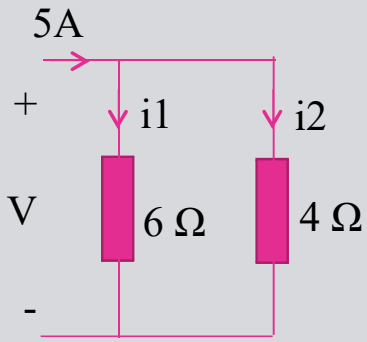
$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot i$$



مثال: ولتاژ هر مقاومت را در مدار روبرو حساب کنید.

$$4\Omega \| 4\Omega \rightarrow 2\Omega$$

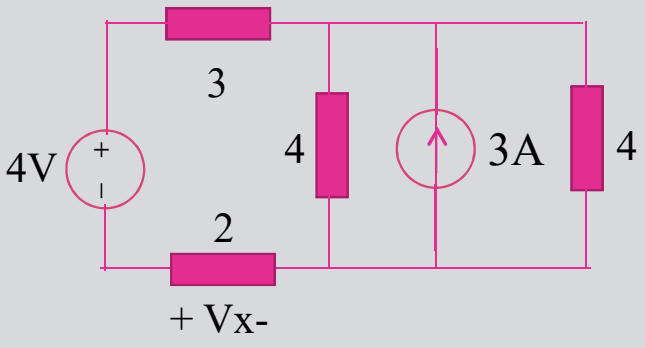
$$V_2 = \frac{2}{2+3}5 = 2V \quad , \quad V_3 = \frac{3}{2+3}5 = 3V$$



مثال: جریان هر مقاومت را حساب کنید.

$$i_1 = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}} \times 5 = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} \times 5 = 2A \quad or \quad i_1 = \frac{4}{6+4} \times 5 = 2A$$

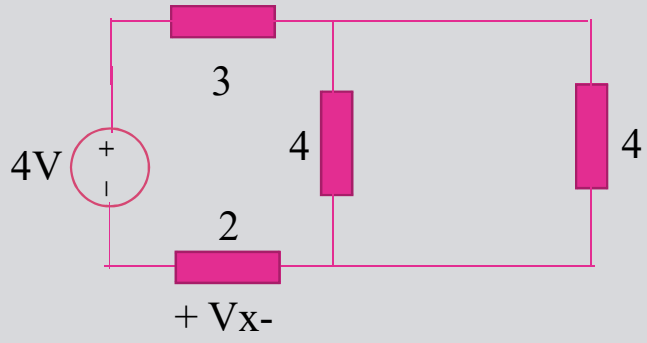
مثال: با استفاده از قضیه جمع آثار ولتاژ Vx را در مدار روبرو حساب کنید.



ابتدا منبع جریان را حذف کرده و Vx را حساب می کنیم.

مقاومت های ۴ اهمی موازی بوده که میشوند ۲ اهم و از تقسیم ولتاژ داریم:

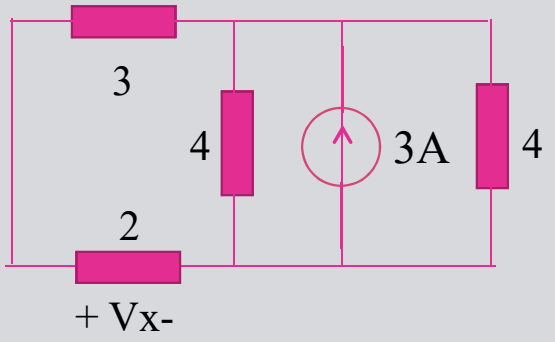
$$-V_x = \frac{2}{3+2+2} \times 4 = 1.14\,V$$



سپس منبع ولتاژ را حذف کرده و مجددا Vx را حساب می کنیم.

مقاومت های ۲ و ۳ اهمی سری هستند. از تقسیم جریان داریم:

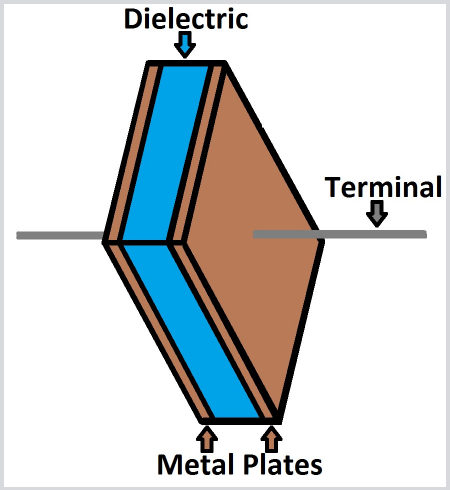
$$i_{3,2} = \frac{1/5}{1/5+1/4+1/4} 3 = 0.86\ A \rightarrow V_x = 2i_{3,2} = 1.72\,V$$



جواب نهایی حاصل جمع دو جواب است یعنی ۲/۸۶ ولت

عناصر ذخیره کننده انرژی:

در این عناصر ولتاژ و جریان با یکدیگر متناسب نبوده و به دلیل خاصیت ذخیره سازی، مقادیر قبلی ولتاژ و جریان نیز تاثیر دارند.



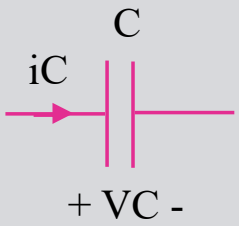
خازن: دو رسانا که بین آنها یک ماده عایق قرار گرفته باشد یک خازن می سازند.

$$C(F) = \varepsilon \frac{A}{d}$$

A سطح مقطع، d فاصله و e گذردهی عایق

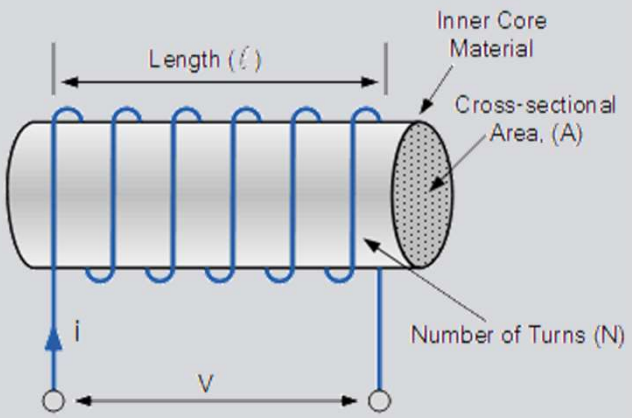
رابطه بین ولتاژ و جریان خازن:

$$i_C = C\frac{dV_C}{dt}$$



انرژی ذخیره شده در خازن:

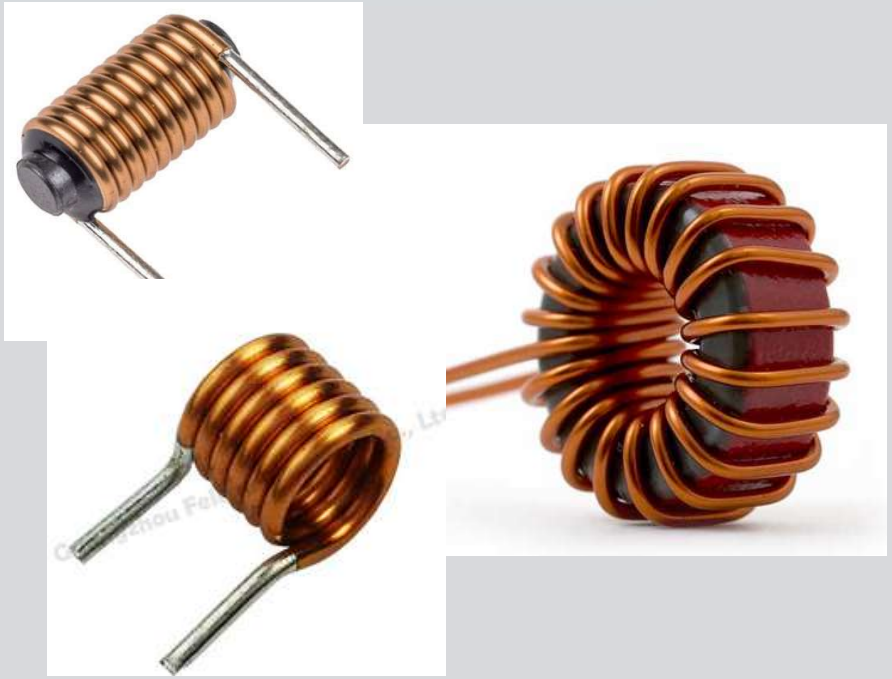
$$E(j) = \frac{1}{2}CV^2$$



سلف (القاگر یا خودالقا): از پیچاندن یک سیم به دور یک هسته ساخته می شود.

$$L(H) = \frac{N^2 A \mu}{l}$$

A سطح مقطع هسته، l طول هسته، N تعداد دور سیم و u نفوذپذیری هسته



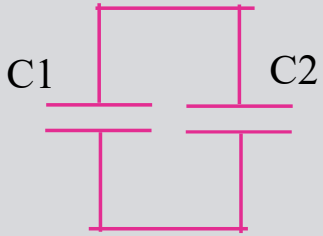
رابطه بین ولتاژ و جریان سلف:

$$V_L = L\frac{di_L}{dt}$$

انرژی ذخیره شده در سلف:

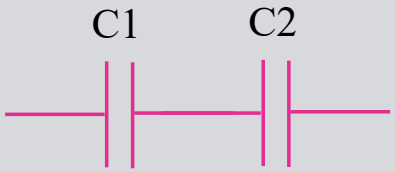
$$E(j) = \frac{1}{2}Li^2$$

اتصال خازن ها و سلف ها



خازنهای موازی: ظرفیت ذخیره سازی بزرگتر میشود.

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$



خازنهای سری: ظرفیت ذخیره سازی کمتر میشود.

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

حالت سری و موازی سلفها مانند مقاومت هاست.

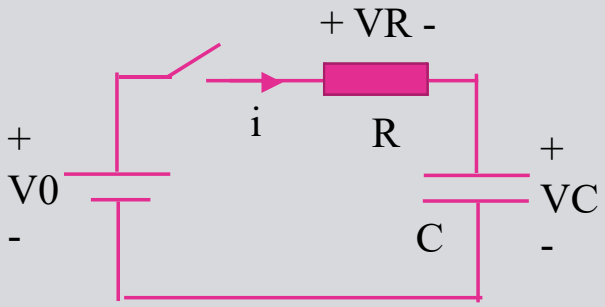
سری:

$$L_{eq} = L_1 + L_2$$

موازی:

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

سلف و خازن در مدار dc:



در لحظه صفر کلید بسته میشود. از KVL داریم:

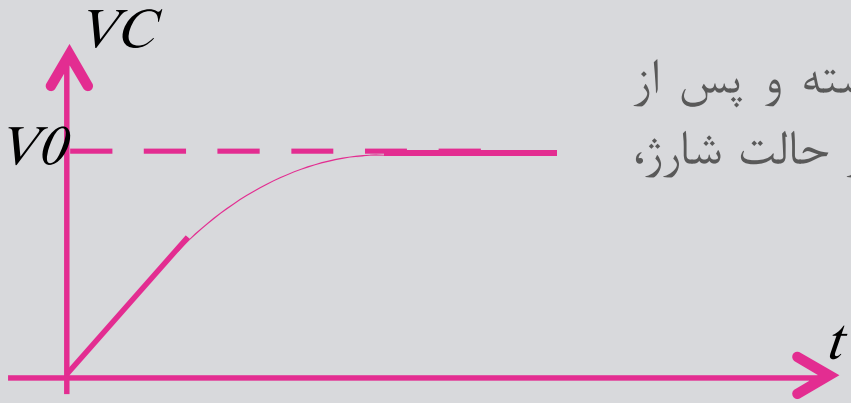
$$+V_R + V_C - V_0 = 0 \quad \rightarrow \quad Ri + V_C = V_0$$

اگر به جای جریان مقدار معادل آن را از رابطه خازن استفاده کنیم.

$$RC\frac{dV_C}{dt} + V_C = V_0$$

یک معادله مرتبه ۱ داریم که جواب آن عبارت است از:

$$V_C = V_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



پس سلف و خازن در مدارهای dc یک اثر گذرا داشته و پس از طی آن خازن در حالت شارژ، مدار باز شده و سلف در حالت شارژ، اتصال کوتاه میگردد.

