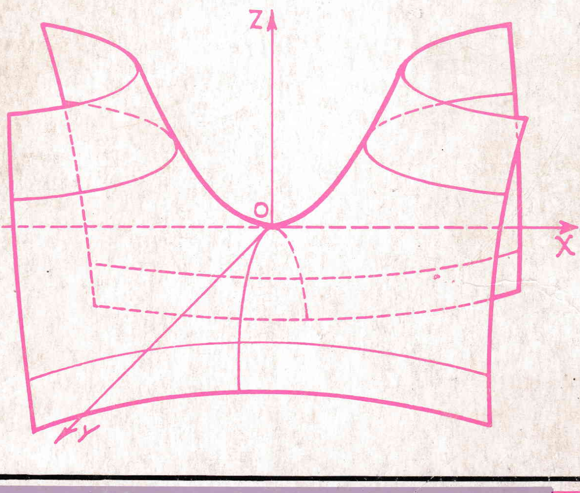
هندسهٔ تحلیلی

تألیف جوزف اِچ. کیندِل



ترجمهٔ حسین ابراهیم زادهٔ قُلزم

انتشارات فاطمی

هندسهٔ تحلیلی

تألیف جوزف اِچ. کیندِل

ترجمهٔ حسین ابراهیم زادهٔ قُلزم

ویراستار: مهران اخباریفر

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

هندسهٔ تحلیلی

ANALYTIC GEOMETRY

مؤلف: جوزف اِچ. کیندِل Joseph H. Kindle

مترجم: حسین ابراهیم زادهٔ قُلزم

ویراستار: مهران اخباریفر

چاپ اول: اسفندماه ۱۳۶۸

تیراژ: ۶۰۰۰ نسخه

چاپ و صحافی: چاپخانهٔ صنوبر

نشانی: تهران، خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ۱۵۹

تلفن: ۶۵۱۴۲۲

فهرست

پیشگفتار

این کتاب برای تکمیل دوره‌های هندسهٔ تحلیلی که معمولاً در دبیرستانها و دانشگاهها تدریس می‌شود، نوشته شده است و همان ترتیبی را که دربیشتر متنهای آموزشی هندسهٔ تحلیلی به‌کار می‌رود، دنبال می‌کند. کتاب، برروی‌هم، دارای ۳۴۵ مسئلهٔ نمونهٔ حل شده و ۹۱۰ مسئلهٔ تکمیلی برای تمرین است، که از نظردشواری باهم متفاوتند. ترتیب مسائل چنان است که گسترش طبیعی هر موضوع را نشان می‌دهد. چون اساس یادگیری هندسهٔ تحلیلی گذراندن یك دورهٔ درسی همراه باحل مسئله است، و چون یکی از دلایل عدم موفقیت در ریاضیات راههای نادرست کوشش در حل مسائل است، ما معتقدیم که این کتاب، اگر به درستی ازآن استفاده شود، دریادگیری این رشته ازریاضیات بسیارسودمند خواهد بود. از این گذشته، سعی شده است که این کتاب دانش‌آموزانی را که احساس می‌کنند به مروری برتئوریهای اساسی و مسائل هندسهٔ تحلیلی نیاز دارند، یاری کند.

برای استفادهٔ صحیح از این کتاب، باید به روشنی درك کرد که چه ویژگیهایی دارد و چه ویژگیهایی ندارد. این کتاب به‌طور مشخص متن درسی نیست و استفاده ازآن دانش‌آموز را از مطالعهٔ دقیق متن درسی بی‌نیاز نمی‌کند. هرفصل کتاب خلاصهٔ کوتاهی است از تعریفها، اصلها و قضیه‌های مورد نیاز که با مجموعه‌هایی از مسائل نمونه ومسائل تکمیلی دنبال می‌شود.

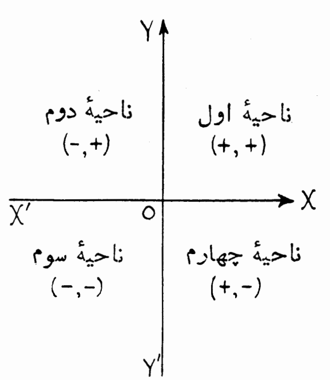
نیاز به تأکید نیست که ریاضیات را فقط با حل مسائل و تمرینهای ریاضی نمی‌توان آموخت. مطالعهٔ اجباری و بی‌دقت متن درسی، حفظ کردن فرمولها و مطالعهٔ نامرتب و بی‌دقت مسائل حل شده در این کتاب، تنها سبب توهم دریادگرفتن هندسهٔ تحلیلی می‌شود. بسنده‌کردن به بهره‌گیری ازاین کتاب با این هدف تنها کمی بیش ازآنچه دربارهٔ هندسهٔ تحلیلی می‌دانید بردانش شما خواهد افزود. برای استفادهٔ مؤثر از این کتاب، باید حل هریك از مسائل را، روی کاغذ بیاورید و دربارهٔ چرایی و چگونگی هر مرحله از آن بیندیشید. در هرمسئلهٔ حل شده نکته‌ای برای آموختن هست. وقتی‌که آن را یادگرفتید، می‌توانید بیشتر مسائل تکمیلی و مسائل کتاب درسی خود را، بی‌آنکه با دشواری چندانی روبه‌رو شوید، حل کنید.

جوزف اچ. کیندل

۱

دستگاه مختصات قائم

دستگاه مختصات قائم. در درسهای آغازین جبر و مثلثات روشهای مختصات قائم مورد استفاده قرار می‌گیرد. دراین دستگاه دوخط عمود برهم که یکدیگررا در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کنند صفحهٔ مختصات را به‌چهار ناحیه (ربع) تقسیم می‌کنند. خط افقی $X'OX$ محور طولها و خط قائم $Y'OY$ محور عرضها نامیده می‌شود و این دو محور را باهم محورهای مختصات می‌نامند. دراین دستگاه نقطهٔ O مبدأ مختصات است.



فاصلهٔ هرنقطه از محور yها را مختص x یا طول نقطه وفاصلهٔ هرنقطه ازمحور xها

را مختص y یا عرض نقطه می‌نامند. این دو فاصله را با هم مختصات نقطهٔ موردنظر می‌نامند و بانماد (x, y) نشان می‌دهند. طول یك نقطه مثبت است، اگرآن نقطه درطرف راست محور عرضها باشد ومنفی است، اگر درطرف چپ محور عرضها باشد. همچنین عرض یك‌نقطه مثبت است، اگرآن نقطه بالای محور طولها باشد ومنفی است، اگر پایین محور طولها باشد.

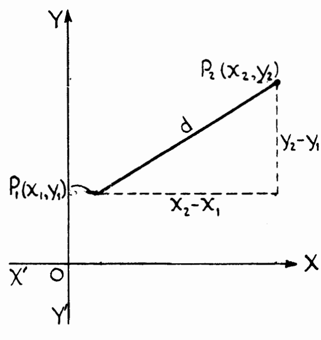
هنگامی مجموعه‌ای ازنقاط که مختصاتشان داده شده‌اند قابل رسمندکه واحد مناسبی برای‌محورهای‌مختصات اختیار وروی محورها مشخص شود. دراین صورت می‌توان‌نقاط را به‌آسانی رسم نمود.

فاصلهٔ بین دو نقطه. به‌راحتی ثابت می‌شودکه فاصلهٔ d بین دو نقطهٔ $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

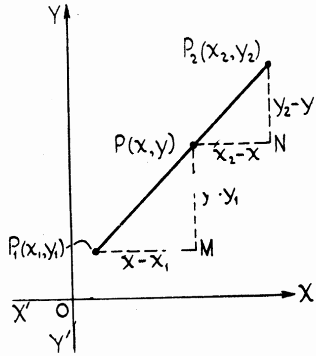
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

بنابراین، فاصلهٔ بین نقاط $(4, -1)$ و $(7, 3)$ برابر است با:

$$d=\sqrt{(7-4)^2+(3+1)^2}$$
$$=5 \text{ واحد}$$



نقطهٔ تقسیم. نقطهٔ تقسیم نقطه‌ای است‌که پاره‌خطی را به‌نسبت معین تقسیم‌کند. روی خط جهت‌داری نقاط $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ را در نظر می‌گیریم که جهت آن از P_1 به‌طرف P_2 است. فرض کنیم $P(x, y)$ نقطهٔ سومی باشد به‌طوری‌که پاره‌خط P_1P_2 را به نسبت $r=\dfrac{P_1P}{PP_2}$ تقسیم‌کند. ازآنجاکه P_1P و PP_2 روی یك‌خط ودریك جهتندنسبت آنهاعددی مثبت است. اگرنقطهٔ تقسیم $P(x, y)$ روی امتداد پاره‌خط، دریکی‌ازدوطرف



باشد، آنگاه نسبت $r=\dfrac{P_1P}{PP_2}$ عددی منفی‌است، چون دراین صورت P_1P و PP_2 درجهت مخالف هم هستند.

بنا به تشابه مثلثها:

$$\frac{P_1M}{PN}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{P_1P}{PP_2}=r$$

هرگاه عبارت فوق را برای تعیین x حل کنیم:

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$$

به‌همین ترتیب:

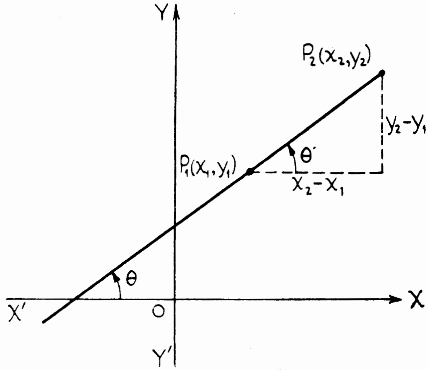
$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

هرگاه نقطهٔ $P(x,\ y)$ وسط پاره‌خط P_1P_2 باشد، یعنی $r=1$ داریم:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

زاویهٔ میل و ضریب زاویهٔ یک خط. زاویهٔ میل خطی چون L (که به‌موازات محور xها نباشد) بنا به‌تعریف عبارت است ازکوچکترین زاویهٔ مثبتی که ازجهت مثبت محور xها تا L، در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت اندازه گرفته شود. جهت مثبت خط L بنا به‌تعریف بالا در نظـر گرفته می‌شود مگرآنکه خلاف آن گفته شود. اگرخط L موازی محور xها باشد، زاویهٔ میل آن بنا به‌تعریف برابراست با صفر.

ضریب زاویهٔ هـرخط بنا به‌تعریف عبارت است از تانژانت زاویهٔ میل. بنابـراین $m=\tan\theta$ که درآن θ زاویهٔ میل و m ضریب زاویه است.



ضریب زاویهٔ خطی که از دو نقطهٔ $P_۱(x_۱, y_۱)$ و $P_۲(x_۲, y_۲)$ بگذرد صرفنظر از ناحیه‌ای که $P_۱$ و $P_۲$ درآن قراردارند عبارت است از:

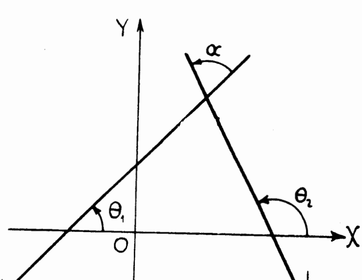
$$m = \tan\theta = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$$

خطوط متوازی وعمود برهم. اگردوخط باهم موازی باشند، آنگاه ضریب زاویه‌هایشان باهم مساویند.

اگر دو خط $L_۱$ و $L_۲$ برهم عمود باشند ضریب زاویهٔ یکی از خطوط عکس قرینهٔ ضریب زاویهٔ خط دیگراست. بنابراین‌اگر $m_۱$ ضریب زاویهٔ خط $L_۱$ و $m_۲$ ضریب‌زاویهٔ خط $L_۲$ باشد، آنگاه:

$$m_۱ m_۲ = -۱ \quad \text{یا} \quad m_۱ = \frac{-۱}{m_۲}$$

زاویهٔ بین دوخط متقاطع. زاویهٔ α یعنی زاویهٔ بین دوخط $L_۱$ و $L_۲$ را در جهت مثبت، خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، ازخط $L_۱$ تا خط $L_۲$ اندازه‌گیری می‌کنند. اگر



ضریب زاویهٔ خط $L_۱$، $m_۱$ و ضریب زاویهٔ خط $L_۲$، $m_۲$ باشد، زاویهٔ بین دو خط چنین است:

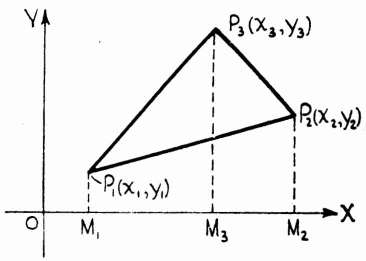
$$\tan\alpha=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$$

برهان: $\alpha=\theta_2-\theta_1$ یا $\theta_2=\alpha+\theta_1$ واز آنجا:

$$\tan\alpha=\tan(\theta_2-\theta_1)=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$$

مساحت چند ضلعی با رأسهای معلوم. هرگاه نقطه‌های $P_1(x_1, y_1)$، $P_2(x_2, y_2)$ و $P_3(x_3, y_3)$ رأسهای مثلث دلخواهی باشند، مساحت مثلث، A برحسب مختصات رأسهای آن عبارت است از:

$$A=\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2-x_2y_1-x_1y_3)$$



برهان:

مساحت مثلث = مساحت ذوزنقهٔ $M_1P_1P_3M_3$ + مساحت ذوزنقهٔ $M_3P_3P_2M_2$ — مساحت ذوزنقهٔ $M_1P_1P_2M_2$

در نتیجه:

$$A=\frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1)+\frac{1}{2}(y_3+y_2)(x_2-x_3)-\frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_2-x_1)$$

$$=\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_2y_1-x_3y_2)$$

این دستور را می‌توان به‌صورت دترمینان زیر بیان نمود:

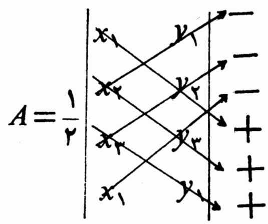
$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

برای تعیین مساحت مثلث دستور دیگری وجود دارد که به صورت آرایه‌هایی از

مختصات رأسهاست، اما این دستور مخصوصاً درحالتی مفید است که خواسته باشیم مساحت چندضلعیی راکه بیش از سه رأس دارد تعیین کنیم.

$$A=\frac{۱}{۲}(x_۱y_۲+x_۲y_۳+x_۳y_۱-x_۱y_۳-x_۳y_۲-x_۲y_۱)$$

خاطرنشان می‌کنیم که سطر اول آرایه، در ردیف آخر تکرار شده است.