تحلیل مدارهای تکفاز و سه فاز:

در سیستمهای ac سه فاز و تکفاز شکل موج ولتاژ ها و جریان های مدار سینوسی می باشند.

در این رابطه Vm مقدار پیک شکل موج و ω فرکانس زاویه ای شکل موج بوده که رابطه آن با فرکانس میشود.

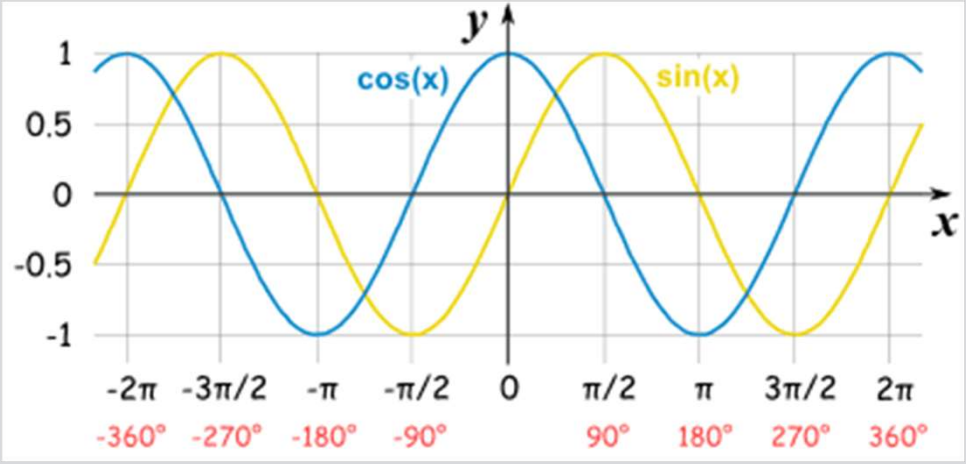
در سیستمهای ac عموما مقدار موثر (rms) سیگنال مطرح میشود.

$$v(t) = V_m \sin(\omega t)$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(\omega t + \pi/2) = \cos(\omega t)$$

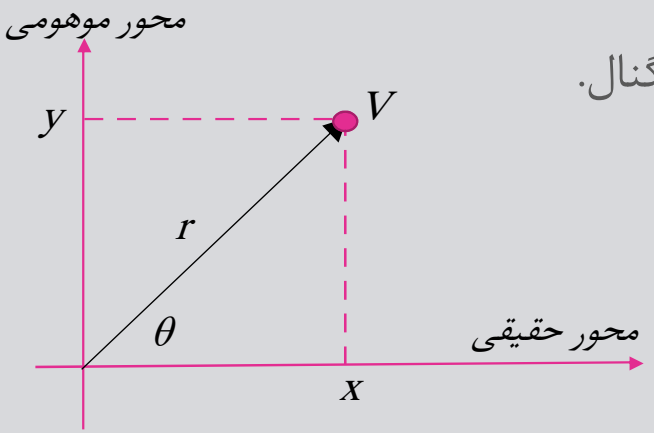


فازورها:

فازورها اعداد مختلطی هستند که نشان دهنده یک سیگنال سینوسی می باشند.

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$$

هر فازور دامنه و فاز یک سیگنال سینوسی را نشان میدهد.



در شکل روبرو مقدار r با دامنه سیگنال برابر است و مقدار θ با فاز سیگنال.

یک عدد مختلط را به دو شکل میتوان نمایش داد:

۱- برداری $r\angle\theta$

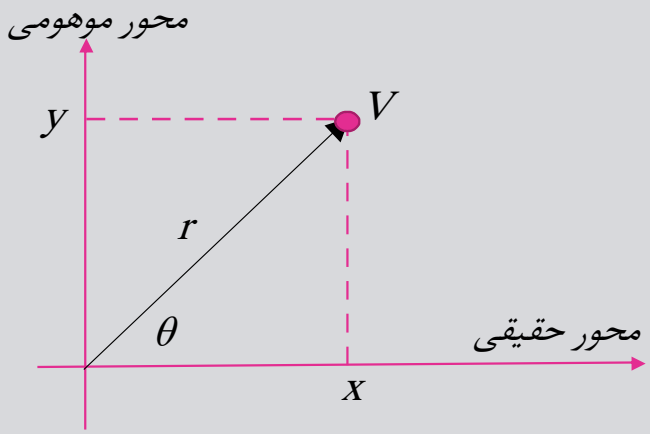
۲- اسکالر $x+iy \quad , \quad i=j=\sqrt{-1}$

تبدیل قطبی به اسکالر:

$$r\angle\theta \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = r\cdot\cos\theta \\ y = r\cdot\sin\theta \end{cases}$$

تبدیل اسکالر به قطبی:

$$x+iy \quad \rightarrow \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \tan^{-1}(y/x) \end{cases}$$



مثال) مقادیر فازوری زیر را به شکل دیگر تبدیل کنید.

$5\angle 37^\circ =$

$8+6j =$

مثال) محاسبات زیر را انجام دهید.

$$(3+2j)+(4-j)=$$

$$(2\angle 20^\circ)+(3\angle -40^\circ)=$$

$$(3+2j)\times(4-j)=$$

$$(2\angle 20^\circ)\times(3\angle -40^\circ)=$$

$$\frac{(3+2j)}{(4-j)}=$$

$$\frac{(2\angle 20^\circ)}{(3\angle -40^\circ)}=$$

امپدانس: به مقاومت کلیه المانها در حالت ac امپدانس می گوییم.

در حالت ac خازنها و سلف ها نیز مانند مقاومت بوده و از خود در برابر عبور جریان مقاومت نشان می دهند با این تفاوت که ولتاژ و جریان آنها با هم همفاز نیستند.

امپدانس خازن:

$$X_C(\Omega) = \frac{1}{j2\pi f C}$$

امپدانس سلف:

$$X_L(\Omega) = j2\pi f L$$

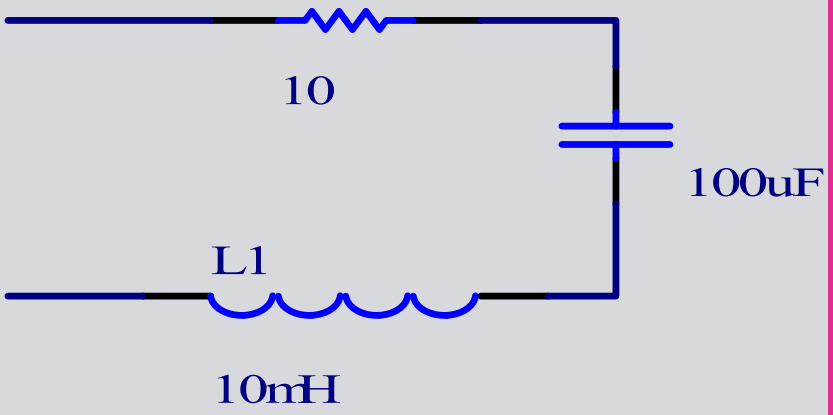
امپدانس المانهای مختلف را می توان مانند مقاومت ها سری- موازی کرد.

مثال: امپدانس مدارهای زیر را تعیین کنید.

$$X_C = \frac{1}{j2\pi fC} = \frac{1}{j2\pi \times 50 \times 100 \times 10^{-6}} = -31.8j\ (\Omega)$$

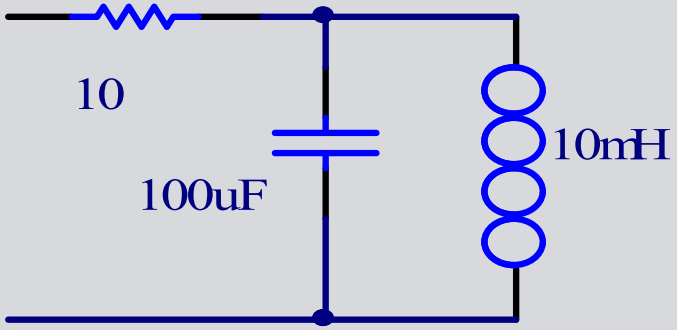
$$X_L = j2\pi fL = j2\pi \times 50 \times 10 \times 10^{-3} = 3.14j\ (\Omega)$$

$$Z = 10 - 31.8j + 3.14j = 10 - 28.66j$$



$$X_C = -31.8j\ (\Omega) \qquad X_L = 3.14j\ (\Omega)$$

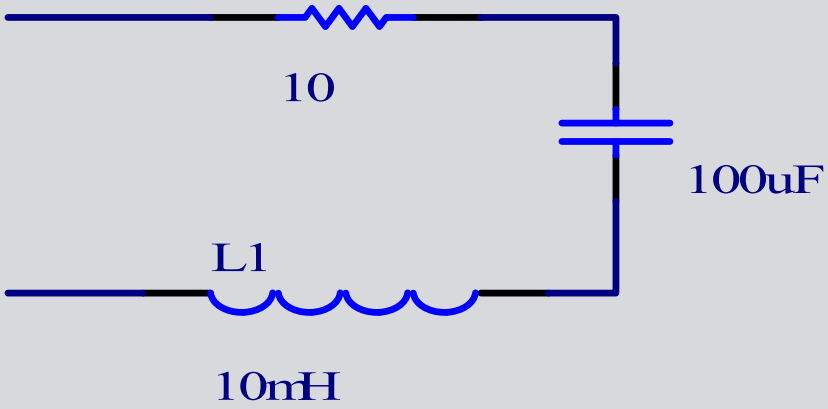
$$Z = R + \left(X_C \| X_L\right) = 10 + \frac{-31.8j \times 3.14j}{-31.8j + 3.14j} = 10 + 3.48j$$

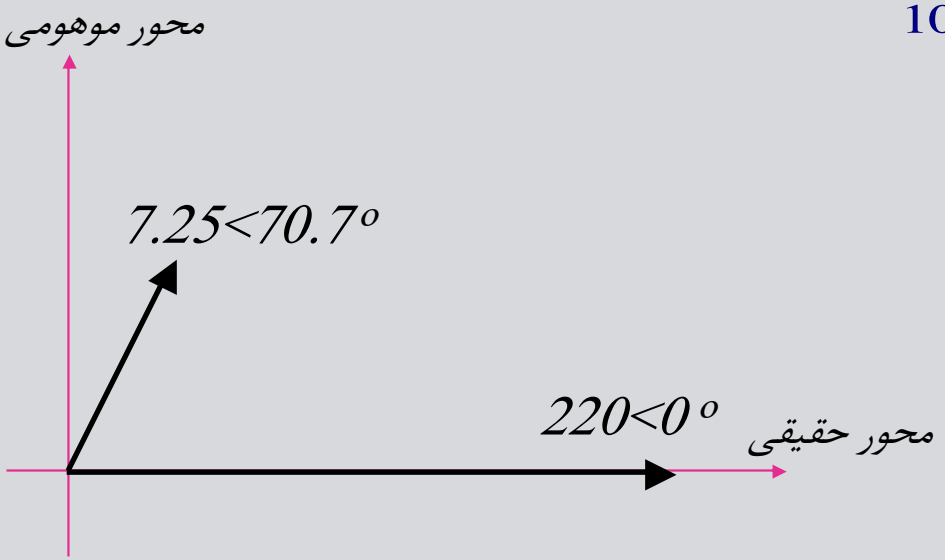


مثال: با فرض ولتاژ ۲۲۰ ولت، ۵۰ هرتز جریان مدارهای قبلی را تعیین کنید.