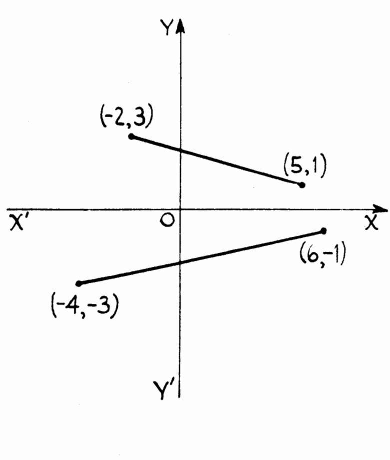
مسئله‌های حل شده

فاصلهٔ بین دو نقطه

۱. مطلوب است تعیین فاصلهٔ بین نقطه‌های الف) $(-۲ , ۳)$ و $(۵ , ۱)$؛ ب) $(۶ , -۱)$ و $(-۴ , -۳)$.

الف) $$d=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}=\sqrt{(۵+۲)^۲+(۱-۳)^۲}=\sqrt{۴۹+۴}=\sqrt{۵۳}$$

ب) $$d=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}=\sqrt{(-۴-۶)^۲+(-۳+۱)^۲}=\sqrt{۱۰۴}=۲\sqrt{۲۶}$$



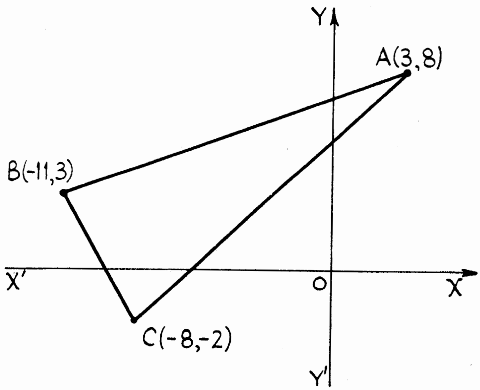
۲. نشان دهید که نقطه‌های $A(3,8)$، $B(-11,3)$ و $C(-8,-2)$ رأسهای یک مثلث متساوی‌الساقین هستند.

$$AB=\sqrt{(3+11)^2+(8-3)^2}=\sqrt{221}$$

$$BC=\sqrt{(-11+8)^2+(3+2)^2}=\sqrt{34}$$

$$AC=\sqrt{(3+8)^2+(8+2)^2}=\sqrt{221}$$

چون $AB=AC$ بنابراین مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

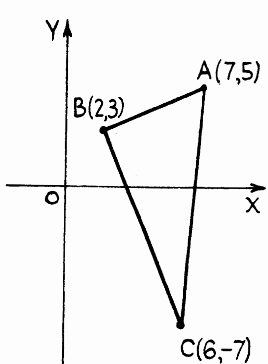


۳. الف) نشان دهید که نقطه‌های $A(7,5)$، $B(2,3)$ و $C(6,-7)$ رأسهای یک مثلث قائم‌الزاویه هستند. ب) مساحت مثلث قائم‌الزاویه را بیابید:

الف)

$$AB=\sqrt{(7-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{29}$$

$$BC=\sqrt{(2-6)^2+(3+7)^2}=\sqrt{116}$$



$$AC=\sqrt{(۷-۶)^۲+(۵+۷)^۲}=\sqrt{۱۴۵}$$

در نتیجه:

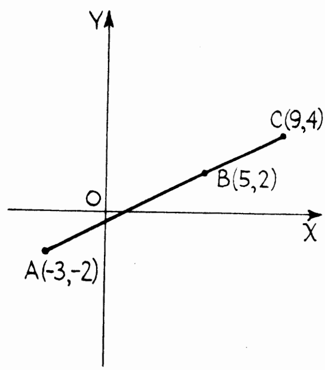
$$(AB)^۲+(BC)^۲=(AC)^۲ \quad \text{یا} \quad ۲۹+۱۱۶=۱۴۵$$

بنابراین ABC مثلثی قائم‌الزاویه است.

ب) $\text{مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}(AB)(BC)=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۹}\times\sqrt{۱۱۶}=۲۹$ واحد سطح

۴. ثابت کنید نقطه‌های زیر بر روی خطی راست قرار دارند: $A(-۳, -۲)$، $B(۵, ۲)$، $C(۹, ۴)$.

$$AB=\sqrt{(۵+۳)^۲+(۲+۲)^۲}=۴\sqrt{۵}$$
$$BC=\sqrt{(۹-۵)^۲+(۴-۲)^۲}=۲\sqrt{۵}$$
$$AC=\sqrt{(۹+۳)^۲+(۴+۲)^۲}=۶\sqrt{۵}$$



چون $AB+BC=AC$ یا $۴\sqrt{۵}+۲\sqrt{۵}=۶\sqrt{۵}$ بنابراین، این نقاط روی یک خط راست قرار دارند.

۵. مختصات نقطه‌ای را چنان تعیین کنید که از نقطه‌های $A(۱, ۷)$، $B(۸, ۶)$ و $C(۷, -۱)$ به یک فاصله باشد.

فرض می‌کنیم که نقطهٔ $P(x, y)$ مختصات نقطهٔ مطلوب باشد. در این صورت:

$$PA=PB=PC \quad .$$

$PA=PB$، بنابراین:

$$\sqrt{(x-۱)^۲+(y-۷)^۲}=\sqrt{(x-۸)^۲+(y-۶)^۲}$$

اگر طرفین تساوی را به‌توان دو برسانیم و ساده کنیم به‌صورت زیرخلاصه می‌شود:

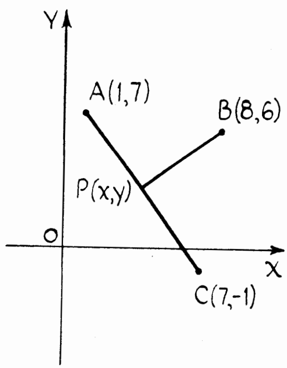
$$۷x-y-۲۵=۰ \qquad (۱)$$

و $PA=PC$، بنابراین:

$$\sqrt{(x-۱)^۲+(y-۷)^۲}=\sqrt{(x-۷)^۲+(y+۱)^۲}$$

اگرطرفین تساوی را به‌توان دو برسانیم وساده کنیم به‌صورت زیرخلاصه می‌شود:

$$۳x-۴y=۰ \qquad (۲)$$



اگر دستگاه معادلات (۱) و (۲) را با هم حل کنیم، نتیجه می‌گیریم ۴ $=x$ و ۳ $=y$.
ازاین‌رو نقطهٔ مطلوب (۳ ,۴) است.

نقطه‌ای که پاره‌خطی را به‌نسبت معین تقسیم می‌کند

۶. مطلوب است تعیین مختصات نقطهٔ $P(x, y)$ به‌طوری که پاره‌خط از $P_۱(۱, ۷)$ تا $P_۲(۶, -۳)$ را به نسبت $r=\frac{۲}{۳}$ تقسیم کند.

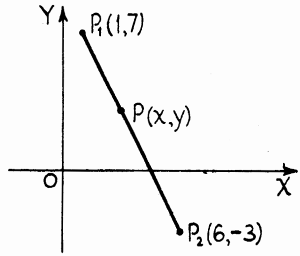
چون نسبت مزبور عددی مثبت است $P_۱P$ و $PP_۲$ باید هم‌جهت و $P(x, y)$روی پاره‌خط $P_۱P_۲$ باشد (تقسیم داخلی).

$$r=\frac{P_۱P}{PP_۲}=\frac{۲}{۳}$$

$$x=\frac{x_۱+rx_۲}{۱+r}=\frac{۱+\frac{۲}{۳}(۶)}{۱+\frac{۲}{۳}}=۳$$

$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{7+\frac{2}{3}(-3)}{1+\frac{2}{3}}=3$$

بنابراین نقطهٔ موردنظر $(3, 3)$ است.

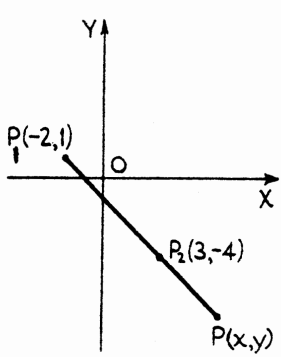


۷. مطلوب است تعیین مختصات نقطهٔ $P(x, y)$ که پاره‌خط از $P_1(-2, 1)$ تا $P_2(3, -4)$ به نسبت $r=-\frac{8}{3}$ تقسیم کند.

چون نسبت دو پاره‌خط منفی است، P_1P و PP_2 درخلاف جهت هم هستند و $P(x, y)$ باید درخارج پاره‌خط P_1P_2 قرارداشته باشد (تقسیم خارجی).

$$r=\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{8}{3}$$

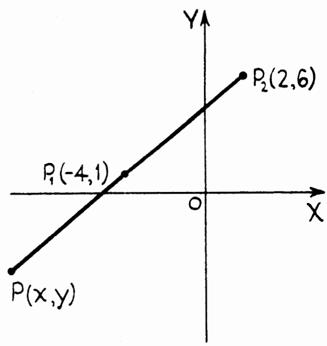
$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{-2+\left(-\frac{8}{3}\right)(3)}{1+\left(-\frac{8}{3}\right)}=6$$



$$y=\frac{y_۱+ry_۲}{۱+r}=\frac{۱+\left(-\frac{۸}{۳}\right)(-۴)}{۱+\left(-\frac{۸}{۳}\right)}=-۷$$

بنابراین نقطهٔ مطلوب $(۶, -۷)$ است.

۸. مرکز دایره‌ای نقطهٔ $P_۱(-۴, ۱)$ و یکی از دوسر قطری از آن دایره، نقطهٔ $P_۲(۲, ۶)$ است. مختصات نقطهٔ $P(x, y)$ انتهای دیگر قطر دایره را به‌دست آورید.



$$r=\frac{P_۱P}{PP_۲}=-\frac{۱}{۲}$$

چون $P_۱P$ و $PP_۲$، در روی خط، درخلاف جهت هم هستند، نسبت آنها عددی منفی است.

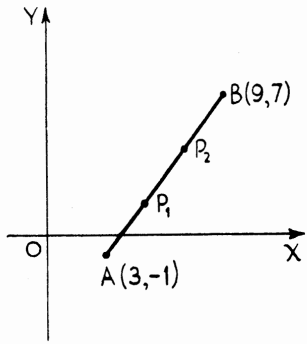
$$x=\frac{x_۱+rx_۲}{۱+r}=\frac{-۴+\left(-\frac{۱}{۲}\right)(۲)}{۱+\left(-\frac{۱}{۲}\right)}=-۱۰$$

$$y=\frac{y_۱+ry_۲}{۱+r}=\frac{۱+\left(-\frac{۱}{۲}\right)(۶)}{۱+\left(-\frac{۱}{۲}\right)}=-۴$$

درنتیجه انتهای دیگر قطر $P(-۱۰, -۴)$ است.

۹. نقطه‌های $P_۱(x_۱, y_۱)$ و $P_۲(x_۲, y_۲)$ پاره‌خط محدود به‌دو نقطهٔ $A(۳, -۱)$ و $B(۹, ۷)$ را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. مختصات نقطه‌های تقسیم را به‌دست آورید.

برای یافتن $P_۱(x_۱, y_۱)$ داریم:



$$r_۱ = \frac{AP_۱}{P_۱B} = \frac{۱}{۲}$$

$$x_۱ = \frac{۳ + \frac{۱}{۲}(۹)}{۱ + \frac{۱}{۲}} = ۵, \quad y_۱ = \frac{-۱ + \frac{۱}{۲}(۷)}{۱ + \frac{۱}{۲}} = \frac{۵}{۳}$$

برای پیدا کردن $P_۲(x_۲, y_۲)$، چنین عمل می‌کنیم:

$$r_۲ = \frac{AP_۲}{P_۲B} = \frac{۲}{۱}$$

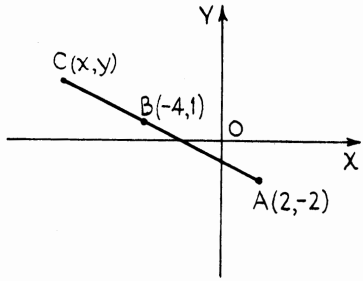
$$x_۲ = \frac{۳ + ۲(۹)}{۱ + ۲} = ۷, \quad y_۲ = \frac{-۱ + ۲(۷)}{۱ + ۲} = \frac{۱۳}{۳}$$

۱۰. نسبت فاصلهٔ نقطهٔ $B(-۴, ۱)$ از نقطهٔ $A(۲, -۲)$، یك سر پاره‌خطی، سه پنجم فاصلهٔ همان سر تا سر دیگر پاره‌خط، یعنی $C(x, y)$، است. مختصات نقطهٔ انتهایی $C(x, y)$ را تعیین کنید.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{۳}{۲} \quad r = \frac{AC}{CB} = -\frac{۵}{۲}$$

چون AC و CB درخلاف جهت هم هستند نسبتشان منفی است.

$$x=\frac{۲+\left(-\frac{۵}{۲}\right)(-۴)}{۱+\left(-\frac{۵}{۲}\right)}=-۸ \quad , \quad y=\frac{-۲+\left(-\frac{۵}{۲}\right)(۱)}{۱+\left(-\frac{۵}{۲}\right)}=۳$$



۱۱. میانه‌های یك مثلث یکدیگررا درنقطه‌ای مانند $P(x, y)$ که مرکز ثقل مثلث نام‌دارد قطع می‌کنند. فاصلهٔ مرکز ثقل تا هررأس، ۲/۳ فاصلهٔ آن رأس تا وسط ضلع مقابل است. اگر رأسهای مثلث نقطه‌های $A(x_1, y_1)$، $B(x_2, y_2)$ و $C(x_3, y_3)$ باشد، مختصات مرکز ثقل $P(x, y)$ را به‌دست آورید.

میانهٔ APD راکه D وسط BC است درنظر بگیرید. مختصات نقطهٔ D عبارتنداز $\left(\frac{x_2+x_3}{۲}, \frac{y_2+y_3}{۲}\right)$.

می‌دانیم که: $\frac{AP}{AD}=\frac{۲}{۳}$ در نتیجه $r=\frac{AP}{PD}=\frac{۲}{۱}=۲$

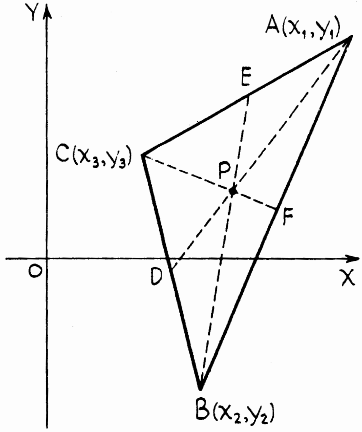
$$x=\frac{x_1+۲\left(\frac{x_2+x_3}{۲}\right)}{۱+۲}=\frac{x_1+x_2+x_3}{۳}$$

$$y=\frac{y_1+۲\left(\frac{y_2+y_3}{۲}\right)}{۱+۲}=\frac{y_1+y_2+y_3}{۳}$$

مختصات نقطهٔ مطلوب عبارت‌است‌از $\left(\frac{۱}{۳}(x_1+x_2+x_3) \text{ و } \frac{۱}{۳}(y_1+y_2+y_3)\right)$.