$$Z = 10 - 28.66j$$

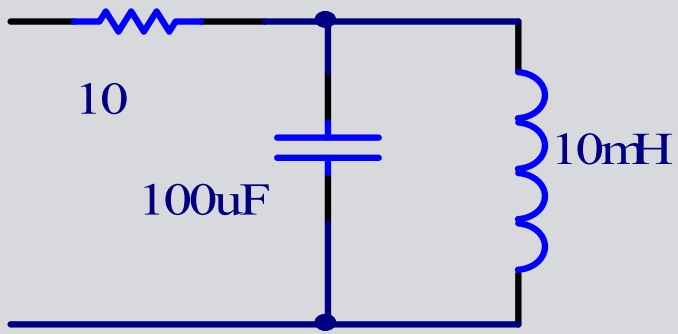
$$i = \frac{V}{Z} = \frac{220}{10 - 28.66j} =$$

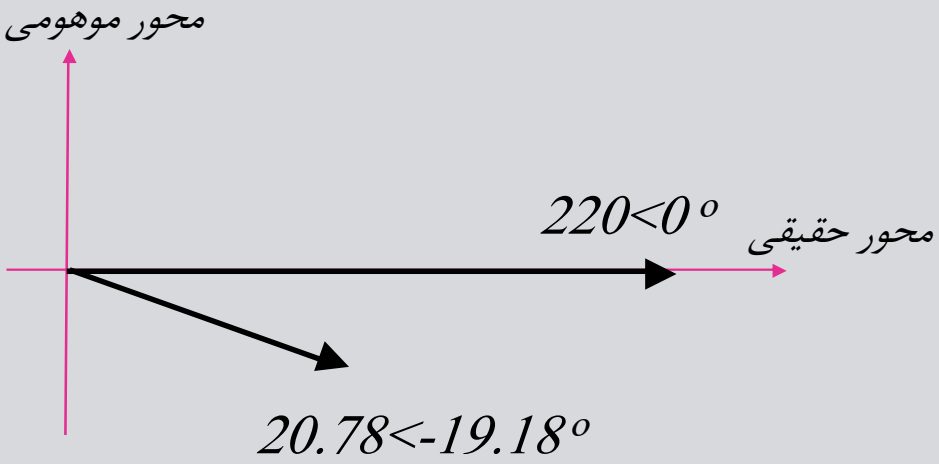




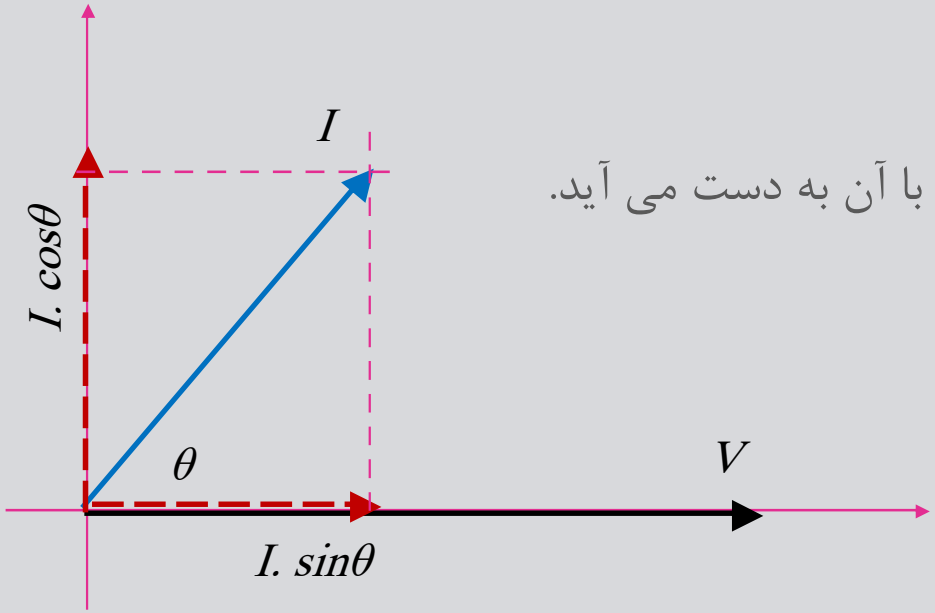
$$Z = 10 + 3.48j$$

$$i = \frac{220}{10 + 3.48j} =$$





توان در مدارهای ac:



در مدارهای ac توان از حاصلضرب ولتاژ در جریان همفاز با آن به دست می آید.

$$P(W) = V \cdot I \cdot \cos\theta$$

به مولفه $\cos\theta$ در رابطه بالا ضریب توان (Power Factor : PF) می گویند.

توان محاسبه شده در رابطه بالا **توان اکتیو** نام دارد.

توان راکتیو از حاصل ضرب ولتاژ در جریان عمود بر آن به دست می آید.

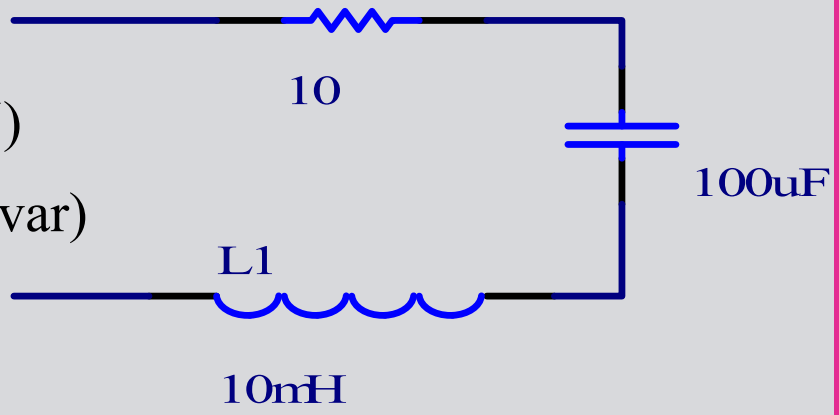
$$Q(\text{var}) = V \cdot I \cdot \sin\theta$$

مثال: توان اکتیو و راکتیو را در مدارهای قبلی را تعیین کنید.

$$i = 7.25\angle 70.7^\circ$$

$$P = VI\cos\theta = 220\times 7.25\cos(0-70.7^\circ) = 527.2\,(W)$$

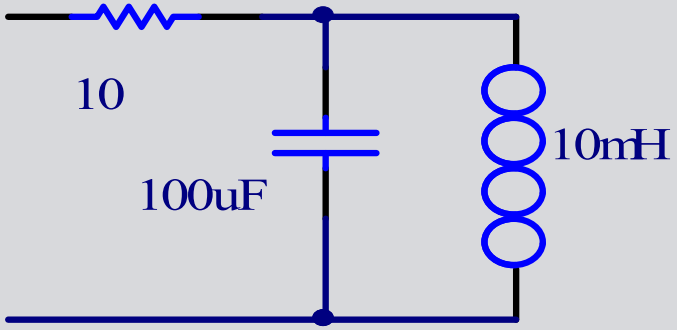
$$Q = VI\sin\theta = 220\times 7.25\sin(0-70.7^\circ) = -1505.4\,(\text{var})$$



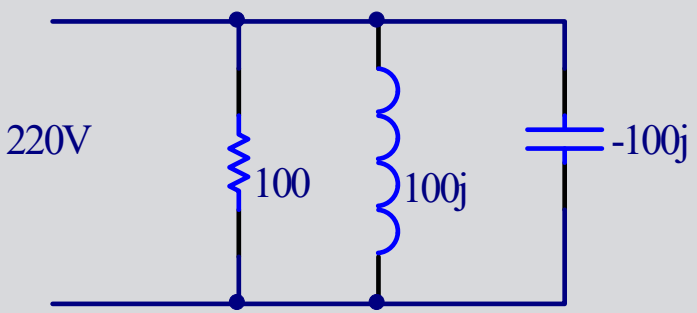
$$i = 20.78\angle -19.18^\circ$$

$$P = VI\cos 19.18 = 4318\,(W)$$

$$Q = VI\sin 19.18 = 1502\,(\text{var})$$



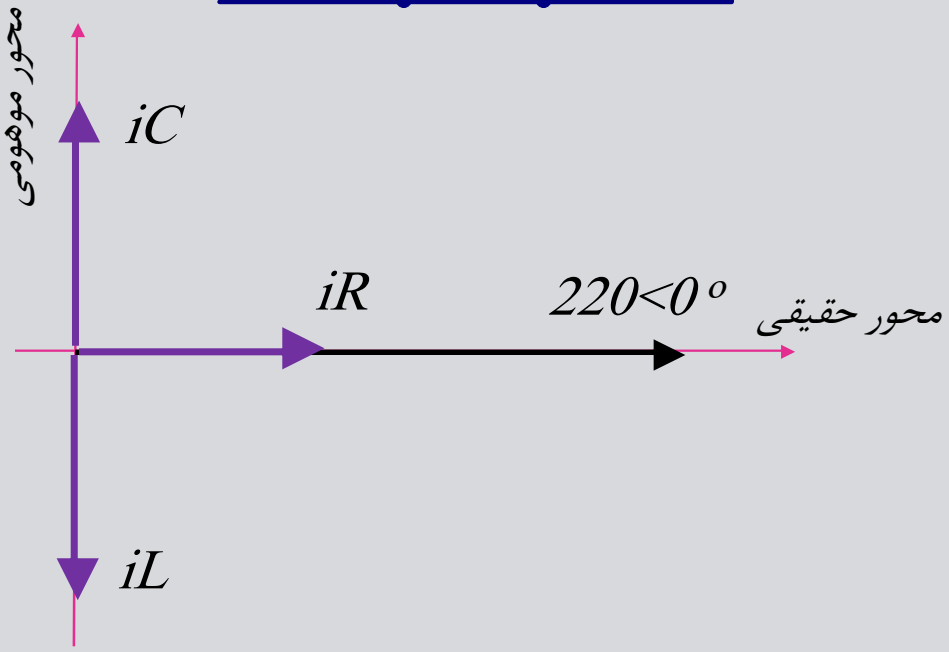
مثال: در مدار زیر جریان هر شاخه را تعیین کنید.



$$i_R = \frac{220\angle 0}{100\angle 0} = 2.2A\angle 0$$

$$i_L = \frac{220\angle 0}{100j} = \frac{220\angle 0}{100\angle 90} =$$

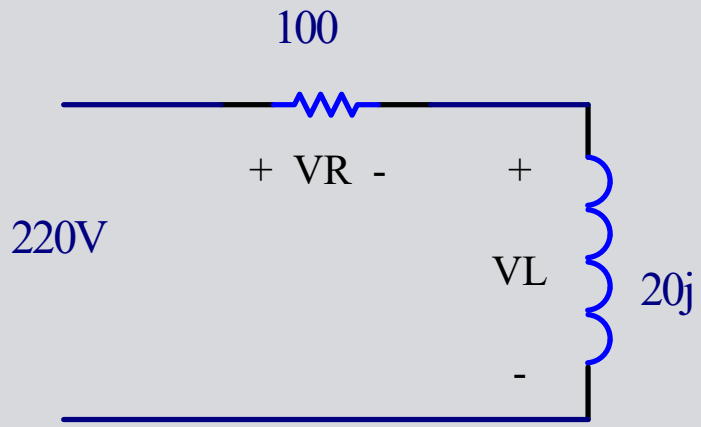
$$i_C = \frac{220\angle 0}{-100j} = \frac{220\angle 0}{100\angle -90} =$$