اگرمیانهٔ BPE یا میانهٔ CPF را نیزموردبررسی قراردهیم، به‌همین‌نتیجه می‌رسیم. ضمناً

$$r=\frac{AP}{PD}=\frac{BP}{PE}=\frac{CP}{PF}=\frac{۲}{۱}=۲$$

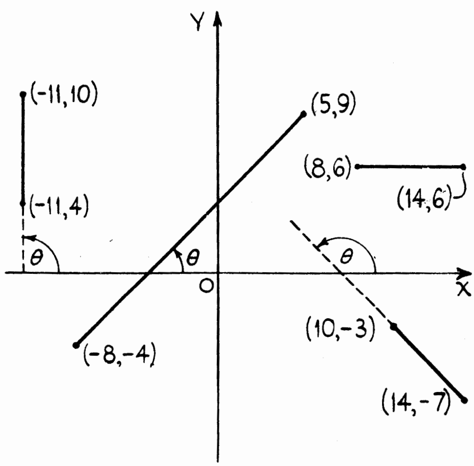


زاویهٔ میل و ضریب زاویهٔ یك خط

۱۲. ضریب زاویهٔ، m، و زاویهٔ میل، θ، خطوطی را که ازجفت نقاط زیرمی گذرند به‌دست آورید:

الف) (۴− ,۸−)، (۹ ,۵) ؛ ب) (۳− ,۱۰)، (۷− ,۱۴)؛

ج) (۴ ,۱۱−)، (۱۰ ,۱۱−)؛ د) (۶ ,۸)، (۶ ,۱۴).



$$m=\tan\theta=\frac{y_{۲}-y_{۱}}{x_{۲}-x_{۱}}$$

الف) $m=\frac{۹+۴}{۵+۸}=۱ \quad , \quad \theta=\tan^{-۱}۱=۴۵^\circ$

ب) $m=\frac{-۷+۳}{۱۴-۱۰}=-۱,\ \theta=\tan^{-۱}-۱=۱۳۵^\circ$

ج) $m=\frac{۱۰-۴}{-۱۱+۱۱}=\frac{۶}{۰}=\infty,\ \theta=\tan^{-۱}\infty=۹۰^\circ$

د) $m=\frac{۶-۶}{۱۴-۸}=\frac{۰}{۶}=۰\quad,\quad \theta=\tan^{-۱}۰=۰^\circ$

۱۳. ثابت کنید سه‌نقطهٔ $A(-۳, ۴)$، $B(۳, ۲)$ و $C(۶, ۱)$ روی خطی راست واقعند.

ضریب زاویهٔ AB $=\frac{۲-۴}{۳+۳}=-\frac{۱}{۳}$ ، ضریب زاویهٔ AC $=\frac{۱-۴}{۶+۳}=-\frac{۱}{۳}$

چون ضریب زاویهٔ AB مساوی ضریب زاویـهٔ AC است، سه‌نقطهٔ داده شده روی یك خط راست قرار دارند.

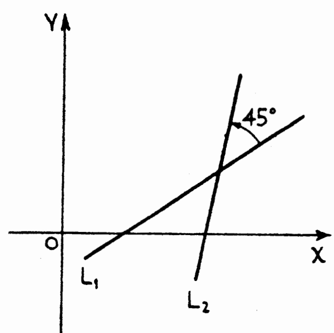
۱۴. بـا استفاده از ضریب زاویه‌ها، نشان دهید کـه نقطه‌هـای $A(۸, ۶)$، $B(۴, ۸)$ و $C(۲, ۴)$ رأسهای مثلثی قائم‌الزاویه هستند.

ضریب زاویهٔ AB $=\frac{۸-۶}{۴-۸}=-\frac{۱}{۲}$ ، ضریب زاویهٔ BC $=\frac{۴-۸}{۲-۴}=۲$

چون ضریب زاویهٔ AB عکس قرینهٔ ضریب زاویهٔ BC است، دوضلع مثلث برهم عمودند.

زاویهٔ بین دوخط متقاطع

۱۵. زاویهٔ بین‌دوخط $L_۱$ و $L_۲$، ۴۵° است، اگر $m_۱$ ضریب زاویهٔ $L_۱$ برابر $\frac{۲}{۳}$ بـاشد، $m_۲$ ضریب زاویهٔ خط $L_۲$ را به‌دست آورید.



$$\tan ۴۵^\circ = \frac{m_۲ - m_۱}{۱ + m_۲ m_۱} \quad \text{یا} \quad ۱ = \frac{m_۲ - \frac{۲}{۳}}{۱ + \frac{۲}{۳} m_۲}$$

با حل عبارت بالا داریم: $m_۲ = ۵$

۱۶. مطلوب است تعیین زوایای داخلی مثلثی که رأسهای آن عبارتند از $A(-۳, -۲)$، $B(۲, ۵)$ و $C(۴, ۲)$.

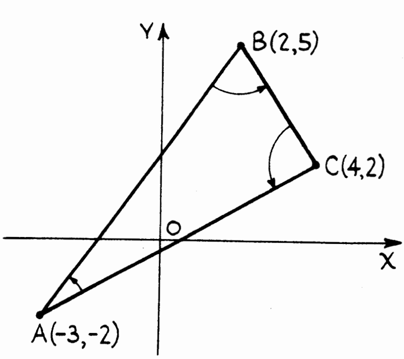
$$m_{AB} = \frac{۵+۲}{۲+۳} = \frac{۷}{۵} ،m_{BC} = \frac{۲-۵}{۴-۲} = -\frac{۳}{۲} ،m_{CA} = \frac{۲+۲}{۴+۳} = \frac{۴}{۷}$$

$$\tan A = \frac{m_{AB} - m_{CA}}{۱ + m_{AB} m_{CA}} = \frac{\frac{۷}{۵} - \frac{۴}{۷}}{۱ + \frac{۷}{۵}\left(\frac{۴}{۷}\right)} = \frac{۲۹}{۶۳} ،A = ۲۴^\circ ۴۳/۱'$$

$$\tan B = \frac{m_{BC} - m_{AB}}{۱ + m_{BC} m_{AB}} = \frac{\frac{-۳}{۲} - \frac{۷}{۵}}{۱ + \left(-\frac{۳}{۲}\right)\left(\frac{۷}{۵}\right)} = \frac{۲۹}{۱۱} ،B = ۶۹^\circ ۱۳/۶'$$

$$\tan C = \frac{m_{CA} - m_{BC}}{۱ + m_{CA} m_{BC}} = \frac{\frac{۴}{۷} - \left(-\frac{۳}{۲}\right)}{۱ + \frac{۴}{۷}\left(-\frac{۳}{۲}\right)} = \frac{۲۹}{۲} ،C = ۸۶^\circ ۳/۳'$$

تحقیق کنید که $A + B + C = ۱۸۰^\circ$.



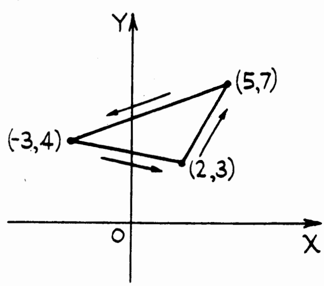
مساحت چندضلعی با رأسهای معلوم

۱۷. مساحت مثلثی، A، را بیابید که رأسهای آن عبارتند از (۲, ۳)، (۵, ۷) و (−۳, ۴).

$$A=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۷ \\ -۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix}$$

$$=\frac{۱}{۲}[۲\times ۷+۵\times ۴+(-۳)\times ۳-۲\times ۴-(-۳)\times ۷-۵\times ۳]$$

$$=\frac{۱}{۲}(۱۴+۲۰-۹-۸+۲۱-۱۵)=۱۱٫۵$$ واحد سطح



۱۸. مطلوب است تعیین مساحت، A، پنج‌ضلعیی که رأسهای آن (−۵، −۲)، (−۲، ۵)، (۲، ۷)، (۵، ۱) و (۲، −۴) باشد.

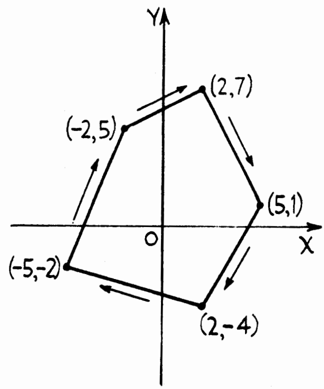
$$A=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} -۵ & -۲ \\ -۲ & ۵ \\ ۲ & ۷ \\ ۵ & ۱ \\ ۲ & -۴ \\ -۵ & -۲ \end{vmatrix}$$

$$=\frac{۱}{۲}[(-۵)\times۵+(-۲)\times۷+۲\times۱+۵\times(-۴)+۲\times(-۲)-$$

$$-(-۵)\times(-۴)-۲\times۱-۵\times۷-۲\times۵-(-۲)\times(-۲)]$$

$$=\frac{۱}{۲}[-۱۳۲]=-۶۶ \text{ واحد سطح}$$

جواب: برابر است با ۶۶ واحد سطح. اگر رأسهای داده شده هم‌جهت با حرکت عقربه‌های ساعت باشد، علامت مساحت منفی‌است ولی اگر رأسها درخلاف جهت‌حرکت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته شود علامت مساحت مثبت است.



مسئله‌های تکمیلی

۱. مطلوب است رسم نقاطی که مختصات آنها عبارتند از: (۳ ،۲)، (۰ ،۴)، (۱ ،۳−)، (۱ − ،$\sqrt{۲}$)، (۰ ،۲ −)، (۲ − ،$\sqrt{۳}$)، (۱ ،۰)، (۲ − ،$\sqrt{۸}$)، ($\sqrt{۷}$ ،۰)، (۰ ،۰)، (۲ − ،۴٫۵)، ($\sqrt{۱۰}$ ،$-\sqrt{۲}$)، (۰ ،$\sqrt{۳}$)، (۶ − ،۲٫۳).

۲. مثلثی رسم کنید که رأسهایش عبارتند از:

الف) (۰ ،۰)، (۵ ،۱ −)، (۲ ،۴)؛

ب) (۰ ،$\sqrt{۲}$)، (۵ ،۴)، (۲ ،۳ −)؛

ج) (۳ − ،$۲+\sqrt{۲}$)، ($\sqrt{۳}$ ،۳)، (۲ − ،$۱+\sqrt{۸}$).

۳. مطلوب است رسم چندضلعیی که رأسهای آن عبارتند از:

الف) (۲ ،۳ −)، (۱ ،۵)، (۵ ،۳)، (۲ − ،۱)؛

ب) (۶ ،۱)، (۲ ،۷)، (۳ − ،۳)، (۳ − ،۴ −)، (۰ ،۵ −).

۴. مطلوب است تعیین فاصلهٔ بین زوج نقاطی که مختصات آنها عبارتند از:

الف) (۱، ۴)، (۲−، ۳)؛ ب) (۴، ۷−)، (۱۱−، ۱)؛

ج) (۳، ۰)، (۱، ۴−)؛ د) (۵−، ۱−)، (۳−، ۲)؛

ه) (۶−، ۲)، (۲−، ۲)؛ و) (۱، ۳−)، (۱−، ۳).

جواب: الف) $\sqrt{۱۰}$؛ ب) ۱۷؛ ج) $۲\sqrt{۵}$؛ د) $\sqrt{۱۳}$؛ ه) ۴؛ و) $۲\sqrt{۱۰}$.

۵. محیط مثلثهایی را که رأسهای آنها داده شده است تعیین کنید:

الف) (۵، ۲−)، (۳، ۴)، (۲−، ۷)؛

ب) (۴، ۰)، (۱، ۴−)، (۳−، ۳)؛

ج) (۵−، ۲)، (۴، ۳−)، (۳−، ۰)؛

د) (۲−، ۱−)، (۲، ۴)، (۵، ۳−).

جواب: الف) ۲۳٫۵۶؛ ب) ۲۰٫۶۷؛ ج) ۲۰٫۷۴؛ د) ۲۱٫۳۰.

۶. نشان دهید مثلثهایی که رأسهایشان در زیر داده شده است، متساوی‌الساقین هستند.

الف) (۲−، ۲)، (۱−، ۳−)، (۶، ۱)؛

ب) (۲، ۲−)، (۶، ۶)، (۲−، ۲)؛

ج) (۴، ۲)، (۱، ۵)، (۵، ۶)؛

د) (۶, ۷)، (۱−, ۸−)، (۷−, ۲−).

۷. ثابت کنید مثلثهایی که رأسهای آنها در زیر داده شده است، قائم‌الزاویه هستند. مساحت هر یک از مثلثها را به‌دست آورید.

الف) (۹، ۰)، (۱−، ۴−)، (۲، ۳)؛ ب) (۵، ۱۰)، (۲، ۳)، (۵−، ۶)؛

ج) (۲−، ۳)، (۳، ۲−)، (۴، ۰)؛ د) (۸، ۲−)، (۱، ۶−)، (۴، ۰).

جواب: الف) ۲۹؛ ب) ۲۹؛ ج) ۵٫۷؛ د) ۱۵ واحد سطح.

۸. ثابت کنید که نقاط زیر رأسهای یك متوازی‌الاضلاع هستند.

الف) (۱−، ۴−)، (۲، ۳−)، (۱، ۰)، (۲−، ۱−)؛

ب) (۱−، ۲−)، (۵، ۱)، (۱، ۲)، (۵−، ۱−)؛

ج) (۸، ۴)، (۶، ۸)، (۲، ۶)، (۴، ۲).

۹. مختصات نقطه‌ای را که از نقاط زیر به یك فاصله باشد به‌دست آورید.

الف) (۲−، ۸)، (۲، ۶)، (۳، ۳)؛

ب) (۸−، ۳−)، (۷، ۲)، (۳، ۴)؛

ج) $(2, 5)$، $(-1, 4)$، $(3, 2)$.

جواب: الف) $(-2, 3)$؛ ب) $(1, -5)$؛ ج) $(1, 3)$.

۱۰. با استفاده از روش تعیین فاصله نشان دهید که نقاط زیر بر خطی راست واقعند.

الف) $(4, 0)$، $(-2, 3)$، $(8, -2)$؛

ب) $(3, -2)$، $(1, -6)$، $(-1, -10)$؛

ج) $(2, 1)$، $(10, -3)$، $(-4, 4)$؛

د) $(3, 1)$، $(-3, -2)$، $(7, 3)$.

۱۱. ثابت کنید در هر مستطیل مجموع مربعات فواصل هر نقطهٔ دلخواه $P(x, y)$ از دو رأس مقابل، برابراست با مجموع مربعات فواصل آن از دو رأس دیگر. برای اثبات رأسهای مستطیل را نقطه‌های $(0, 0)$، $(0, b)$، (a, b) و $(a, 0)$ اختیار کنید.

۱۲. نقطه‌ای بـه طول ۳ را در صفحهٔ مختصات چنان تعیین کنید کـه فاصلهٔ آن از نقطهٔ $(-3, 6)$، ۱۰ واحد باشد.

جواب: $(3, 14)$، $(3, -2)$.

۱۳. مختصات نقطهٔ $P(x, y)$ را چنـان تعیین کنید کـه پـاره‌خط از $P_1(x_1, y_1)$ تـا $P_2(x_2, y_2)$ را به‌نسبت $\frac{P_1P}{PP_2} = r$ تقسیم کند.

الف) $P_1(-3, 4)$، $P_2(4, 1)$، $r = \frac{2}{1}$؛

ب) $P_1(3, 5)$، $P_2(-3, -3)$، $r = \frac{1}{3}$؛

ج) $P_1(3, -2)$، $P_2(-2, 3)$، $r = \frac{2}{5}$؛

د) $P_1(3, 0)$، $P_2(4, 7)$، $r = -\frac{2}{7}$؛

ه) $P_1(2, -5)$، $P_2(4, 1)$، $r = -\frac{5}{3}$؛

و) $P_1(-5, 2)$، $P_2(3, 6)$، $r = \frac{3}{4}$.

جواب: الف) $\left(\frac{5}{3}, 2\right)$؛ ب) $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$؛ ج) $\left(\frac{11}{7}, -\frac{4}{7}\right)$؛ د) $\left(\frac{13}{5}, -\frac{14}{5}\right)$؛

ه) $(10, 7)$؛ و) $\left(\frac{26}{7}, -\frac{11}{7}\right)$.

۱۴. مطلوب است تعیین مختصات مرکز ثقل هریك ازمثلثهایی که رأسهای آنها عبارتند از:

الف) $(5, 7)$، $(1, -3)$، $(-5, 1)$؛

ب) $(2, -1)$، $(6, 7)$، $(-4, -3)$؛

ج) $(3, 6)$، $(-5, 2)$، $(7, -6)$؛

د) $(7, 4)$، $(3, -6)$، $(-5, 2)$؛

ه) $(-3, 1)$، $(2, 4)$، $(6, -2)$.

جواب: الف) $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$؛ ب) $\left(\frac{4}{3}, 1\right)$؛ ج) $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$؛ د) $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$؛ ه) $\left(\frac{5}{3}, 1\right)$.

۱۵. هرگاه نقطهٔ $(9, 2)$ پاره‌خط از $P_1(6, 8)$ تا $P_2(x_2, y_2)$ را به‌نسبت $r = \frac{3}{7}$ تقسیم کند، مختصات P_2 را به‌دست آورید.

جواب: $(16, -12)$.

۱۶. هرگاه مختصات وسطهای‌ضلعهای مثلثی نقاط $(-2, 1)$، $(5, 2)$ و $(2, -3)$ باشند، مختصات رأسهای مثلث را مشخص کنید.

جواب: $(1, 6)$، $(9, -2)$، $(-5, -4)$.

۱۷. اگر مختصات وسطهای ضلعهای مثلثی نقاط $(3, 2)$، $(-1, -2)$ و $(5, -4)$ باشند، مختصات رأسهای مثلث را به‌دست آورید.

جواب: $(-3, 4)$، $(9, 0)$، $(1, -8)$.

۱۸. از طریق تحلیلی ثابت کنید خطوطی که وسطهای ضلعهای چهار ضلعی $A(-3, 2)$، $B(5, 4)$، $C(7, -6)$، $D(-5, -4)$ را بـه‌هم وصل می‌کند چهارضلعی‌دیگری می‌سازد که محیط آن مجموع قطرهای چهارضلعی اولی است.

۱۹. نشان دهید خطی کـه وسطهای دو ضلع هر یك از مثلثهای مسئلهٔ ۱۴ را بـه‌هم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم آن مثلث و به‌اندازهٔ نصف آن است.

۲۰. چهارضلعی $A(-2, 6)$، $B(4, 4)$، $C(6, -6)$، $D(2, -8)$ مفروض‌است.

الف) نشان دهید پاره‌خطی کـه وسطهای AD و BC را بـه‌هم متصل می‌کند منصف پاره‌خطی است که وسطهای AB و CD را به‌هم وصل می‌کند.

ب) ثابت کنید پاره‌خطهایی که وسطهای اضلاع مجاور چهارضلعی را بـه هم متصل

می‌کنند یك متوازی‌الاضلاع به‌وجود می‌آورند.

۲۱. پاره‌خط محدود به‌دو نقطهٔ $A(-۱, -۲)$ و $B(۳, ۳)$ را تا نقطهٔ C امتداد می‌دهیم. هرگاه $BC = ۳AB$ باشد، مختصات نقطهٔ C را پیدا کنید.

جواب: $(۱۵, ۱۸)$.

۲۲. نشان دهید وسط وتر هر مثلث قائم‌الزاویه تا رأسهای آن به‌یك فاصله است.

راهنمایی: رأس زاویهٔ قائمهٔ مثلث را نقطهٔ $(۰, ۰)$ و رأسهای دیگر آن‌را $(a, ۰)$ و $(۰, b)$ اختیار کنید.

۲۳. درهریك ازمثلثهای متساوی‌الساقین مسئلهٔ ۶، نشان دهید که دومیانهٔ مثلث‌هم‌اندازه‌اند.

۲۴. مطلوب است تعیین ضریب زاویهٔ خطوطی که از جفت نقاط زیر می‌گذرند:

الف) $(۳, ۴)$، $(۱, -۲)$؛ ب) $(-۵, ۳)$، $(۲, -۳)$؛

ج) $(۶, ۰)$، $(۶, \sqrt{۳})$؛ د) $(۱, ۳)$، $(۷, ۱)$؛

ه) $(۲, ۴)$، $(-۲, ۴)$؛ و) $(۳, -۲)$، $(۳, ۵)$.

جواب: الف) ۳؛ ب) $-\frac{۶}{۷}$؛ ج) ∞؛ د) $-\frac{۱}{۳}$؛ ه) ۰؛ و) ∞.

۲۵. زاویهٔ میل خطوطی را که از زوج نقاط زیر می‌گذرند به‌دست آورید:

الف) $(۴, ۶)$ و $(۱, ۳)$؛ ب) $(۲, \sqrt{۳})$ و $(۱, ۰)$؛

ج) $(۲, ۳)$ و $(۱, ۴)$؛ د) $(۳, -۲)$ و $(۳, ۵)$؛

ه) $(\sqrt{۳}, ۲)$ و $(۰, ۱)$؛ و) $(۲, ۴)$ و $(-۲, ۴)$.

جواب: الف) $\theta = \tan^{-۱} ۱ = ۴۵^\circ$؛ ب) $\theta = \tan^{-۱}\sqrt{۳} = ۶۰^\circ$؛

ج) $\theta = \tan^{-۱} -۱ = ۱۳۵^\circ$؛ د) $\theta = \tan^{-۱}\infty = ۹۰^\circ$؛

ه) $\theta = \tan^{-۱}\frac{۱}{\sqrt{۳}} = ۳۰^\circ$؛ و) $\theta = \tan^{-۱} ۰ = ۰^\circ$.

۲۶. کدامیك از مجموعه نقاط زیر بر روی خطی راست قرار دارند؟ روش تعیین‌ضریب زاویه را به‌کار گیرید.

الف) $(۲, ۳)$، $(-۴, ۷)$ و $(۵, ۸)$؛

ب) $(۴, ۱)$، $(۵, -۲)$ و $(۶, -۵)$؛

ج) $(-۱, -۴)$، $(۲, ۵)$ و $(۷, -۲)$؛

د) $(۰, ۵)$، $(۵, ۰)$ و $(۶, -۱)$؛

ه) $(a, ۰)$، $(۲a, -b)$ و $(-a, ۲b)$؛

و) $(-۲, ۱)$، $(۳, ۲)$ و $(۶, ۳)$.

جواب: الف) نیست؛ ب) هست؛ ج) نیست؛ د) هست؛ ه) هست؛ و) نیست.

۲۷. ثابت کنید نقطهٔ $(۱ ، -۲)$ روی خطی قرار دارد که نقاط $(-۵, ۱)$ و $(۷, -۵)$ را به‌هم متصل می‌کند و همچنین نشان دهید که از آن دو نقطه به‌یك فاصله است.

۲۸. با استفاده از روش تعیین ضریب زاویه نشان دهید که مجموعهٔ نقاط زیر رأسهای یك مثلث قائم‌الزاویه هستند.

الف) $(۶, ۵)$، $(۱, ۳)$ و $(۵, -۷)$؛ ب) $(۳, ۲)$، $(۵, -۴)$ و $(۱, -۲)$؛

ج) $(۲, ۴)$، $(۴, ۸)$ و $(۶, ۲)$؛ د) $(۳, ۴)$، $(-۲, -۱)$ و $(۴ ، ۱)$.

۲۹. مطلوب است تعیین زاویه‌های داخلی مثلثی که رأسهایش عبارتند از:

الف) $(۳, ۲)$، $(۵, -۴)$ و $(۱, -۲)$.

جواب: ۴۵°، ۴۵°، ۹۰°.

ب) $(۴, ۲)$، $(۰, ۱)$ و $(۶, -۱)$.

جواب: ۱۰۹°۳۹ر۲′، ۳۲°۲۸ر۳′، ۳۷°۵۲ر۵′.

ج) $(-۳, -۱)$، $(۴, ۴)$ و $(-۲, ۳)$.

جواب: ۱۱۳°۲۹ر۹′، ۴۰°۲۵ر۶′، ۲۶°۴ر۵′.

۳۰. با تعیین زاویه‌های داخلی نشان دهید کـــه مثلثهای زیر متساوی‌الساقین هستند. با پیدا کردن طولهای اضلاع مثلث نتیجه را تحقیق کنید.

الف) $(۲, ۴)$، $(۵, ۱)$ و $(۶, ۵)$.

جواب: ۵۹°۲ر۲′، ۶۱°۵۵ر۶′، ۵۹°۲ر۲′.

ب) $(۸, ۲)$، $(۳, ۸)$ و $(-۲, ۲)$.

جواب: ۵۰°۱۱ر۷′، ۷۹°۳۶ر۶′، ۵۰°۱۱ر۷′.

ج) $(۳, ۲)$، $(۵, -۴)$ و $(۱, -۲)$.

جواب: ۴۵°، ۴۵°، ۹۰°.

د) $(۱, ۵)$، $(۵, -۱)$ و $(۹, ۶)$.

جواب: ۶۳°۲۶′، ۶۳°۲۶′، ۵۳°۸′.

۳۱. ضریب زاویهٔ خطی که از نقطهٔ $A(۳, ۲)$ می‌گذرد برابر $\frac{۳}{۴}$ است. دو نقطه روی این خط چنان تعیین کنید که به‌فاصلهٔ ۵ واحد از A باشند.

جواب: $(-۱, -۱)$، $(۷, ۵)$.

۳۲. خطی که از $(-۴,۵)$ و $(۳,y)$ می‌گذرد و با خط رسم شده از نقطه‌های $(-۲,۴)$ و $(۹,۱)$ زاویهٔ ۱۳۵° می‌سازد. مقدار y را به‌دست‌آورید.

جواب: $y=۹$.

۳۳. خط $L_۲$ با خط $L_۱$ زاویهٔ ۶۰° می‌سازد. هرگاه ضریب زاویهٔ $L_۱$ برابر یك باشد، ضریب زاویهٔ $L_۲$ را حساب کنید.

جواب: $-(۲+\sqrt{۳})$.

۳۴. مطلوب است محاسبهٔ ضریب زاویهٔ خطی‌که با خط رسم شده از $(۲,-۱)$ و $(۵,۳)$ زاویهٔ ۴۵° می‌سازد.

جواب: $m_۲=-۷$ و $m_۲=\frac{۱}{۷}$.

۳۵. معادلهٔ خطی را به‌دست‌آورید که ازنقطهٔ $(۲,۵)$ بگذرد و با خط $x-۳y+۶=۰$ زاویهٔ ۴۵° بسازد.

جواب: $۲x-y+۱=۰$ و $x+۲y-۱۲=۰$.

۳۶. مطلوب است تعیین مساحت مثلثهایی‌که رأسهای آنها عبارتند از:

الف) $(۲,-۳)$، $(۴,۲)$ و $(-۵,-۲)$.

جواب: ۱۸٫۵ واحد سطح

ب) $(-۳,۴)$، $(۶,۲)$ و $(۴,-۳)$.

جواب: ۲۴٫۵

ج) $(-۸,-۲)$، $(-۴,-۶)$ و $(-۱,۵)$.

جواب: ۲۸

د) $(۰,۴)$، $(-۸,۰)$ و $(-۱,-۴)$.

جواب: ۳۰

ه) $(\sqrt{۲},۲)$، $(-۴,۶)$ و $(۴,-۲\sqrt{۲})$.

جواب: $۷\sqrt{۲}-۲=۷٫۸۹۹$

و) $(-۷,۵)$، $(۱,۱)$ و $(-۳,۳)$.

جواب: صفر. دربارهٔ جواب توضیح دهید.

ز) $(a,b+c)$، $(b,c+a)$ و $(c,a+b)$.

جواب: ۰

۳۷. مطلوب است تعیین مساحت چندضلعیی‌که رأسهای آن عبارتند از:

الف) $(2, 5)$، $(7, 1)$، $(3, -4)$ و $(-2, 3)$.

جواب: ۳۹ر۵ واحد سطح

ب) $(0, 4)$، $(1, -6)$، $(-2, -3)$ و $(-4, 2)$.

جواب: ۲۵ر۵

ج) $(1, 5)$، $(-2, 4)$، $(-3, -1)$، $(2, -3)$ و $(5, 1)$.

جواب: ۴۰

۳۸. نشان دهید خطهایی‌که وسطهای ضلعهای هر یك از مثلثهای مسئلهٔ ۳۶ را به هم متصل می‌کنند، مثلث اصلی را به‌چهار مثلث تقسیم می‌کنندکه مساحتهای آنها با هم مساویند.

۲

معادله و مکان هندسی

دو مسئلهٔ اساسی هندسهٔ تحلیلی. این دومسئله به‌قرار زیرند:

۱. معادله‌ای مفروض است، باید مکان هندسی نظیر آن را بیابیم.