مثال: در مدار RL زیر توان هر المان را تعیین کنید.

$$Z = 100 + 20j$$

$$i = \frac{220}{100 + 20j} =$$



$$P_{tot} = 220 \times 2.16 \times \cos(0 - (-11.3^\circ)) = 466W$$

$$Q_{tot} = 220 \times 2.16 \times \sin(0 - (-11.3^\circ)) = 93.1\,\text{var}$$

ولتاژ و توان مقاومت:

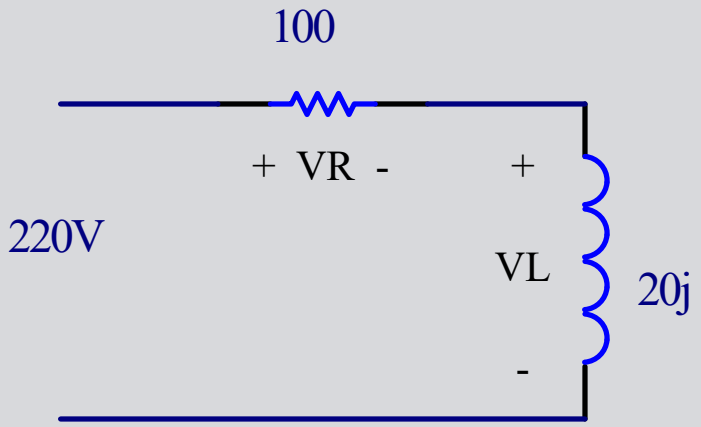
$$V_R = Ri_R = 100 \times 2.16 \angle -11.3^\circ = 216V \angle -11.3^\circ$$

$$P_R = 216 \times 2.16 \times \cos(\theta_V - \theta_i) = 216 \times 2.16 \times \cos(-11.3^\circ - (-11.3^\circ)) = 466W$$

$$Q_R = 220 \times 2.16 \times \sin(\theta_V - \theta_i) = 0$$

$$Z = 100 + 20j$$

$$i = \frac{220}{100 + 20j} = 2.11 - 0.42j = 2.16A\angle -11.3^\circ$$



$$P_{tot} = 220 \times 2.16 \times \cos(0 - (-11.3^\circ)) = 466W$$

$$Q_{tot} = 220 \times 2.16 \times \sin(0 - (-11.3^\circ)) = 93.1\,\text{var}$$

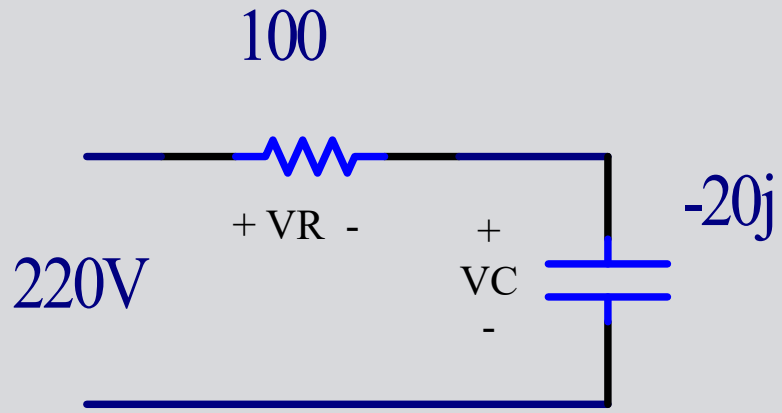
ولتاژ و توان سلف:

$$V_L = j\omega L \times i_L = 20j \times 2.16\angle -11.3^\circ = 20\angle 90^\circ \times 2.16\angle -11.3^\circ = 43.2V\angle 78.7^\circ$$

$$P_L = 43.2 \times 2.16 \times \cos(\theta_V - \theta_i) = 216 \times 2.16 \times \cos(78.7^\circ - (-11.3^\circ)) = 0$$

$$Q_L = 43.2 \times 2.16 \times \sin(\theta_V - \theta_i) = 93.1\,\text{var}$$

مثال: در مدار RC زیر توان هر المان را تعیین کنید.



$$Z = 100 - 20j$$

$$i = \frac{220}{100 - 20j} =$$

$$P_{tot} = 220 \times 2.16 \times \cos(0 - 11.3^\circ) = 466W$$

$$Q_{tot} = 220 \times 2.16 \times \sin(0 - 11.3^\circ) = -93.1\,\text{var}$$

ولتاژ و توان مقاومت:

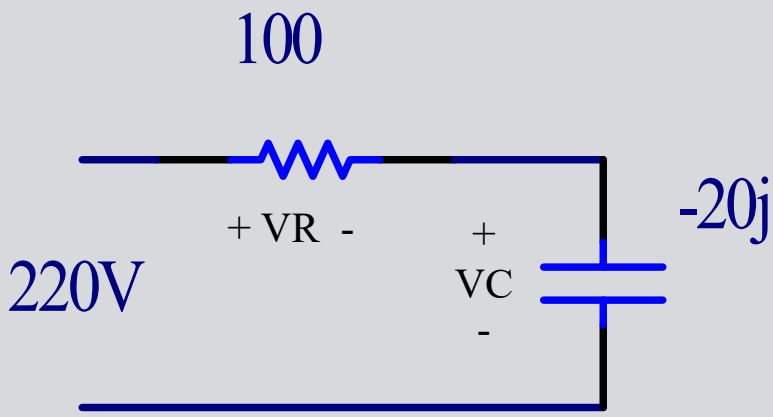
$$V_R = Ri_R = 100 \times 2.16\angle 11.3^\circ = 216V\angle 11.3^\circ$$

$$P_R = 216 \times 2.16 \times \cos(\theta_V - \theta_i) = 216 \times 2.16 \times \cos(11.3^\circ - 11.3^\circ) = 466W$$

$$Q_R = 220 \times 2.16 \times \sin(\theta_V - \theta_i) = 0$$

$$Z = 100 - 20j$$

$$i = \frac{220}{100 - 20j} = 2.11 + 0.42j = 2.16A\angle 11.3^\circ$$



$$P_{tot} = 220 \times 2.16 \times \cos(0 - 11.3^\circ) = 466W$$

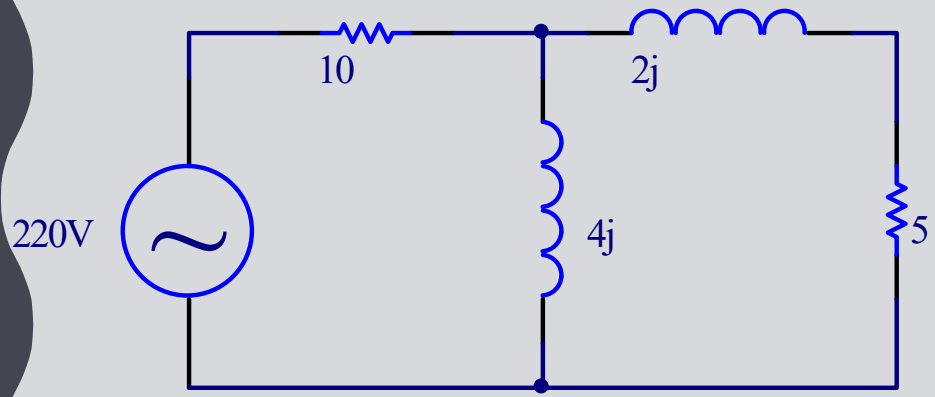
$$Q_{tot} = 220 \times 2.16 \times \sin(0 - 11.3^\circ) = -93.1\,\text{var}$$

ولتاژ و توان خازن:

$$V_C = \frac{1}{j\omega C} \times i_C = -20j \times 2.16\angle 11.3^\circ = 20\angle -90^\circ \times 2.16\angle 11.3^\circ = 43.2V\angle -78.7^\circ$$

$$P_C = 43.2 \times 2.16 \times \cos(\theta_V - \theta_i) = 216 \times 2.16 \times \cos(-78.7^\circ - 11.3^\circ) = 0$$

$$Q_C = 43.2 \times 2.16 \times \sin(\theta_V - \theta_i) = -93.1\,\text{var}$$



مثال: در مدار زیر جریان مقاومت ۵ اهمی را تعیین کنید.

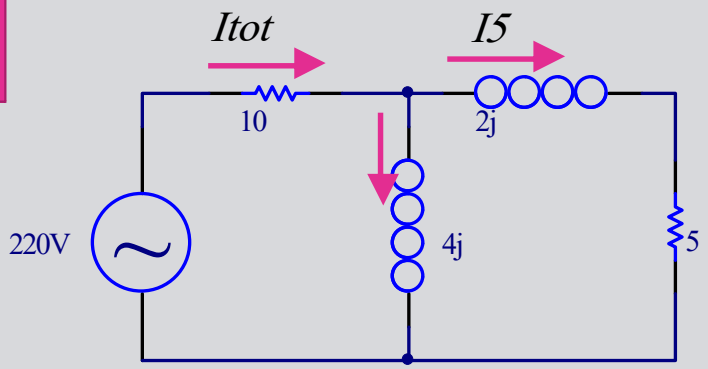
برای حل می توانیم ۲ حلقه و یک گره در نظر بگیریم و با داشتن ۳ معادله و ۳ مجهول، جریان همه شاخه ها را حساب کنیم.

ولی راه ساده تر تعیین امپدانس کلی و جریان کلی و سپس تقسیم جریان می باشد.

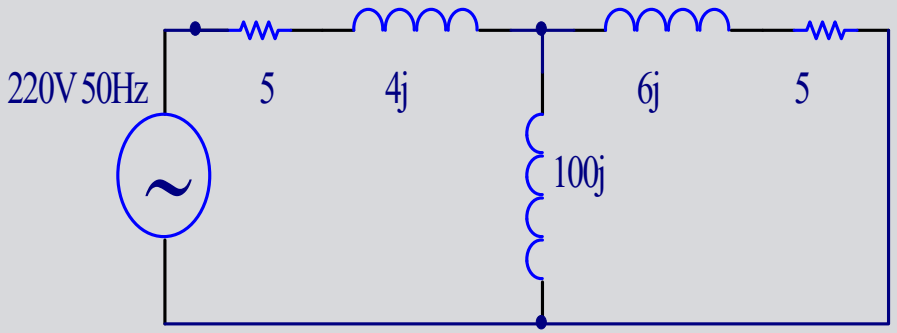
$$Z_{tot} = 10 + \left(4j \| (5+2j)\right) = 10 + \frac{4j(5+2j)}{4j+5+2j} =$$

$$i_{tot} = \frac{220}{11.3+2.4j} =$$

$$i_5 = \frac{4j}{4j+5+2j}(37.9-70.2j) =$$



مثال: در مدار زیر توان اکتیو و راکتیو مدار را حساب کنید.
چنانچه بخواهیم مصرف توان راکتیو را خنثی کنیم چه مقدار خازن باید با مدار موازی کنیم.



حل:

ابتدا امپدانس کلی مدار را از سمت منبع تعیین میکنیم.

$$Z=(5+4j)+\left[100j\|(5+6j)\right]=(5+4j)+\left[\frac{100j(5+6j)}{100j+(5+6j)}\right]=$$

$$(5+4j)+$$

$$I=\frac{220}{9.44+9.87j}=18-23.8j=29.9A\angle-52.9^{\circ}$$

جریان مدار میشود:

اکنون می توان توان اکتیو و راکتیو مدار را محاسبه کرد:

$$P = VI\cos\theta = 220\times 29.9\cos(52.9^{\circ}) = 3958.7W$$
$$Q = VI\sin\theta = 220\times 29.9\sin(52.9^{\circ}) = 5253.4\,\text{var}$$

برای جبران مصرف توان راکتیو باید خازنی با مدار موازی کنیم که در ولتاژ ۲۲۰ ولت، ۵۲۵۳/۴ var توان راکتیو با علامت منفی داشته باشد.