۲. مکان هندسیی‌که مطابق با چند شرط هندسی تعریف شده، داده شده است. باید معادلهٔ متناظر با آن را به‌دست آوریم.

مکان هندسی یا نمودار. مکان هندسی یا نمودار معادلهٔ دومتغیره، منحنی یا خط راستی است‌که شامل تمام نقطه‌هایی باشدکه مختصات آن در معادله صدق می‌کنند؛ و تنها شامل همین نقطه‌ها باشد.

قبل ازآنکه نمودار یك معادله را رسم کنیم، اغلب بسیارمفید است‌که ازروی‌ظاهر معادله چندخاصیت منحنی را تعیین‌کنیم. چنین خواصی عبارتند از: نقطه‌های تقاطع با محورهای مختصات، تقارن و دامنهٔ تغییرات.

تقاطع با محورها. تقاطع یك منحنی با محورهای مختصات فاصلهٔ جهت‌داری (مثبت یا منفی) از مبدأ مختصات تا نقاطی است‌که منحنی محورهای مختصات را قطع می‌کند.

برای تعیین محل برخورد منحنی با محور xها، $y=0$ را درمعادله منظور می‌کنیم ومعادله را برای تعیین x حل می‌کنیم. به‌همین‌ترتیب برای به‌دست‌آوردن محل برخورد

منحنی با محور yها فرض می‌کنیم $x=0$ باشد و آن را درمعادله قرار می‌دهیم ومعادله‌را نسبت به y حل می‌کنیم.

بدین‌ترتیب در معادلهٔ $y^2+2x=16$، هنگامی که $y=0$ باشد، $x=8$ است. وقتی $x=0$ باشد، $y=\pm 4$ است. ازاین‌رو محل برخورد منحنی با محور xها برابر ۸ و عرض از مبدأ آن برابر است با ± 4.

تقارن. دونقطه نسبت به‌یك خط درصورتی متقارنند که آن خط عمود منصف خطی باشد که دونقطه را به‌هم متصل می‌کند. دونقطه را نسبت به‌یك نقطهٔ دیگر درصورتی متقارن گوییم که آن‌نقطه، وسط‌خطی باشد که دونقطهٔ مزبور را به‌هم وصل می‌کند. نتایج زیر را داریم:

۱. اگر دریك معادله x را به $-x$ تبدیل‌کنیم ومعادله تغییری نکند، نمودارمعادله نسبت به‌محور yها متقارن است. به‌ازای هرمقدار y درچنین معادله‌ای، دو مقدار عددی مساوی با علامتهای مختلف برای x پیدا می‌شود.

مثال: $x^2-6y+12=0$ یا $x=\pm\sqrt{6y-12}$

۲. اگر درمعادله‌ای y را به $-y$ تبدیل‌کنیم و معادله تغییری نکند، نمودار آن نسبت به‌محور xها متقارن است. در چنین معادله‌ای به‌ازای هرمقدار x دو مقدار عددی مساوی با علامتهای مختلف برای y به‌دست می‌آید.

مثال: $y^2-4x-7=0$ یا $y=\pm\sqrt{4x+7}$

۳. اگرمعادله‌ای با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$ تغییری نکند، نمودار آن نسبت به‌مبدأ مختصات متقارن است.

مثال: $x^3+x+y^3=0$

دامنهٔ تغییرات. اگر مقادیر خاصی ازیك متغیر سبب شودکه متغیر دیگرموهومی شود، این مقادیررا باید ازمنحنی خارج‌کنیم.

معادلهٔ $y^2=2x-3$ یا $y=\pm\sqrt{2x-3}$ را درنظر بگیرید. اگر x کوچکتر از ۱٫۵ باشد، آنگاه $2x-3$ عددی منفی و y موهومی می‌شود. بنابراین هیچ مقداری از x، کوچکتر از ۱٫۵ برای رسم نمی‌تواند مورد استفاده قرارگیرد ومنحنی تماماً درطرف راست خط $x=1{,}5$ واقع می‌شود.

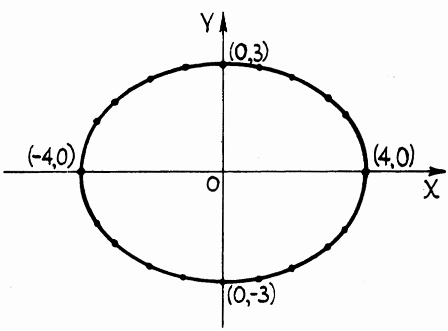
اگر معادله را نسبت به x حل کنیم، داریم $x=\frac{۱}{۲}(y^۲+۳)$. چون هرمقدار y یك عدد حقیقی برای x به‌دست‌می‌دهد،بنا بر این هیچ مقداری از x مستثنی نیست ومکان‌هندسی تا بی‌نهایت امتداد دارد یعنی با افزایش x از ۱٫۵ $=x$، y نیز افزایش می‌یابد.

مسئله‌های حل شده

مکان هندسی معادله‌ای مفروض

۰۱ مکان هندسی بیضی $۹x^۲+۱۶y^۲=۱۴۴$ راموردِ بحث و بررسی قرار دهید و نمودار آن را رسم کنید.

تقاطع بـا محورهـای مختصات. وقتی‌کـه $y=۰$، $x=\pm۴$. هرگـاه $x=۰$، $y=\pm۳$. ازاین‌رومحل برخورد منحنی با محور xها نقطه‌هایی به‌طول ±۴ است و محل برخورد منحنی با محور yها نقطه‌هایی به‌عرض ±۳ است.



تقارن. چون معادله تنها شامل توان زوج x و y است، منحنی نسبت به‌هردو محور مختصات متقارن است یا به‌عبارت دیگرمنحنی نسبت به‌مبدأ مختصات متقارن است.ازاین‌رو کافی است‌که تنها آن قسمت ازمنحنی راکه درناحیهٔ اول قراردارد رسم‌کنیم وبقیهٔ منحنی را با توجه به‌خاصیت تقارنی آن مشخص سازیم.

دامنهٔ تغییرات. اگر معادله را برحسب x و y حل‌کنیم داریم:

$$x=\pm\frac{۴}{۳}\sqrt{۹-y^۲}\ ,\quad y=\pm\frac{۳}{۴}\sqrt{۱۶-x^۲}$$

اگر مقدارعـددی x بزرگتر از ۴ باشد، $۱۶-x^۲$ منفی و y موهومی می‌شود، از ایـن‌رو x نمی‌تواند مقادیـر بزرگتر از ۴ یاکـوچکتر از -۴ را دارا باشد، یـا $-۴\leqslant x\leqslant ۴$. به همین‌ترتیب y نمی‌تواند هیچ مقـدار بزرگتر از ۳ یاکوچکتر از

۳− را اختیار کند یا $-3 \leqslant y \leqslant 3$.

x	0	± 1	± 2	± 3	± 3.5	± 4
y	± 3	± 2.9	± 2.6	± 2.0	± 1.5	0

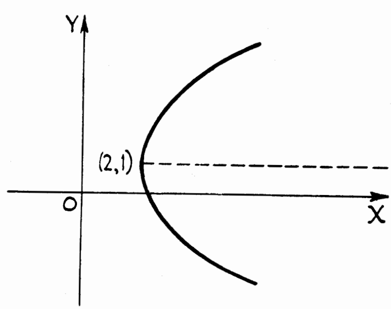
۲. سهمی $y^2-2y-4x+9=0$ را مورد بحث وبررسی قرار دهید و نمودار آن‌را رسم کنید.

برای تعیین y، معادله را با استفاده از دستور معادلهٔ درجه دوم حل می‌کنیم:

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

که در آن $a=1$، $b=-2$ و $c=-4x+9$. پس:

$$y=1\pm 2\sqrt{x-2} \qquad (1)$$



حال معادله را برای تعیین x حل می‌کنیم،

$$x=\frac{y^2-2y+9}{4} \qquad (2)$$

تقاطع با محورهای مختصات. اگر $y=0$ را در معادله قرار دهیم $x=\frac{9}{4}$ به‌دست می‌آید. به‌ازای $x=0$، y عدد مختلط $(1\pm 2\sqrt{-2})$ است، از این‌رومحل برخورد منحنی با محور xها در $\frac{9}{4}$ است وعرض از مبدأ وجود ندارد.

تقارن. منحنی نسبت به هیچیك از محورهـای مختصات یا مبـدأ مختصات متقارن نیست. ولی نسبت به‌خط $y=1$ متقارن است، چون به‌ازای هرمقدار x دومقدار برای y به‌دست می‌آید که یکی از مقادیر به‌همان اندازه‌که بزرگتر از یـك می‌باشد دیگری به‌همان اندازه‌کوچکتر از واحد است.

دامنهٔ تغییرات. از رابطهٔ (۱): درصورتی‌که x کوچکتر از ۲ باشد، $x-2$ منفی و y موهومی می‌شود. از این‌رو x نمی‌تواند مقادیرکوچکتر از ۲ را اختیارکند.

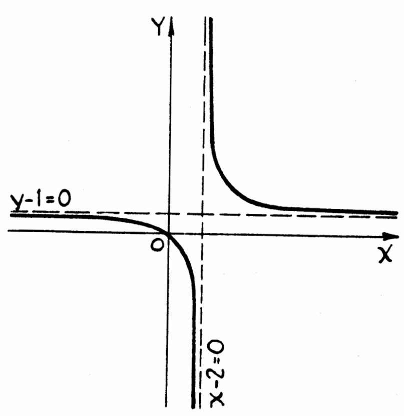
از رابطهٔ (۲): چـون هرمقدار y یـك عدد حقیقی x را به‌دست می‌دهد، بنابراین هیچ مقداری از y مستثنی نیست.

x	۲	$\frac{۹}{۴}$	۳	۴	۵	۶
y	۱	۰, ۲	۳, −۱	۳٫۸, −۱٫۸	۴٫۵, −۲٫۵	۵, −۳

۳. هذلولی $xy-2y-x=0$ را مورد بحث و بررسی قرار دهید ونمودارآن‌را رسم کنید.

تقاطع بـا محورهای مختصات. بـه‌ازای $x=0$، $y=0$ می‌شود. اگـر $y=0$ را در معادله منظورکنیم، $x=0$ به‌دست می آید.

تقارن. منحنی نسبت به‌محورهـای مختصات و نسبت به‌مبدأ مختصات متقارن نیست.



دامنهٔ تغییرات. معادله را نسبت به y حل می‌کنیم، $y=\dfrac{x}{x-2}$. اگر $x=2$ باشد مخرج کسر، $x-2$، صفر و y بی‌نهایت‌می‌شود.

معادله را برای تعیین x حل می‌کنیم، $x=\dfrac{2y}{y-1}$. اگر $y=1$ باشد مخرج کسر، $y-1$، صفر و x بی‌نهایت می‌شود.

هیچ مقدار از هردو متغیر، دیگری را موهومی نخواهدکرد.

x	۰	۱	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	۲	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	۳	۴	۵	-1	-2	-3	-4
y	۰	-1	-3	-7	∞	۹	۵	۳	۲	۱ر۷	۰ر۳	۰ر۵	۰ر۶	۰ر۷

وقتی x از چپ به‌سمت ۲ میل کند، y منفی بی‌نهایت می‌شود. وقتی x از راست به‌سمت ۲ میل کند، y بدون‌اینکه حدی داشته باشد، صعود می‌کند. دو شاخهٔ منحنی به‌طور نامحدودی به‌خط $x=2$ نزدیك می‌شوند تا آنجاکه بر خط در $\pm\infty$ مماس می‌شوند. خط $x-2=0$ مجانب قائم منحنی نامیده می‌شود.

اکنون درصورتی‌که x بی‌نهایت شود چه روی می‌دهد؟ معادلهٔ

$$y=\frac{x}{x-2}=\frac{1}{1-\frac{2}{x}}$$

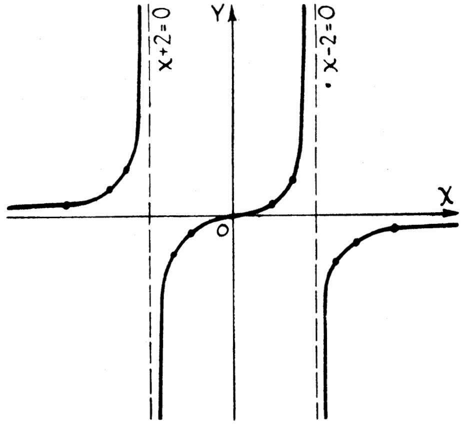
را درنظر بگیرید. وقتی x، $\pm\infty$ شود، $\frac{2}{x}$ به سمت صفر و y به‌سمت ۱ میل می‌کند. خط $y-1=0$ مجانب افقی منحنی می‌باشد.

۴. معادلهٔ $x^2y-4y+x=0$ راموردبحث‌وبررسی‌قراردهید ونمودارآن‌را رسم‌کنید.

تقاطع با محورهای مختصات. وقتی $x=0$، $y=0$ و بـه ازای $y=0$، $x=0$ می‌شود.

تقارن. اگر $-x$ را به‌جای x و $-y$ را به‌جـای y درمعادله بنویسیم، معادلـه به‌صورت $-x^2y+4y-x=0$ تبدیل می‌شودکـه اگرطرفین تساوی را در -1 ضرب‌کنیم معادله به‌صورت اولیهٔ‌آن درمی‌آید. ازاین‌رو منحنی نسبت به‌مبدأ مختصات متقارن است. منحنی نسبت به‌هیچیك از محورها متقارن نیست.

x	y
۴−	۰٫۳
۳−	۰٫۶
۲٫۵−	۱٫۱
۲−	∞
۱٫۵−	۰٫۹−
۱−	۰٫۳−
۰	۰
۱	۰٫۳
۱٫۵	۰٫۹
۲	∞
۲٫۵	۱٫۱−
۳	۰٫۶−
۴	۰٫۳−



دامنهٔ تغییرات. معادله را نسبت به y حل می‌کنیم:

$$y=\frac{x}{۴-x^{۲}}=\frac{x}{(۲-x)(۲+x)}$$

مجانبهای قائم عبارتند از $x-۲=۰$ و $x+۲=۰$.

معادله را به‌کمك دستور معادلهٔ درجه دوم نسبت به x حل می‌کنیم:

$$x=\frac{-۱\pm\sqrt{۱+۱۶y^{۲}}}{۲y}$$

مجانب افقی خط $y=۰$ است.

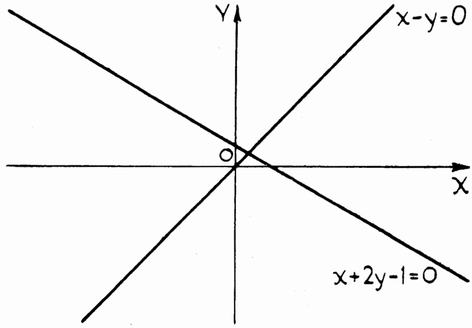
هیچ مقداری از دو متغیر، متغیر دیگررا موهومی نمی‌کند.

۵. مکان هندسی $x^{۲}-x+xy+y-۲y^{۲}=۰$ را رسم کنید.

در بعضی مواقع معادله‌ای قابل تجزیه به عوامل است. درچنین حالتی مکان هندسی معادله، شامل مکانهای هندسی چندعامل ضرب تجزیه شده خواهد بود.

چون‌معادله به‌عوامل $(x-y)(x+۲y-۱)=۰$ تجزیه‌می‌شود، مکان هندسی‌آن دوخط متقاطع به‌معادلات زیر است:

$$x-y=۰ \quad و \quad x+۲y-۱=۰$$



۶. نقاط حقیقی بر روی معادلات زیررا، اگروجود داشته باشند تعیین کنید.

الف) $(x+۴)^۲+(y-۲)^۲=-۵$؛

ب) $x^۲+y^۲=۰$؛

ج) $x^۲+y^۲-۸x+۲y+۱۷=۰$؛

د) $x^۲+۲y^۲-۶x+۱۱=۰$؛

ه) $(x^۲-۴y^۲)^۲+(x+۳y-۱۰)^۲=۰$؛

و) $x^۲+(۲i-۱)x-(۶i+۵)y-۱=۰$.

الف) چون مربع هرعدد حقیقی، عددی مثبت است بنابراین هریك از دو عبارت $(x+۴)^۲$ و $(y-۲)^۲$ مثبت هستند و به ازای هیچیك از مقادیر حقیقی x و y معادله نمی‌تواند برقرار باشد.

ب) بدیهی است که تنها نقطهٔ حقیقی که در معادله صدق می‌کند $(۰,۰)$ است.

ج) معادله را به صورت $(x^۲-۸x+۱۶)+(y^۲+۲y+۱)=۰$ یا $(x-۴)^۲+(y+۱)^۲=۰$ مرتب می‌کنیم. آنگاه $x-۴=۰$ و $y+۱=۰$، یا $x=۴$، $y=-۱$. ازاین‌رو تنها نقطهٔ حقیقی که روی نمودار این معادله قرار دارد نقطهٔ $(۴,-۱)$ است.

د) معادله را به‌صورت

$$x^۲-۶x+۹+۲y^۲+۲=۰ \quad \text{یا} \quad (x-۳)^۲+۲y^۲+۲=۰$$

مرتب‌می‌کنیم. چون هریك ازعبارتهای $(x-۳)^۲$، $۲y^۲$ و ۲ به‌ازای تمام مقادیرحقیقی x و y مثبت هستند، معادلهٔ مفروض نمی‌تواند به‌ازای مقادیرحقیقی x و y صادق باشد.

ه) معادله به‌ازای مقادیری از x و y که همزمان در $x^۲-۴y^۲=۰$ و $x+۳y-۱۰=۰$ صادق باشد، برقرار است. با حل این دو معادله نسبت به x و y نقطه‌های $(۴,۲)$ و $(-۲۰,۱۰)$ به‌دست می‌آید که تنها نقاط حقیقی روی مکان‌هندسی

معادله هستند.

و) قسمتهای حقیقی وموهومی را دسته‌بندی می‌کنیم،

$$(x^۲-x-۵y-۱)+۲i(x-۳y)=۰$$

این معادله به ازای مقادیری از x و y که همزمان در $x^۲-x-۵y-۱=۰$ و $x-۳y=۰$ صادق باشد، برقرار است. اگر این دستگاه را حل کنیم، برای x و y نقطه‌های $(۳,۱)$ و $\left(-\frac{۱}{۳},-\frac{۱}{۹}\right)$ به‌دست می‌آید که تنها نقاط حقیقی روی مکان هندسی معادله هستند.

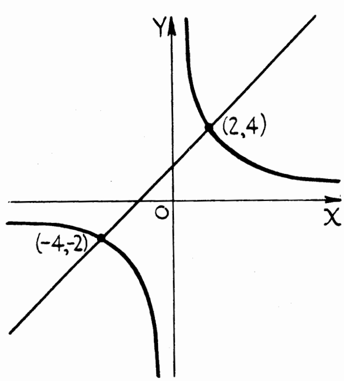
۰۷ دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیررا از طریق رسم نمودار حل کنید، سپس نتیجه را با حل جبری آن تحقیق کنید.

$$xy=۸ \qquad (۱)$$

$$x-y+۲=۰ \qquad (۲)$$

معادلهٔ (۱)را نسبت به y حل‌می‌کنیم، $y=\frac{۸}{x}$. به‌ازای $x=۰$، y بی‌نهایت‌می‌شود.

معادلهٔ(۱) را نسبت به x حل‌می‌کنیم، $x=\frac{۸}{y}$. به‌ازای $y=۰$، x بی‌نهایت می‌شود، درنتیجه $y=۰$ مجانب افقی و $x=۰$ مجانب قائم است.



x	۰	۱	۲	۳	۴	-۱	-۲	-۳	-۴
y	∞	۸	۴	$\frac{۸}{۳}$	۲	-۸	-۴	$\frac{-۸}{۳}$	-۲

معادلهٔ (۲) خط راستی را نشان می‌دهد که نقطهٔ تقاطع آن با محورهای مختصات $(-2, 0)$ و $(0, 2)$ است. از روی نمودار جوابهای $(-4, -2)$ و $(2, 4)$ قرائت می‌شود.

حل جبری. از معادلهٔ (۲) داریم، $y=x+2$. این عبارت را درمعادلهٔ (۱) منظور می‌کنیم، $x(x+2)=8$، یا $x^2+2x-8=0$. با تجزیهٔ آن به‌عوامل، $(x+4)(x-2)=0$. بنابراین $x=-4$ و $x=2$. چون $y=x+2$، وقتی $x=-4$، $y=-2$ است؛ و وقتی $x=2$، $y=4$ است.

۸. دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی زیر را از طریق نمودار حل کنید وسپس نتیجه را از طریق تحلیلی امتحان کنید.

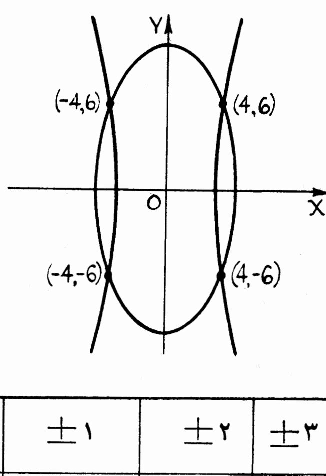
$$4x^2+y^2=100 \qquad (1)$$

$$9x^2-y^2=108 \qquad (2)$$

هریک از منحنیها نسبت به‌هریک از دومحور مختصات ومبدأ متقارن است.

معادلهٔ (۱) را نسبت به y حل می‌کنیم، $y=\pm\sqrt{100-4x^2}$. بنابراین x نمی‌تواند هرمقدار بزرگتر از ۵ یاکوچکتر از ۵− را دارا باشد.

معادلهٔ (۱) را نسبت به x حل می‌کنیم، $x=\frac{1}{2}\sqrt{100-y^2}$. بنابراین y نمی‌تواند مقادیر بزرگتر از ۱۰ یاکوچکتر از ۱۰− را دارا باشد.



x	۰	±۱	±۲	±۳	±۴	±۵
y	±۱۰	±۹٫۸	±۹٫۲	±۸	±۶	۰

معادلهٔ (۲) رانسبت به y حل می‌کنیم، $y=\pm ۳\sqrt{x^۲-۱۲}$. ازاین‌رو x نمی‌تواند هیچ مقدار بین $\sqrt{۱۲}$ و $-\sqrt{۱۲}$ را اختیار کند.

معادلهٔ (۲) را نسبت به x حل می‌کنیم، $x=\pm\frac{۱}{۳}\sqrt{y^۲+۱۰۸}$. از این‌رو y می‌تواند هرمقداری را اختیار کند.

x	$\pm\sqrt{۱۲}$	± ۴	± ۵	± ۶
y	۰	± ۶	$\pm ۱۰٫۸$	$\pm ۱۴٫۷$

از روی نمودار، جوابهای $(۴, \pm ۶)$؛ $(-۴, \pm ۶)$ قرائت می‌شود.

حل جبری.

$$۴x^۲+y^۲=۱۰۰$$

$$۹x^۲-y^۲=۱۰۸$$

$$۱۳x^۲=۲۰۸ \text{، } x^۲=۱۶ \text{ و } x=\pm ۴$$

$$y^۲=۹x^۲-۱۰۸=۱۴۴-۱۰۸=۳۶ \text{ و } y=\pm ۶$$

معادلهٔ یك مکان مفروض

۹. معادلهٔ خط راستی را بیابید که:

الف) ۵ واحد درسمت چپ محور عرضها واقع باشد.

ب) ۷ واحد بالای محور طولها باشد.

ج) ۱۰ واحد درسمت راست خط $x+۴=۰$ باشد.

د) ۵ واحد پایین خط $y=۲$ باشد.

ه) به موازات خط $y+۸=۰$ و به‌فاصلهٔ ۶ واحد از نقطهٔ $(۲, ۱)$ باشد.

و) عمود برخط $y-۲=۰$ و به‌فاصلهٔ ۴ واحد از نقطهٔ $(-۱, ۷)$ باشد.

الف) $x=-۵$ یا $x+۵=۰$. این‌معادلهٔ خطی‌است‌که موازی محورعرضهاست و به‌اندازهٔ ۵ واحد درسمت چپ محور yها قرار دارد.

ب) $y=۷$ یا $y-۷=۰$. این معادلهٔ خطی است که موازی محور طولها و به‌اندازهٔ ۷ واحد بالای محور xها قرار دارد.

ج) $x=-۴+۱۰$ یا $x=۶$. این معادلهٔ خطی است‌که به‌اندازهٔ ۱۰ واحد در

سمت راست خط $x+۴=۰$ است. خط به موازات محور yها بوده و به اندازهٔ ۶ واحد درسمت راست محور yهاست.

د) $y=۲-۵$ یا $y=-۳$. این معادلهٔ خطی است که به‌اندازهٔ ۵ واحد پایین‌خط $y-۲=۰$ است. خط به‌موازات محور xها بوده، به‌اندازهٔ ۳ واحد پایین‌محور xهاست.

ه) از آنجا که خط $y+۸=۰$ موازی محور xهاست، هرخط مطلوب نیز موازی محور xها و به‌اندازهٔ ۶ واحد بالا یا پایین خط $y=۱$ است. در نتیجه $y=۱\pm۶$، یا $y=۷$ و $y=-۵$.

و) چون خط $y-۲=۰$ موازی محور xهاست، هرخط مطلوب موازی محور yها و به‌اندازهٔ ۴ واحد در سمت راست یا چپ خط $x=-۱$ است. در نتیجه $x=-۱\pm۴$، یا $x=۳$ و $x=-۵$.

۱۰. مطلوب است تعیین معادلهٔ خطی که:

الف) موازی محور xها و به‌فاصلهٔ ۵ واحد از نقطهٔ $(۳, -۴)$ باشد.

ب) ازخطهای $x+۵=۰$ و $x-۲=۰$ به‌یك فاصله باشد.

ج) فاصلهٔ آن از خط $y-۹=۰$ سه برابر فاصله‌اش از $y+۲=۰$ باشد.

فرض می‌کنیم (x, y) مختصات هرنقطهٔ اختیاری روی‌خط مطلوب باشد.

الف) $y=-۴\pm۵$، یا $y=۱$ و $y=-۹$.

ب) $\frac{۵+x}{۲-x}=۱$ ، یا $x=\frac{-۵+۲}{۲}=-\frac{۳}{۲}$، یا $۲x+۳=۰$.

ج) $\frac{y+۲}{۹-y}=\pm\frac{۱}{۳}$. ساده می‌کنیم، $۴y-۳=۰$ و $۲y+۱۵=۰$.

برای خط $۴y-۳=۰$ که بین دوخط داده شده قراردارد، نسبت $+\frac{۱}{۳}$ است. برای خط $۲y+۱۵=۰$ که پایین دوخط داده شده قراردارد، نسبت $-\frac{۱}{۳}$ است.

۱۱. نقطهٔ $P(x, y)$ طوری حرکت می‌کند که همواره از نقطه‌های $A(-۲, ۳)$ و $B(۳, -۱)$ به‌یك فاصله است. معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ P را به‌دست آورید.

$PA=PB$، یا $\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۳)^۲}=\sqrt{(x-۳)^۲+(y+۱)^۲}$. طرفین را به‌توان دو رسانده ساده می‌کنیم. معادلهٔ $۱۰x-۸y+۳=۰$ حاصل می‌شود. این خط معادلهٔ عمود منصف پاره‌خطی است که دو نقطهٔ فوق را به‌هم وصل می‌کند.

۱۲. معادلهٔ خطی را به‌دست آورید که:

الف) دارای ضریب زاویهٔ $\frac{۲}{۳}$ باشد و از نقطهٔ $(-۴, ۵)$ بگذرد.

ب) از دونقطهٔ $(۳, -۱)$ و $(۰, ۶)$ بگذرد.

فرض می‌کنیم (x, y) مختصات هرنقطهٔ دلخواه روی خط موردنظر باشد.
ضریب زاویـهٔ خط گذرنده از نقطه‌هـای $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ برابر است بـا

$$\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

الف) ضریب زاویهٔ خطی که از اتصال نقطه‌های $(-۴, ۵)$ و (x, y) به‌وجـود می‌آید برابر است با $\frac{۲}{۳}$. پس $\frac{۲}{۳}=\frac{y-۵}{x+۴}$. پس از ساده‌کردن داریم:

$$۲x-۳y+۲۳=۰$$

ب) ضریب زاویهٔ خطی کـه از اتصال نقطه‌های $(۳, -۱)$ و $(۰, ۶)$ به‌وجود می‌آیـد برابر است بـا ضریب زاویهٔ خط گذرنده از نقطه‌های $(۰, ۶)$ و (x, y).
بنابراین $\frac{y-۶}{x-۰}=\frac{۶+۱}{۰-۳}$. پس از ساده‌کردن، $۷x+۳y-۱۸=۰$.

۱۳. معادلهٔ خطی را بیابید که:

الف) ازنقطهٔ $(۲, -۱)$ بگذرد و برخط مرسوم ازنقطه‌های $(۴, ۳)$ و $(-۲, ۵)$ عمود باشد.

ب) از نقطهٔ $(-۴, ۱)$ بگذرد و با خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۲,۳)$ و $(-۵, ۰)$ موازی باشد.