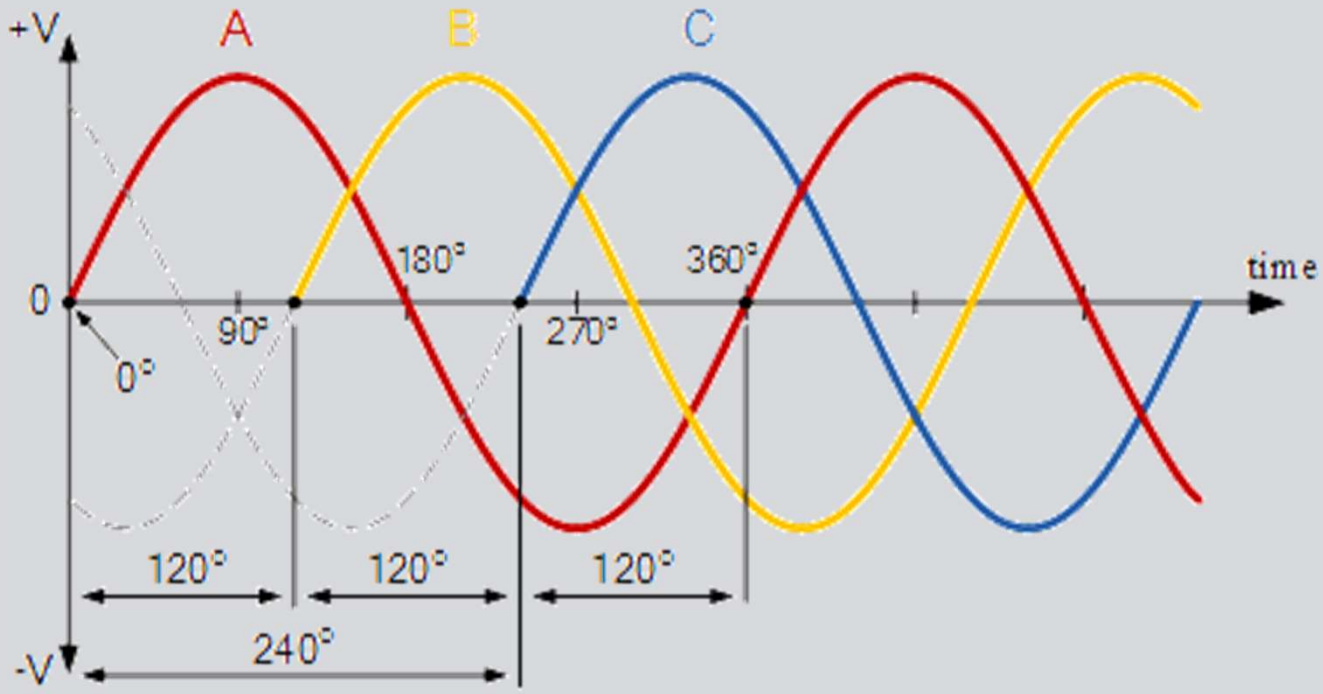
$$Q = \frac{V^2}{X_C} \quad \rightarrow \quad X_C = \frac{V^2}{Q} = \frac{220^2}{5253.4} = 9.2\Omega$$
$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} \quad \rightarrow \quad C = \frac{1}{2\pi fX_C} = 3.46\times 10^{-4}F$$

مدارهای سه فاز

در سیستمهای سه فاز به جای یک منبع ولتاژ، ۳ منبع ولتاژ سینوسی داریم.

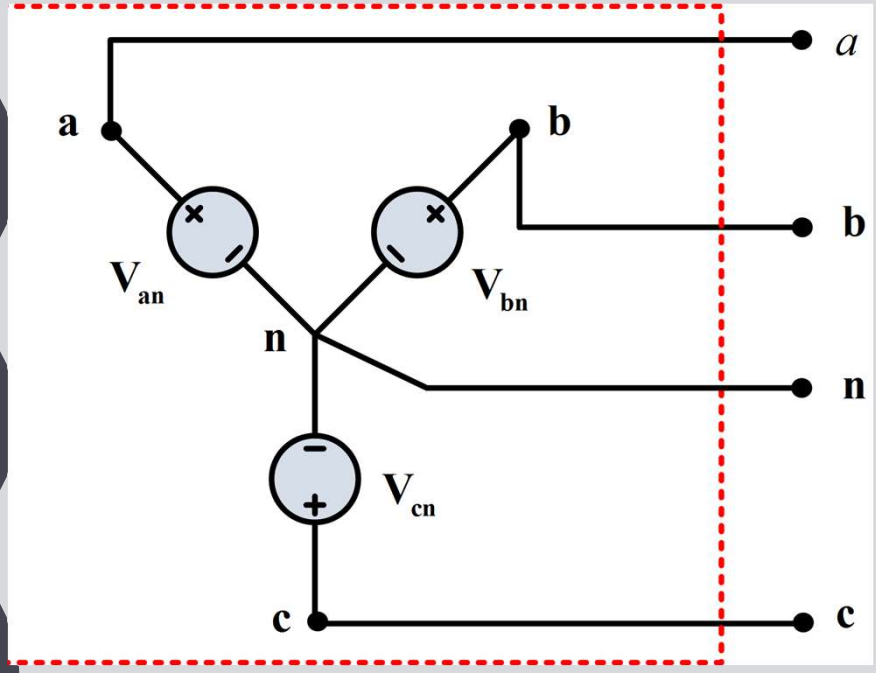
این سه ولتاژ از نظر اندازه و فرکانس و شکل یکسان بوده و فقط با یکدیگر ۱۲۰ درجه اختلاف فاز دارند.

$$V_a = V_m \sin(\omega t)$$
$$V_b = V_m \sin(\omega t - 120^\circ)$$
$$V_c = V_m \sin(\omega t + 120^\circ)$$



به دو شکل این سه منبع به هم متصل میشوند:

۱- **حالت ستاره**: در این حالت یک نقطه مشترک با ولتاژ صفر به دست می آید که همان نول می باشد.



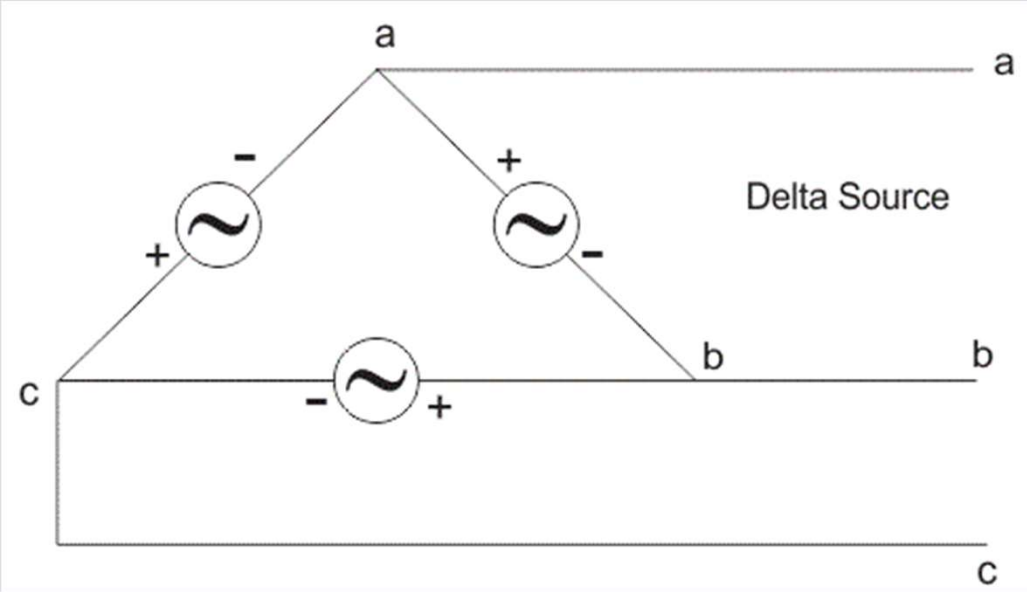
ولتاژ فاز: به ولتاژ هر سر خروجی نسبت به نقطه نول گویند. مثلا ولتاژ Van و Vbn و Vcn

ولتاژ خط: به ولتاژ هر سر خروجی نسبت به سر دیگر خروجی گویند. مثلا ولتاژ Vab و Vbc و Vca

در ستاره ولتاژ خط رادیکال ۳ بار بزرگتر از ولتاژ فاز است.

۲- **حالت مثلث**: در این حالت نقطه مشترک با ولتاژ صفر یا نول نداریم.

در مثلث ولتاژ خط و فاز با هم برابر هستند.



محاسبه توان در سیستم تکفاز و سه فاز مشابه است و مقدار توان در سیستم سه فاز سه برابر توان در تکفاز می باشد.

ماشینهای الکتریکی

هر ماشینی که انرژی الکتریکی و مکانیکی را در حضور میدان مغناطیسی به یکدیگر تبدیل کند ماشین الکتریکی نام دارد.

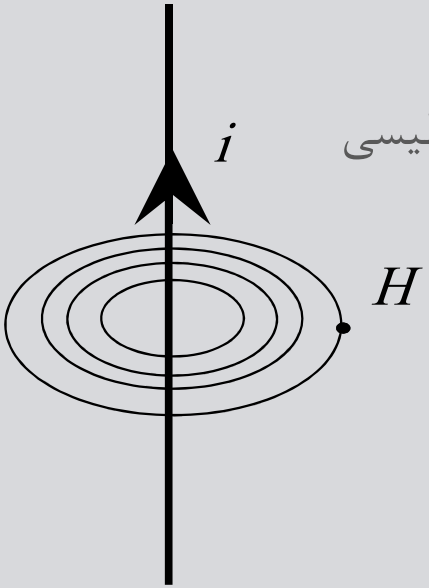
انواع ماشین الکتریکی:

موتور : انرژی الکتریکی به انرژی مکانیکی

ژنراتور: انرژی مکانیکی به انرژی الکتریکی

ترانسفورمر: انرژی الکتریکی به الکتریکی (ماشین ایستا)

میدان مغناطیسی



از حرکت ذرات باردار میدان مغناطیسی ایجاد میشود ← جریان عامل ایجاد میدان مغناطیسی

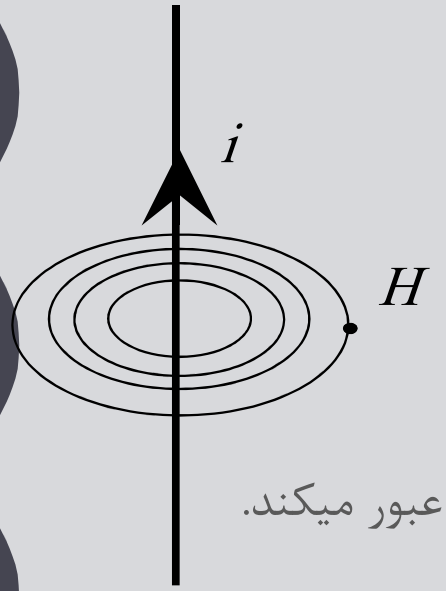
ویژگی های میدان مغناطیسی:

۱- مسیر میدان یک مسیر بسته است.

۲- میدان همواره از ساده ترین مسیر در برابر عبور خود عبور میکند.