الف) اگـر دو خط عمود برهـم باشند، ضریب زاویهٔ یکی از خطوط عکس قرینهٔ ضریب زاویهٔ خط دیگر است.

ضریب‌زاویهٔ خط مرسوم از $(۴,۳)$ و $(-۲,۵)$ برابراست‌با $\frac{-۱}{۳}=\frac{۵-۳}{-۲-۴}$.

ضریب زاویهٔ خط موردنظر، عکس قرینهٔ $-\frac{۱}{۳}$ یعنی ۳ است.

فرض کنید (x, y) مختصات هرنقطهٔ دلخواه روی خط مطلوب باشد. ضریب زاویهٔ خط‌گذرنده از $(۲, -۱)$ و (x,y) برابر است با $۳=\frac{y+۱}{x-۲}$.

پس از ساده‌کردن داریم، $3x-y-7=0$.

ب) اگر دوخط موازی باشند، ضریب زاویه‌هایشان با هم مساویند.

فرض کنید (x, y) مختصات نقطهٔ اختیاری روی خط موردنظر باشد.

ضریب زاویهٔ خط گذرنده از دونقطهٔ $(2, 3)$ و $(-5, 0)$ برابراست با ضریب زاویهٔ خط مرسوم از نقطه‌های (x, y) و $(-4, 1)$. بنابراین $\frac{y-1}{x+4}=\frac{3-0}{2+5}$.

پس از ساده‌کردن داریم، $3x-7y+19=0$.

۱۴. نقطهٔ $P(x, y)$ طوری حرکت می‌کندکه فاصلهٔ آن از نقطهٔ $C(2, -1)$ همواره برابر۵ است، معادلهٔ مکان هندسی آن‌را بیابید.

$$PC=5 \text{، یا } \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=5$$

ابتدا طرفین تساوی را به توان دو رسانده سپس ساده می‌کنیم. معادلهٔ موردنظر عبارت است از:

$$x^2+y^2-4x+2y=20$$

مکان هندسی فوق دایره‌ای است به‌مرکز $(2, -1)$ وشعاع ۵.

۱۵. نقطهٔ $P(x, y)$ طوری جابه‌جا می‌شود که همواره مجموع مربعات فواصل آن ازدو نقطهٔ $A(0, 0)$ و $B(2, -4)$ برابر ۲۰ است. معادلهٔ مکان هندسی آن را به‌دست آورید.

$(PA)^2+(PB)^2=20$، یا $x^2+y^2+[(x-2)^2+(y+4)^2]=20$.

پس از ساده‌کردن، $x^2+y^2-2x+4y=0$. این معادلهٔ دایره‌ای به‌قطر AB است.

۱۶. نقطهٔ $P(x, y)$ طوری‌تغییرمکان می‌دهدکه مجموع‌فواصل آن از محورهای‌مختصات برابراست با مربع فاصلهٔ‌آن از مبدأ مختصات. معادلهٔ مکان هندسی آن را تعیین‌کنید.

فاصلهٔ $P(x, y)$ از محور عرضها به‌اضافهٔ فاصلهٔ آن ازمحور طولها برابر است با مربع فاصلهٔ آن از نقطهٔ $(0, 0)$.

در نتیجه $x+y=x^2+y^2$، یا $x^2+y^2-x-y=0$. این معادلهٔ دایره‌ای است به‌مرکز $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ و شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

۱۷. نقطهٔ $P(x, y)$ طوری حرکت می‌کندکه نسبت فاصله‌اش ازخط $y-4=0$

به‌فاصله‌اش از نقطهٔ $(۳, ۲)$ برابر یك است. مطلوب است تعیین مکان هندسی آن.

$$۱=\frac{P(x, y) \text{ از خط } y-۴=۰ \text{ فاصلهٔ}}{P(x, y) \text{ از نقطهٔ } (۳, ۲) \text{ فاصلهٔ}}\text{، یا } ۱=\frac{۴-y}{\sqrt{(x-۳)^۲+(y-۲)^۲}}.$$

طرفین تساوی را به‌توان دو می‌رسانیم وساده می‌کنیم،

$$(y-۲)^۲+(x-۳)^۲=(۴-y)^۲\text{، یا } x^۲-۶x+۴y-۳=۰.$$

این معادلهٔ یك سهمی است.

۱۸. دونقطهٔ $P_۱(۲, ۴)$ و $P_۲(۵, -۳)$ مفروضند. مطلوب است تعیین معادلهٔ مکان‌هندسی نقطهٔ $P(x, y)$، درصورتی‌که بدانیم ضرب زاویهٔ $PP_۱$ یك واحد بیشتر از ضریب زاویهٔ $PP_۲$ است.

$$۱+PP_۲ \text{ ضریب زاویهٔ} = PP_۱ \text{ ضریب زاویهٔ}\text{، یا } \frac{y-۴}{x-۲}=\frac{y+۳}{x-۵}+۱$$

اگر عبارت فوق را ساده‌کنیم، داریم $x^۲+۳y-۱۶=۰$، که معادلهٔ یك سهمی است.

۱۹. نقطهٔ $P(x, y)$ طوری حرکت می‌کندکه فاصلهٔ آن ازنقطهٔ $F(۳, ۲)$ همواره برابر است با فاصلهٔ آن از محور yها، معادلهٔ مکان هندسی آن را به‌دست آورید.

$$PF=x\text{،یا} \sqrt{(x-۳)^۲+(y-۲)^۲}=x\text{،یا} x^۲-۶x+۹+y^۲-۴y+۴=x^۲.$$

عبارت را ساده می‌کنیم. داریم، $y^۲-۴y-۶x+۱۳=۰$ که معادلهٔ مکان هندسی یك سهمی است.

۲۰. نقطهٔ $P(x, y)$ طـوری حرکت‌می‌کندکـه تفاضل فاصله‌هـای آن از $F_۱(۱, ۴)$ و $F_۲(۱, -۴)$ همواره برابر ۶ است. معادلهٔ مکان هندسی آن را به‌دست آورید.

$$PF_۱-PF_۲=۶\text{، یا } \sqrt{(x-۱)^۲+(y-۴)^۲}-\sqrt{(x-۱)^۲+(y+۴)^۲}=۶.$$

یکی از رادیکالها را به‌سمت راست انتقال می‌دهیم.

$$\sqrt{(x-۱)^۲+(y-۴)^۲}=۶+\sqrt{(x-۱)^۲+(y+۴)^۲}$$

به‌توان دو می‌رسانیم،

$$x^۲-۲x+۱+y^۲-۸y+۱۶=۳۶+۱۲\sqrt{(x-۱)^۲+(y+۴)^۲}+$$
$$+x^۲-۲x+۱+y^۲+۸y+۱۶$$

ساده می‌کنیم،

$$۴y+۹=-۳\sqrt{(x-۱)^۲+(y+۴)^۲}$$

مربع می‌کنیم،

$$۱۶y^۲+۷۲y+۸۱=۹x^۲-۱۸x+۹+۹y^۲+۷۲y+۱۴۴$$

ساده می‌کنیم، $۹x^۲-۷y^۲-۱۸x+۷۲=۰$، که معادلهٔ یك هذلولی است.

مسئله‌های تکمیلی

مکان هندسی معادله‌ای مفروض

هریك از معادلات زیررا مورد بحث وبررسی قرار دهید ونمودار آنها را رسم کنید.

۱. $x^۲+۲x-y+۳=۰$

۲. $۴x^۲-۹y^۲+۳۶=۰$

۳. $x^۲+y^۲-۸x+۴y-۲۹=۰$

۴. $۲x^۲+۳y^۲-۱۸=۰$

۵. $۳x^۲+۵y^۲=۰$

۶. $۴y^۲-x^۳=۰$

۷. $(xy-۶)^۲+(x^۲+۳xy+y^۲+۵)=۰$

۸. $۸y-x^۳=۰$

۹. $y^۲=x(x-۲)(x+۳)$

۱۰. $y=x(x+۲)(x-۳)$

۱۱. $(x^۲+۲xy-۲۴)^۲+(۲x^۲+y^۲-۳۳)^۲=۰$

۱۲. $x^۲y+۴y-۸=۰$

۱۳. $x^۲y^۲+۴x^۲-۹y^۲=۰$

۱۴. $x^۲+y^۲+۴x-۶y+۱۷=۰$

۱۵. $۲x^۲+y^۲-۲y^۲i+x^۲i-۵۴-۱۷i=۰$

۱۶. $y(x+۲)(x-۴)-۸=۰$

۱۷. $x^۲+xy-۲y^۲-۳x+۳y=۰$

۱۸. $(x^۲-y)-yi=(۵-۲x)+۳(۱-x)i$

نمودار زوج معادلات توأم زیررا رسم کنید وجواب معادلات را از روی نمودارها پیدا کنید. با حل معادلات ازراه تحلیلی نتیجه را تحقیق کنید.

۱۹. $y=x^۲$، $x-y+۲=۰$ جواب: $(۲, ۴)$، $(-۱, ۱)$.

۲۰. $۴y-x^۲=۰$، $x^۲y+۴y-۸=۰$

جواب: $(۲, ۱)$، $(-۲, ۱)$، بقیه موهومی.

۲۱. $x^۲+y^۲-۲۰=۰$، $y^۲-۲x-۱۲=۰$

جواب: $(۲, \pm۴)$، $(-۴, \pm۲)$.

۲۲. $y^۲-۲x-۵=۰$، $۳x^۲-۲y^۲-۱=۰$

جواب: $(۲ر۷, \pm۳ر۲)$، $(-۱ر۴, \pm۱ر۵)$.

۲۳. $y^۲-۴x-۹=۰$، $x^۲+۲y-۶=۰$

جواب: $(-۲, ۱)$، $(-۲, ۱)$، $(۴, -۵)$، $(۰, ۳)$.

۲۴. $۲x^۲+y^۲-۶=۰$، $x^۲-y^۲-۴=۰$ جواب: موهومی.

۲۵. $۲x^۲-۵xy+۲y^۲=۰$، $x^۲+y^۲-۵=۰$

جواب: $(۲, ۱)$، $(-۲, -۱)$، $(۱, ۲)$، $(-۱, -۲)$.

۲۶. $x^۲-y^۲+x-y=۰$، $x^۲-۲xy-۳x+۶y=۰$

جواب: $(۳, -۴)$، $\left(\frac{-۲}{۳}, \frac{-۱}{۳}\right)$، $(۳, ۳)$، $(۰, ۰)$.

معادلهٔ مکان هندسی مفروض

۲۷. معادلات خطوط راستی را به‌دست آورید که:

الف) ۳ واحد درسمت راست محور yها باشد.

جواب: $x-۳=۰$.

ب) ۵ واحد پایین محور xها باشد.

جواب: $y+۵=۰$.

ج) موازی محور عرضها و به‌فاصلهٔ ۷ واحد از نقطهٔ $(-2, 2)$ باشد.

جواب: $x+9=0$، $x-5=0$.

د) ۸ واحد درسمت چپ خط $x=-2$ باشد.

جواب: $x+10=0$.

ه) موازی محور طولها و وسط نقاط $(2, 3)$ و $(2, -7)$ باشد.

جواب: $y+2=0$.

و) فاصله‌اش ازخط $x=3$، چهار برابر فاصلهٔ آن از خط $x=-2$ باشد.

جواب: $x+1=0$، $3x+11=0$.

ز) ازنقطهٔ $(-2, -3)$ بگذرد و برخط $x-3=0$ عمود باشد.

جواب: $y+3=0$.

ح) از محورهای مختصات به‌یك فاصله باشد.

جواب: $y+x=0$، $y-x=0$.

ط) ازنقطهٔ $(3, -1)$ بگذرد وموازی خط $y+3=0$ باشد.

جواب: $y+1=0$.

ی) از خطهای $y-7=0$ و $y+2=0$ به‌یك فاصله باشد.

جواب: $2y-5=0$.

۲۸. نقطهٔ $P(x, y)$ طوری حرکت می‌کند که فاصلهٔ آن از نقطهٔ $(-2, 3)$ برابر ۴ است. معادلهٔ مکان هندسی آن را بیابید.

جواب: $x^2+y^2+4x-6y-3=0$.

۲۹. نقطهٔ $P(x, y)$ طوری حرکت می‌کندکه همواره از دونقطهٔ $(-3, 1)$ و $(7, 5)$ به‌یك فاصله است. معادلهٔ مکان هندسی آن را به‌دست آورید.

جواب: $5x+2y-16=0$.

۳۰. نقطهٔ $P(x, y)$ طوری حرکت می‌کندکه همواره فاصله‌اش از نقطهٔ $(2, 3)$ یك‌دوم فاصله‌اش از نقطهٔ $(-1, 3)$ است. معادلهٔ مکان هندسی آن را بیابید.

جواب: $3x^2+3y^2-26x-10y+42=0$.

۳۱. نقطهٔ $P(x, y)$ طوری تغییرمکان می‌دهد که فاصله‌اش از نقطهٔ $(2, 3)$ همواره برابر فاصله‌اش از خط $x+2=0$ است. معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ P را به‌دست آورید.

جواب: $y^2-8x-6y+9=0$.

۳۲. معادلهٔ دایره‌ای به‌مرکز $(3, 5)$ را به‌دست آورید که مماس برخط $y-1=0$ باشد.

جواب: $x^2+y^2-6x-10y+30=0$.

۳۳. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای راچنان به‌دست آورید که مجموع فاصله‌هایش ازنقطه‌های $(c, 0)$ و $(-c, 0)$ همواره برابر $2a$ باشد، $(2a>2c)$.

جواب: $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$.

۳۴. معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ $P(x, y)$ راکه مجموع فواصلش از نقاط $(2, 3)$ و $(2, -3)$ همواره برابر ۸ است، به‌دست آورید.

جواب: $16x^2+7y^2-64x-48=0$.

۳۵. نقطه‌ای چنان حرکت می‌کند که تفاضل فاصله‌اش از $(3, 2)$ و $(-5, 2)$ برابر ۶ است. مکان هندسی نقطه را به‌دست آورید.

جواب: $7x^2-9y^2+14x+36y-92=0$.

۳۶. نقطه‌ای چنان حرکت می‌کند که فاصله‌اش از خط $y+4=0$، دو سوم فاصله‌اش از نقطهٔ $(3, 2)$ است. معادلهٔ مکان هندسی آن را بیابید.

جواب: $4x^2-5y^2-24x-88y-92=0$.

۳۷. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای راکه فاصله‌اش از $(-2, 2)$ همیشه سه برابر فاصله‌اش ازخط $x-4=0$ است، به‌دست آورید.

جواب: $8x^2-y^2-76x+4y+136=0$.

۳۸. معادلهٔ مکان‌هندسی‌نقطه‌ای را به‌دست آورید که مجموع مربعات فاصلهٔ آن‌ازمحورهای مختصات برابر ۹ باشد.