۳- چنانچه قسمت متحرکی در مسیر میدان باشد، میدان برای رسیدن به ساده ترین مسیر به آن نیرو وارد میکند تا تغییر موقعیت دهد.

کمیت های میدان مغناطیسی



- شدت میدان: میزان قدرت میدان در هر نقطه را نشان میدهد H(A/m)

شدت میدان به جریان ایجاد کننده آن و فاصله از آن جریان وابسته است.

- شار مغناطیسی: میزان خطوط میدان مغناطیسی که از سطح ماده قرار گرفته در میدان عبور میکند. ***φ(wb)***
- شار گذرا از سطح جسم خارجی به عوامل زیر وابسته است:

- شدت میدان - سطح مقطع ماده - جنس ماده

- نفوذپذیری مغناطیسی: میزان گذردهی میدان از یک ماده خاص

مواد فرومغناطیس دارای نفوذپذیری بسیار بالاتری نسبت به مواد دیگر می باشند.

فقط آهن، نیکل و کبالت فرومغناطیس هستند به علاوه آلیاژها و ترکیبات آنها مثلا نفوذپذیری آهن تقریبا ۱۰۰۰ بار بیشتر از هوا است.

- اشباع: هر ماده فرومغناطیس تا سطح مشخصی مغناطیسی شده و بیشتر از آن نمی تواند مغناطیسی شود. به این پدیده اشباع (saturation) میگویند.

- مقاومت مغناطیسی: هرگاه ماده ای تحت میدان قرار گیرد، در برابر عبور میدان از خود مقاومت میکند. میزان این مقاومت به جنس ماده و ابعاد هندسی آن وابسته است

دو قانون مهم میدان مغناطیسی:

۱- قانون القای ولتاژ فارادی: هرگاه یک هادی در معرض میدان مغناطیسی متغیر با زمان قرار گیرد، در دو سر آن **ولتاژ** القا میگردد.

۲- قانون نیروی لورنتز: هرگاه یک هادی حامل جریان در میدان مغناطیسی قرار گیرد به آن **نیرو** وارد میشود.

هر دو قانون فوق همزمان در موتورها و ژنراتورها اتفاق می افتند ولی در ترانسفورمر فقط قانون اول را داریم.

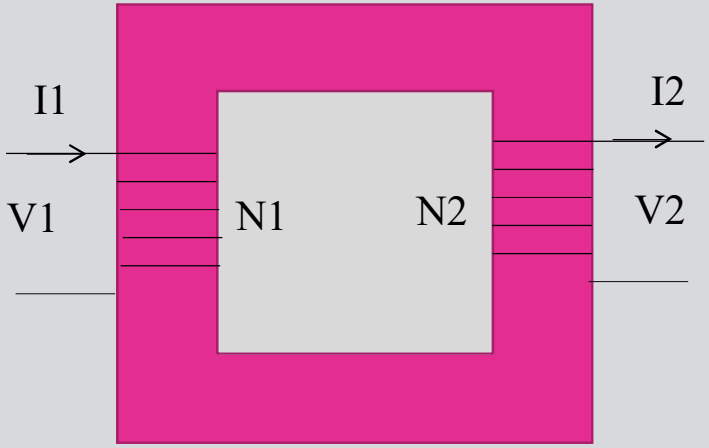
ترانسفورماتور:

ترانسفورمر از یک هسته مغناطیسی و دو یا چند سیم پیچی به دور آن هسته ایجاد شده است.

اعمال ولتاژسینوسی به سیم پیچی اولیه ← تولید میدان متغیر با زمان

میدان محصور در هسته ← در گیر شدن با سیم پیچ ثانویه

میدان متغیر با زمان در ثانویه ← القا ولتاژ سینوسی در ثانویه



ترانسفورمر ایده آل:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}$$

توان در دو طرف:

$$P_{in} = P_{out}$$

مثال) در یک ترانسفورمر ایده آل۲ به ۱، اگر اولیه به منبع ۲۲۰ ولت متصل شده و ثانویه یک مقاومت ۱۰۰ اهمی قرار گیرد، جریان اولیه و توان در دو سمت ترانسفورمر را تعیین کنید.

طبق رابطه ترانس ایده آل:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{2}{1}$$

پس ولتاژ ثانویه برابر ۱۲۰ ولت شده و جریان ثانویه ۱/۲ آمپر و به تبع آن جریان اولیه ۰/۶ آمپر میشود.

پس توان اولیه :

$$P_{in} = V_1 I_1 = 240 \times 0.6 = 144W$$

توان ثانویه:

$$P_{out} = V_2 I_2 = 120 \times 1.2 = 144W$$

در عمل بخشی از توان اولیه صرف تلفات میشود.

مثال) در یک ترانسفورمر ایده آل۱ به ۱۰، اگر اولیه به منبع V1 ولت متصل شده و ثانویه یک مقاومت R اهمی قرار گیرد، جریان اولیه را تعیین کنید.

طبق رابطه ترانس ایده آل:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{I_2}{I_1}=\frac{1}{10}$$

پس:

$$V_2=10V_1 \quad \rightarrow \quad I_2=\frac{V_2}{R}=\frac{10V_1}{R}$$

$$I_1=10I_2=\frac{100V_1}{R}$$

در واقع مقاومت R در ثانویه مانند یک مقاومت R/100 در اولیه رفتار میکند به این انتقال امپدانس میگویند.

$$R'=\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R$$

- **ماشین الکتریکی**: سیستم که انرژی الکتریکی و مکانیکی را به یکدیگر تبدیل کند ماشین الکتریکی نام دارد.
- **تبصره**: این تبدیل باید حتما در حضور میدان مغناطیسی باشد.

الکتریکی به مکانیکی = **موتور**(ac یا dc)

مکانیکی به الکتریکی= **ژنراتور** (ac یا dc)

پارامترهای سیستم الکتریکی: ولتاژ، جریان، فرکانس و توان

پارامترهای سیستم مغناطیسی: شار، چگالی شار، شار-دور

پارامترهای سیستم مکانیکی: سرعت، موقعیت و گشتاور

انواع مهم تر ماشینها:

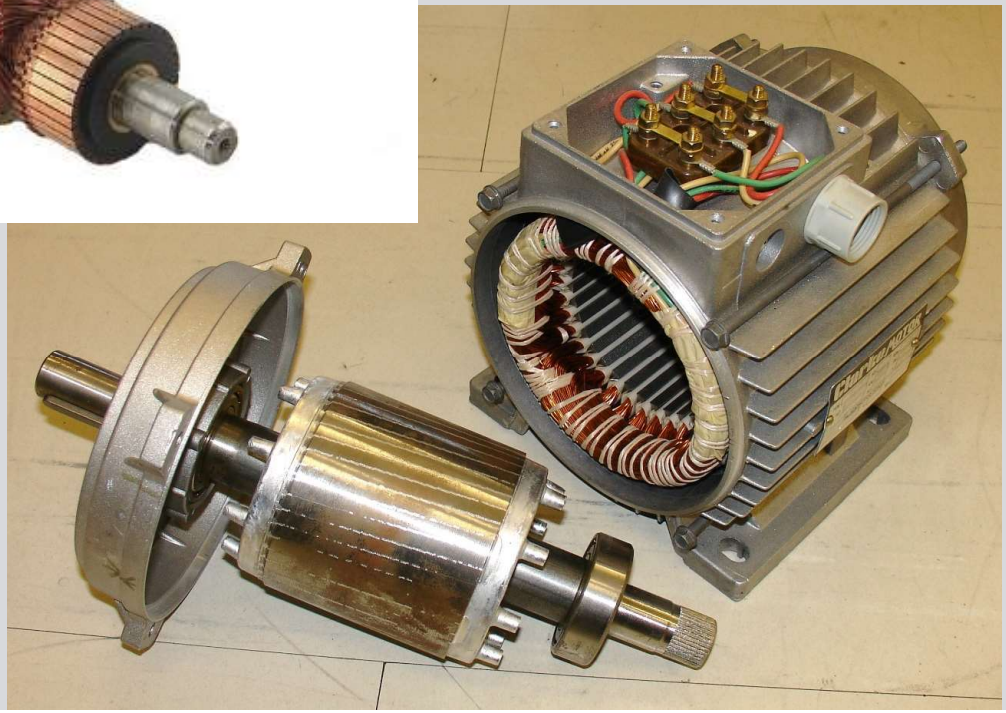
۱- ماشین dc

۲- ماشین ac (سنکرون و آسنکرون)

ساختمان ماشین های الکتریکی:

۱- قسمت ثابت: **استاتور** شامل هسته مغناطیسی و سیم پیچی عموما بخش بیرونی

۲- قسمت دوار: **رتور** شامل هسته مغناطیسی و سیم پیچی و عموما بخش داخلی



این دو با فاصله هوایی از هم جدا شده اند.

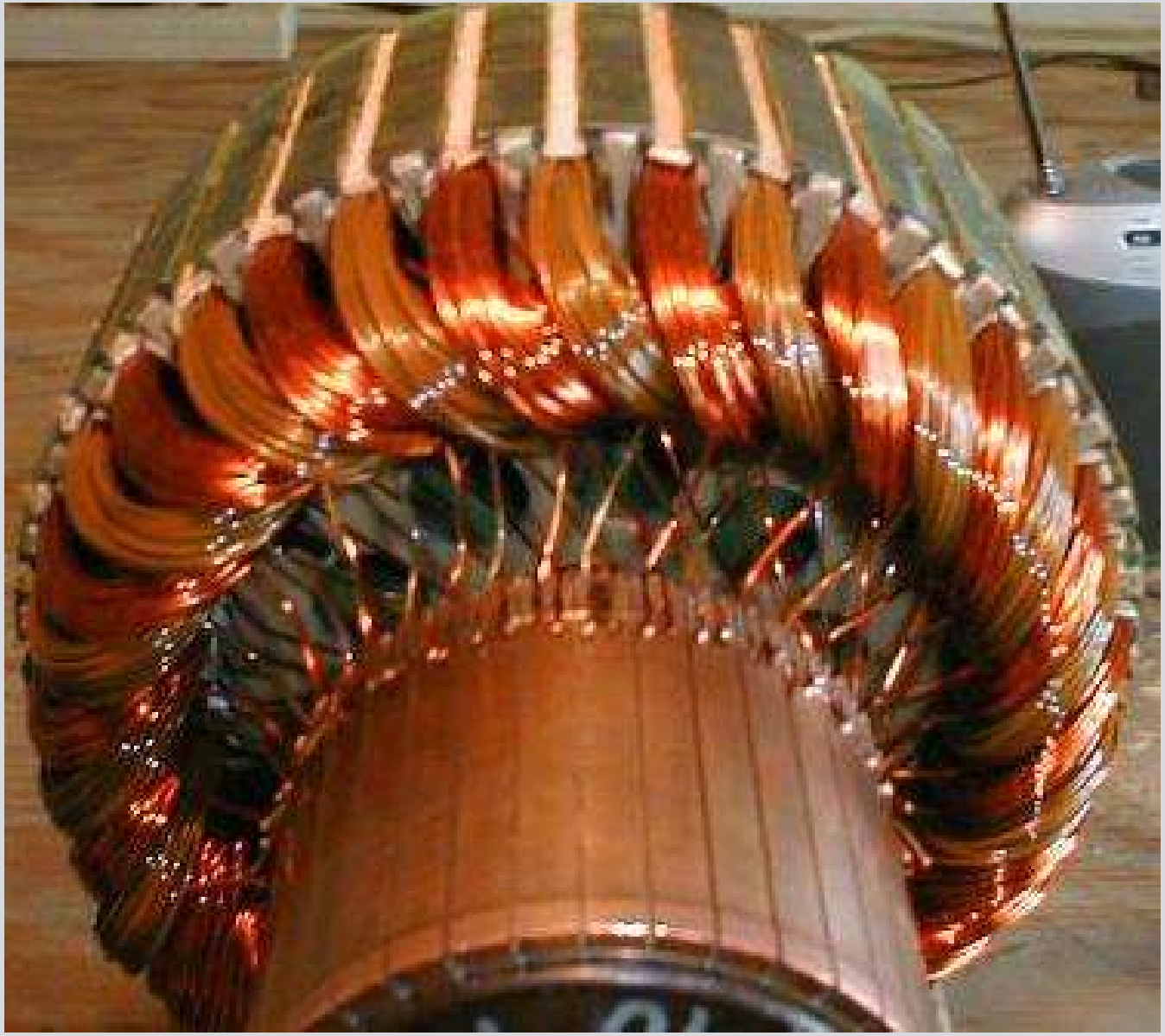
ساختمان ماشین dc:

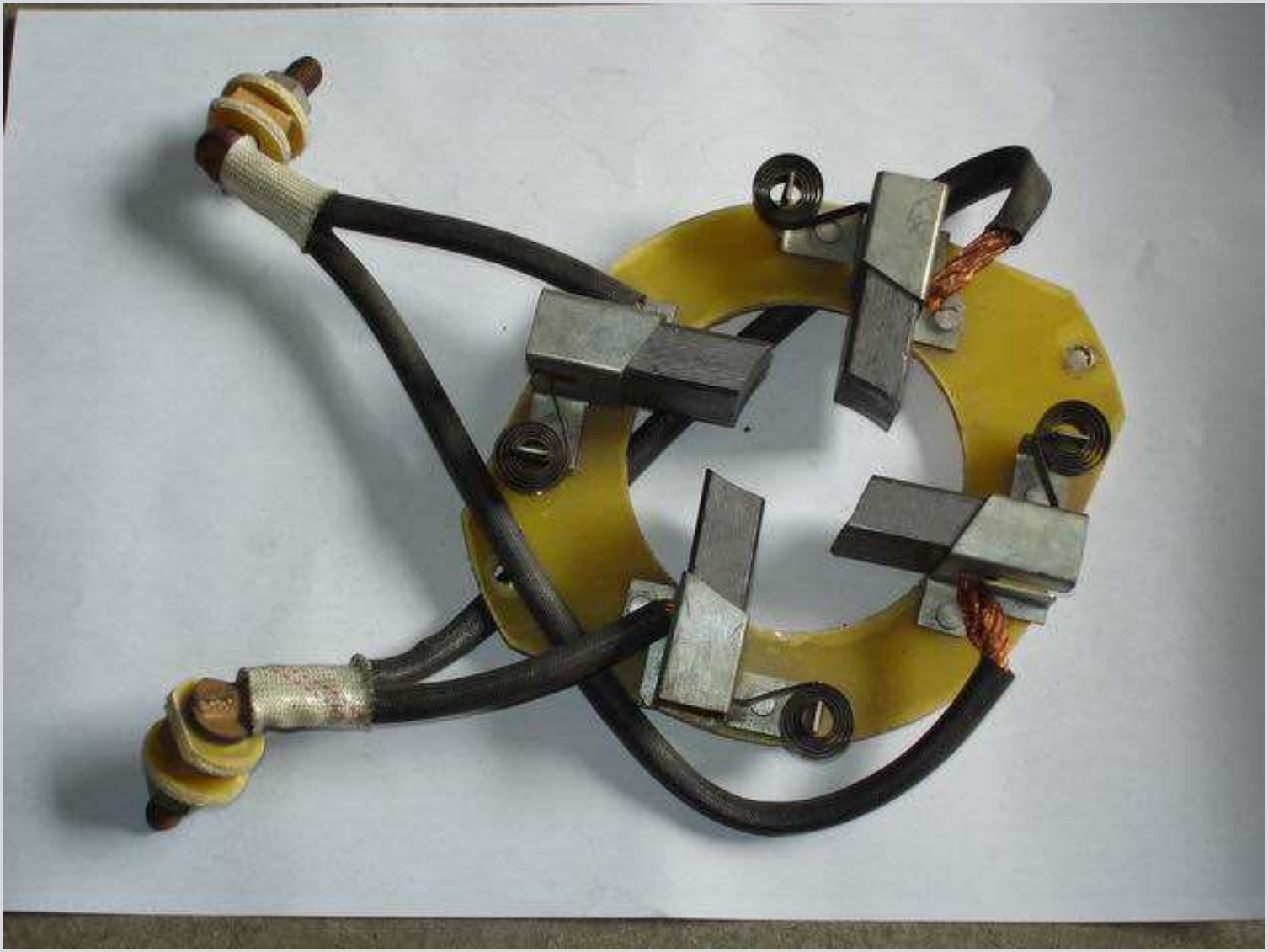
ماشین dc علاوه بر رتور و استاتور دارای کموتاتو و جاروبک نیز میباشد.

کموتاتور یک سری تیغه مسی غیرمتصل بوده که هر یک به یک سر از دو کلاف سیم پیچی رتور متصل هستند.

جاروبک میله های گرافیتی (ذغال) هستند که وظیفه انتقال انرژی به رتور یا از رتور را به عهده دارند.

szjiarun.en.alibaba.com

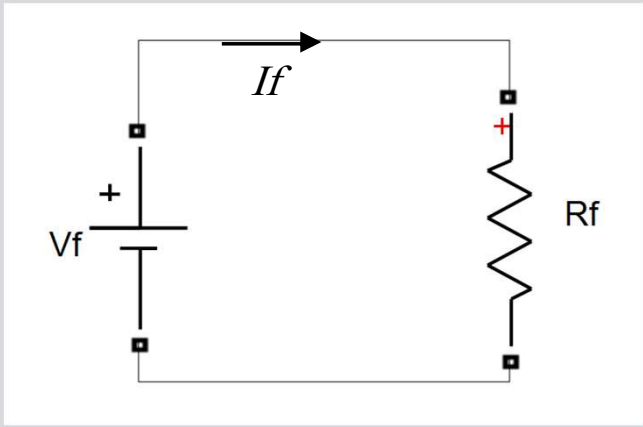




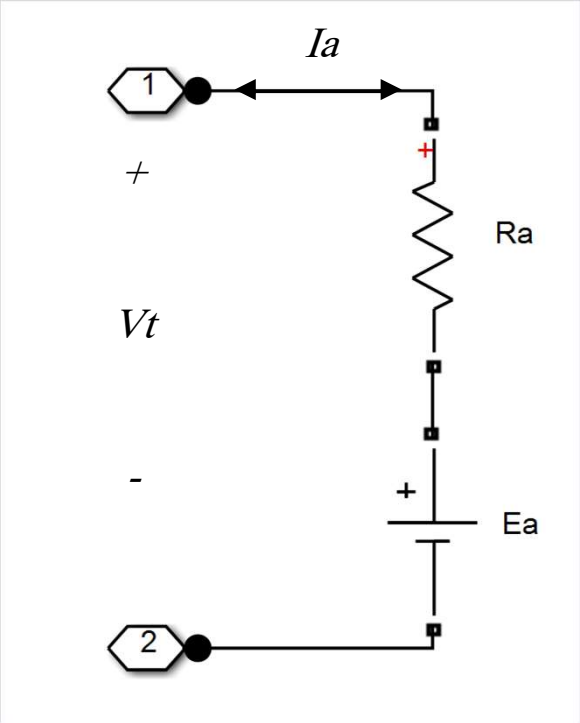
مدار معادل ماشین dc:

استاتور که سیم پیچی تحریک به آن متصل شده و جریان dc در آن جاری است با یک مقاومت مدل میشود.

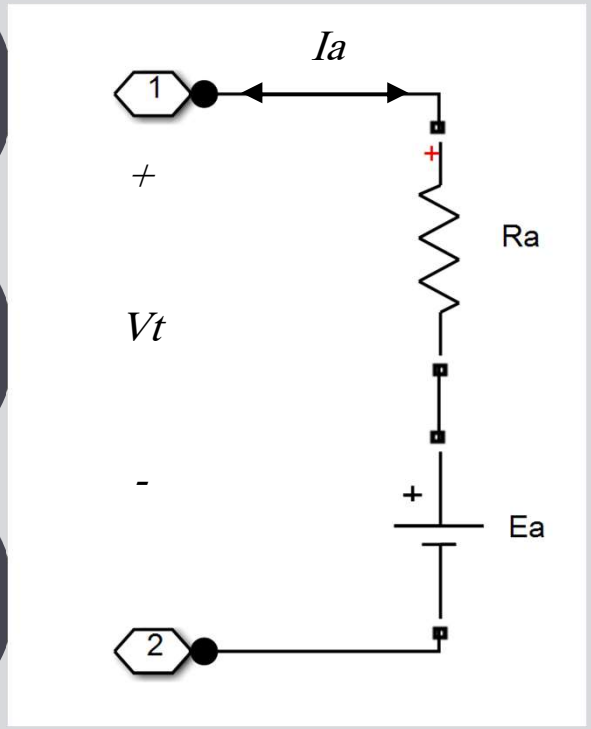
* جریان استاتور عامل ایجاد شار تحریک میباشد.



رتور که سیم پیچی آرمیچر به آن متصل شده و یک ولتاژ dc در آن القا میشود با یک مقاومت و یک منبع dc مدل میگردد.



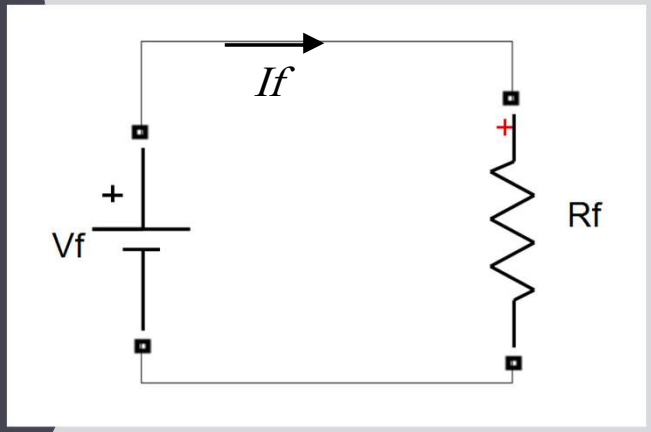
روابط ماشین dc:



۱- روابط KVL و KCL مرتبط با اتصالات موتور $V_t = E_a \pm R_a I_a$

جمع برای حالت موتوری و تفریق برای ژنراتوری

ژنراتوری Ea>Vt موتوری Ea<Vt

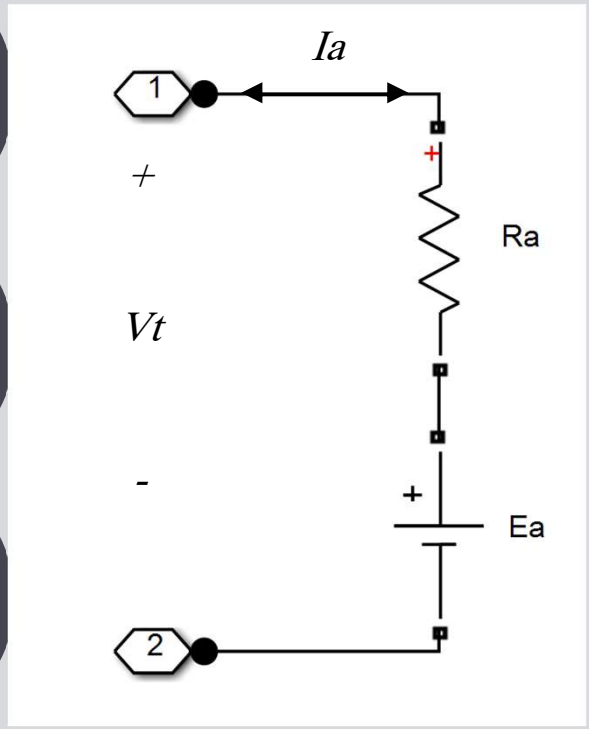


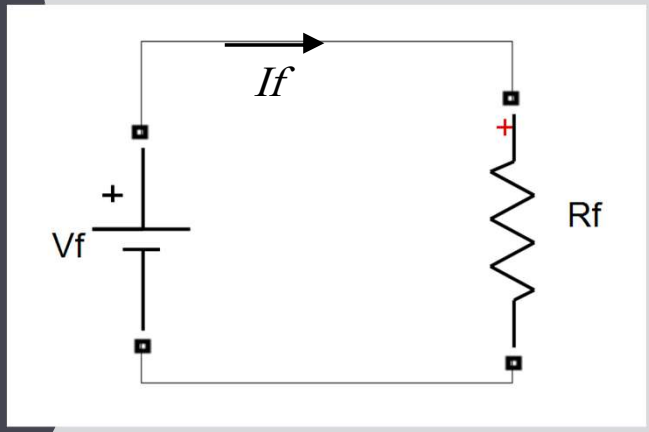
۲- ولتاژ القایی رتور $E_a = k\varphi\omega$

k عدد ثابت بسته به نوع سیم بندی رتور، تعداد قطب استاتور و تعداد دور سیم پیچی استاتور

φ شار تحریک ناشی از جریان استاتور (If)

ω سرعت رتور بر حسب rad/s





۳- گشتاور ماشین

$$T = k\varphi I_a$$

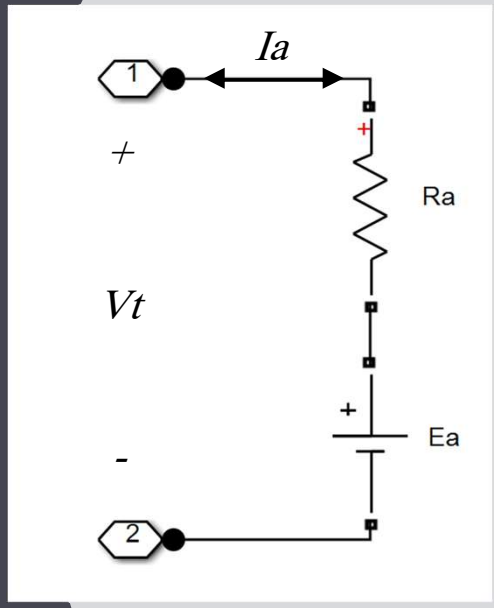
k عدد ثابت بسته به نوع سیم بندی رتور، تعداد قطب استاتور و تعداد دور سیم پیچی استاتور

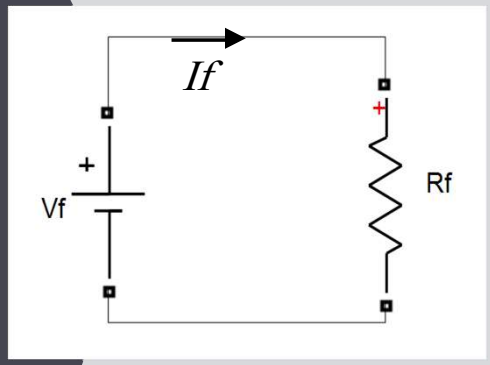
φ شار تحریک ناشی از جریان استاتور (If)

Ia جریان رتور

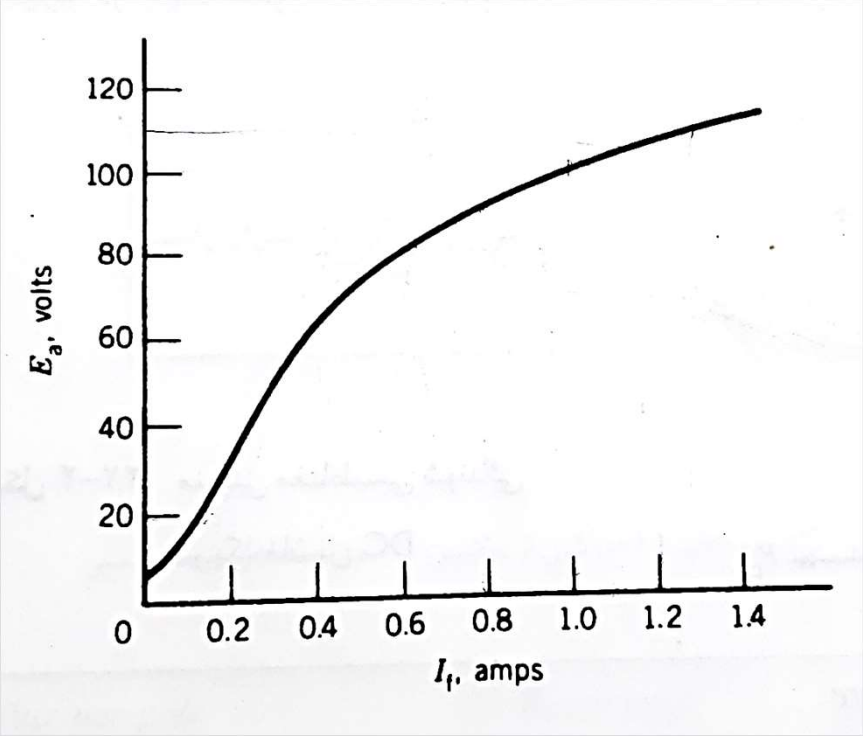
روابط ۲ و ۳ در همه ماشینهای dc برقرار هستند.

منحنی مغناطیس شوندگی (اشباع) در ماشین:





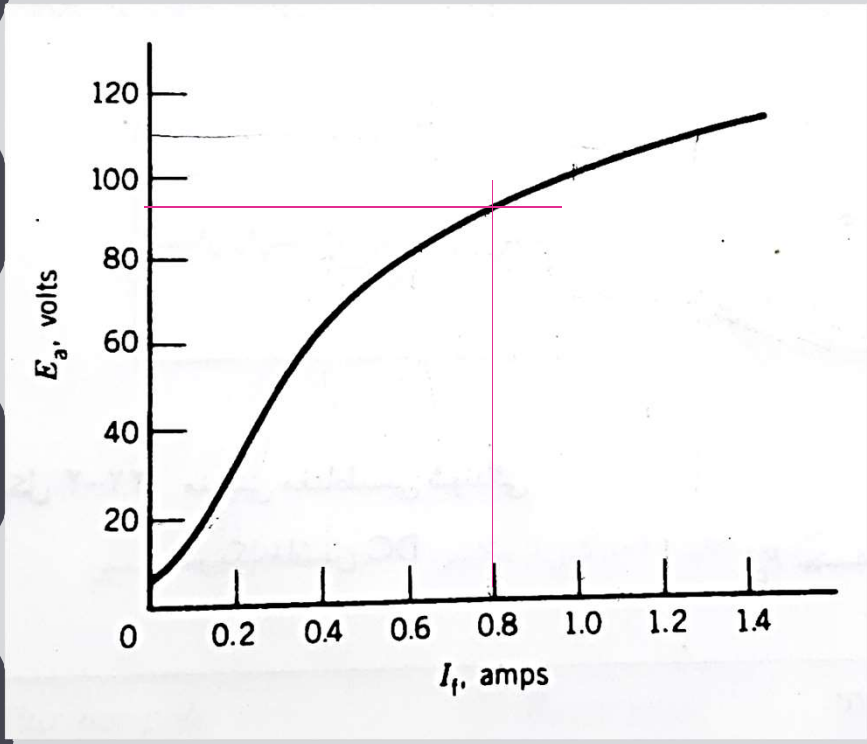
این منحنی ارتباط بین جریان استاتور (If) و ولتاژ القا شده در رتور (Ea) را مشخص میکند.
این منحنی با آزمایش مدار باز ماشین تحت سرعت ثابت تعیین میگردد.



$$E_a = k\varphi\omega$$

$$\varphi \propto I_f \quad , \quad \omega = cte$$

مثال) یک موتور dc ۱ کیلو وات، ۱۲۰ ولت، ۱۰۰۰ دور بر دقیقه مفروض است. مشخصه اشباع موتور برای سرعت ۱۰۰۰ rpm در زیر داده شده است. در صورتی که موتور به ولتاژ ۱۲۰ولت وصل باشد و جریان تحریک (استاتور) موتور ۰/۸ آمپر و سرعت موتور نامی باشد، جریان آرمیچر و گشتاور موتور را تعیین کنید. مقاومت رتور ۲ اهم است.



از روی مشخصه به ازای جریان تحریک ۰/۸ آمپر، ولتاژ القایی برابر ۹۳ ولت تعیین میشود (حدودا)

$$E_a = 93V$$

$$V_t = E_a + R_a I_a \quad \rightarrow$$

$$I_a = \frac{120-93}{2} = 13.5A$$

برای تعیین گشتاور

$$E_a = k\varphi\omega \rightarrow k\varphi = \frac{E_a}{\omega}$$

$$T = k\varphi I_a = \frac{E_a}{\omega} I_a = \frac{93}{1000 \times \frac{2\pi}{60}} 13.5 = 12Nm$$

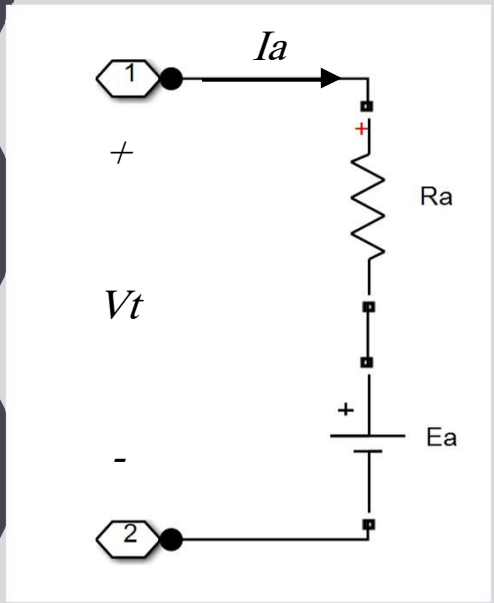
اگر در مثال فوق جریان رتور را در سرعت rpm ۱۲۰۰ میخواست؟

چون شار برای هر دو سرعت ثابت است پس:

$$\frac{E_{a1000}}{\omega_{1000}} = \frac{E_{a1200}}{\omega_{1200}} \rightarrow E_{a1200} = 93\frac{1200}{1000} = 111.6V$$

$$I_a = \frac{120 - 111.6}{2} = 4.2A$$

مثال) در یک موتور dc که سیم پیچی رتور و استاتور با هم موازی شده اند، موتور به منبع dc ۲۲۰ ولتی متصل شده است و جریان رتور برای سرعت rpm ۲۰۰۰ برابر ۱۰۰ آمپر می باشد. مقاومت رتور ۰/۲ اهم و مقاومت مدار استاتور ۱۰۰ اهم است. گشتاور تولیدی موتور را حساب کنید. موتور چه توانی مصرف میکند.



طبق مدار معادل رتور داریم:

$$V_t = E_a + R_a I_a \quad \rightarrow E_a = V_t - R_a I_a = 220 - 100 \times 0.2 = 200V$$

می دانیم که:

$$E_a = k\varphi\omega \quad \rightarrow \quad k\varphi = \frac{E_a}{\omega} = \frac{200V}{2000rpm \times \frac{2\pi}{60}} = 0.96$$

برای گشتاور داریم:

$$T = k\varphi I_a \quad \rightarrow \quad T = 0.96 \times 100 = 96Nm$$