جواب: $x^2+y^2=9$.

۳۹. معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خطی راکه نقطه‌های $(-3, 2)$ و $(-4, 5)$ را به‌هم متصل می‌سازد به‌دست آورید.

جواب: $4x-3y=7$.

۴۰. نقطه‌ای چنان حرکت می‌کند که همواره به‌فاصلهٔ ۳ واحد از مبدأ مختصات قرار دارد. معادلهٔ مکان هندسی آن را به‌دست آورید.

جواب: $x^2+y^2=9$.

۴۱. معادلهٔ دایره‌ای را به‌دست آورید که مرکزش $(2, 3)$ باشد و از نقطهٔ $(5, -1)$ بگذرد.

جواب: $x^2+y^2-4x-6y-12=0$.

۴۲. نقطه‌های $A(0, -2)$، $B(0, 4)$ و $C(0, 0)$ داده شده‌اند. هرگاه حاصل ضرب ضریب زاویه‌های PA و PB برابر ضریب زاویهٔ PC باشد، معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ $P(x, y)$ را بیابید.

جواب: $y^2-xy-2y-8=0$.

۴۳. پاره‌خطی به‌طول ۱۲ واحد طوری جابه‌جا می‌شود که همواره دو سر آن روی محورهای مختصات قرار می‌گیرد. معادلهٔ مکان هندسی وسط پاره‌خط را پیدا کنید.

جواب: $x^2+y^2=36$.

۴۴. نقطه‌های $A(-2, 3)$ و $B(3, 1)$ مفروضند. معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ $P(x, y)$ را به‌دست آورید، درصورتی که بدانیم ضریب زاویهٔ PA عکس قرینهٔ ضریب زاویهٔ PB است.

جواب: $x^2+y^2-x-4y-3=0$.

۳

خط راست

خط راست. به‌وسیلهٔ معادله‌ای دومتغیره و از درجهٔاول نمایش داده می‌شود. برعکس، مکان هندسی هر معادلهٔ درجهٔ اول دو متغیره، خطی راست است.

هر خط راست در صورتی کاملاً مشخص است که جهت آن در دست باشد ونقطه‌ای مفروض که خط باید از آن بگذرد، معلوم باشد.

معادلهٔ خطی که ضریب زاویه و یك نقطهٔ آن معلوم باشد. معادلهٔ خط راستی که از نقطهٔ $P_1(x_1, y_1)$ بگذرد و دارای ضریب زاویهٔ m باشد چنین است:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

معادلهٔ خطی که ضریب زاویه و عرض از مبدأ آن معلوم باشد. معادلهٔ خط راستی که‌دارای ضریب زاویهٔ m باشد و محور yها را در نقطهٔ $(0, b)$ قطع کند برابر است با:

$$y=mx+b$$

معادلهٔ خطی که دو نقطهٔ آن معلوم باشد. معادلهٔ خط راستی که از نقاط $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ می‌گذرد عبارت است از:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

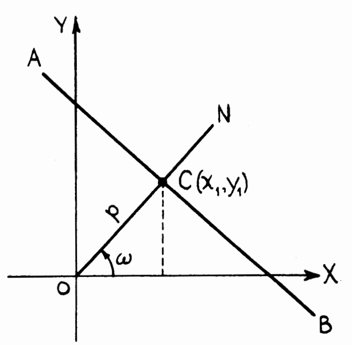
معادلهٔ خطی که طول ازمبدأ وعرض ازمبدأ آن معلوم باشد. معادلهٔ خط راستی که محورهای xها و yها را به ترتیب در نقطه‌های $(a, 0)$ و $(0, b)$ قطع کند، عبارت است از:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

صورت کلی. هر معادلهٔ درجهٔ اول، برحسب متغیرهای x و y را می‌توان به صورت $Ax+By+C=0$، که در آن A، B و C مقادیر ثابت اختیاری هستند، تبدیل نمود. هرمعادله به‌شکل فوق، دارای ضریب زاویهٔ $m=-\frac{A}{B}$ وعرض از مبدأ $b=-\frac{C}{B}$ است.

معادلهٔ نرمال خط راست. به‌طور کلی هر خط راست، در صورتی که اندازهٔ طول عمود مرسوم از مبدأ $(0, 0)$ بر خط و زاویه‌ای که این قائم با محور xها می‌سازد در دست باشد، مشخص می‌شود.

فرض می‌کنیم AB خط مفروض باشد. ON را عمود بر AB رسم می‌کنیم.
فاصلهٔ قائم p از O تا AB برای کلیهٔ حالات AB مثبت در نظر گرفته می‌شود، و ω زاویهٔ از 0° تا 360° است که ON با انتهای مثبت محور xها می‌سازد.



فرض کنید (x_1, y_1) مختصات نقطهٔ C باشد، آنگاه $x_1=p\cos\omega$، $y_1=p\sin\omega$ و $-\frac{\cos\omega}{\sin\omega}=-\cot\omega=-\frac{1}{\tan\omega}=$ ضریب زاویهٔ AB.

اگر (x, y) هر نقطهٔ دلخواه دیگری روی AB باشد، بنا به دستور معادلهٔ خطی که یك نقطه و ضریب زاویهٔ آن معلوم است:

$$y-y_1=-\cot\omega(x-x_1) \quad \text{یا،} \quad y-p\sin\omega=-\frac{\cos\omega}{\sin\omega}(x-p\cos\omega)$$

با ساده کردن آن، $x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$، کــه شکل نرمال معادلهٔ خط راست است.

تبدیل به‌شکل نرمال. اگــر $Ax+By+C=0$ و $x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$ به ترتیب شکلهای کلــی و نرمال یك خط باشند، ضرایب دو معادله یا با هم مساویند یا متناسب.

از این‌رو $\frac{\cos\omega}{A}=\frac{\sin\omega}{B}=\frac{-p}{C}=k$ ، که درآن k نسبت‌ثابتی‌است. بنابراین $\cos\omega=kA$، $\sin\omega=kB$، $-p=kC$. دو رابطهٔ اول را به‌توان‌دو می‌رسانیم و با هــم جمع مــی‌کنیم، $\cos^2\omega+\sin^2\omega=k^2(A^2+B^2)$ یــا $k^2(A^2+B^2)=1$، و $k=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$.

اگر به‌جای k جایگذاری کنیم،

$$\cos\omega=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\ ,\quad \sin\omega=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\ ,\quad -p=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

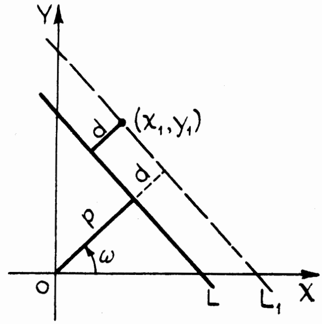
بنابراین معادلهٔ نرمال خط $Ax+By+C=0$ عبارت است از:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

که درآن علامت قبل‌از رادیکالها مخالف علامت C انتخاب می‌شود. اگر $C=0$، علامت آنها، مانند علامت B خواهد بود.

فاصلهٔ خط تا نقطه. برای به‌دست آوردن فاصلهٔ قائم d از خط L تا نقطهٔ (x_1, y_1) خط L_1 را از (x_1, y_1) و موازی L رسم کنید.

معادلهٔ L، $x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$ است، وچون‌خطوط موازیند معادلهٔ L_1 عبارت است از:



$$x\cos\omega+y\sin\omega-(p+d)=0$$

از آنجا که مختصات (x_1, y_1) در معادلهٔ L_1 صدق می‌کند:

$$x_1\cos\omega+y_1\sin\omega-(p+d)=0$$

آن‌را نسبت به d حل می‌کنیم:

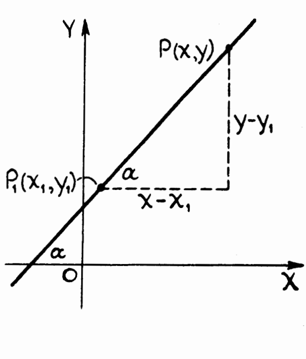
$$d=x_1\cos\omega+y_1\sin\omega-p$$

اگر (x_1, y_1) و مبدأ در دو طرف خط L باشند، فاصلهٔ d مثبت است ولی اگر آنها در یك طرف خط L باشند، d منفی است.

مسئله‌های حل شده

۱. معادلهٔ خط راستی را به‌دست آورید که از نقطهٔ $p_1(x_1, y_1)$ بگذرد و ضریب زاویه‌اش m باشد.

فرض کنید نقطهٔ $p(x, y)$ نقطهٔ دلخواه دیگری روی خط باشد. ضریب زاویهٔ خطی که از نقاط (x, y) و (x_1, y_1) می‌گذرد، m، عبارت است از:



$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}\text{، یا } y-y_1=m(x-x_1)$$

۲. معادلهٔ خطی را که ضریب زاویه‌اش m و نقطهٔ تقاطعش با محور yها $(0\,,b)$ باشد به‌دست آورید.

فرض کنید $p(x,\ y)$ هر نقطهٔ اختیاری دیگری روی خط باشد.

ضریب زاویهٔ خطی که از $(x,\ y)$ و $(0\,,b)$ می‌گذرد، m، عبارت است از،

$m=\dfrac{y-b}{x-0}$. پس: $\qquad y=mx+b$

۳. معادلهٔ خطی را بنویسید که: الف) از نقطهٔ $(-4\,,3)$ با ضریب زاویهٔ $\frac{1}{2}$ بگذرد، ب) از نقطهٔ $(0\,,5)$ با ضریب زاویهٔ -2 بگذرد، ج) از نقطهٔ $(2\,,0)$ با ضریب زاویهٔ $\frac{3}{4}$ بگذرد.

فرض کنید $p(x,\ y)$ نقطهٔ دلخواه دیگری روی هر یك از خطوط باشد. دستور $y-y_1=m(x-x_1)$ را به‌کار ببرید.

الف) $y-3=\frac{1}{2}(x+4)$، یا $2y-6=x+4$، یا $x-2y+10=0$.

ب) $y-5=-2(x-0)$، یا $y-5=-2x$، یا $2x+y-5=0$.

این معادله را می‌توان مستقیماً با قرار دادن در دستور $y=mx+b$ به‌دست آورد.

پس: $y=-2x+5$، یا $2x+y-5=0$.

ج) $y-0=\frac{3}{4}(x-2)$، یا $4y=3x-6$، یا $3x-4y-6=0$.

۴. معادلهٔ خطی را به‌دست آورید که از نقاط $(x_1\,,\ y_1)$ و $(x_2,\ y_2)$ بگذرد.

فرض کنید $(x,\ y)$ هر نقطهٔ دلخواه روی خطی باشد که از $(x_1\,,\ y_1)$ و $(x_2,\ y_2)$ می‌گذرد.

ضریب زاویهٔ خط گذرنده از $(x_2,\ y_2)$ و $(x_1\,,\ y_1)$ برابر است با ضریب زاویهٔ خط گذرنده از $(x_1\,,\ y_1)$ و $(x,\ y)$. پس:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

۵. معادلهٔ خطی را به‌دست آورید که از نقاط $(-۲, -۳)$ و $(۴, ۲)$ بگذرد.

با به‌کار گرفتن دستور $\frac{y-y_۱}{x-x_۱}=\frac{y_۱-y_۲}{x_۱-x_۲}$ داریم، $\frac{y+۳}{x+۲}=\frac{-۳-۲}{-۲-۴}$. یا:

$$۵x-۶y-۸=۰$$

۶. معادلهٔ خطی را به‌دست آورید که نقاط تقاطعش بامحورهای مختصات، $(a,۰)$ و $(۰,b)$ باشد.

جایگذاری در دستور $\frac{y-y_۱}{x-x_۱}=\frac{y_۱-y_۲}{x_۱-x_۲}$ نتیجه می‌دهد $\frac{y-۰}{x-a}=\frac{۰-b}{a-۰}$، یا $bx+ay=ab$. اگر طرفین این عبارت را بر ab تقسیم کنیم، نتیجه‌ می‌شود $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۱$.

(معادلهٔ خط برحسب طول و عرض از مبدأ.)

۷. معادلهٔ خطی را بنویسید که طول و عرض از مبدأ آن به‌ترتیب ۵ و ۳− باشد.

با به‌کار بردن دستور $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۱$، معادلهٔ مورد نظر $\frac{x}{۵}+\frac{y}{-۳}=۱$ است. پس:

$$۳x-۵y-۱۵=۰$$

۸. مطلوب است تعیین ضریب زاویهٔ، m، و عرض از مبدأ، b، خطی که معادله‌اش $Ax+By+C=۰$ باشد، که در آن A، B و C مقادیر ثابت اختیاری هستند.

معادلهٔ خط را نسبت به y حل می‌کنیم، $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$. با مقایسهٔ آن با دستور $y=mx+b$، نتیجه می‌شود، $m=-\frac{A}{B}$ و $b=-\frac{C}{B}$.

اگر $B=۰$، آنگاه $Ax+C=۰$ یا $y=-\frac{C}{A}$، خطی است موازی محور yها.

اگر $A=۰$، آنگاه $By+C=۰$ یا $x=-\frac{C}{B}$، خطی است موازی محور xها.

۹. ضریب زاویهٔ، m، و عرض از مبدأ، b، خط $۲y+۳x=۷$ را بیابید.

معادله‌را به‌صورت $y=mx+b$ مرتب‌ می‌کنیم، $y=-\frac{۳}{۲}x+\frac{۷}{۲}$. ازاین‌رو ضریب زاویهٔ آن $-\frac{۳}{۲}$ و عرض از مبدأ آن $\frac{۷}{۲}$ است.

یا به‌صورت دیگر، اگر معادله را به‌صورت $Ax+By+C=0$ مرتب کنیم، $3x+2y-7=0$، ضریب زاویهٔ آن $m=-\frac{A}{B}=-\frac{3}{2}$، و عرض از مبدأ آن $b=-\frac{C}{B}=-\frac{-7}{2}=\frac{7}{2}$ است.

۱۰. نشان دهید اگر خطوط $Ax+By+C=0$ و $A'x+B'y+C'=0$ موازی باشند، آنگاه $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$ و اگر برهم عمود باشند، آنگاه $AA'+BB'=0$.

اگر موازی باشند، $m=m'$، یا $-\frac{A}{B}=-\frac{A'}{B'}$، یا $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$.

اگر برهم عمود باشند، $m=-\frac{1}{m'}$، یا $-\frac{A}{B}=\frac{B'}{A'}$، یا $AA'+BB'=0$.

۱۱. مطلوب است تعیین معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(2, -3)$ بگذرد و باخطی که از نقاط $(1, 4)$ و $(-2, 2)$ می گذرد موازی باشد.

خطوط متوازی دارای ضریب زاویه‌های مساویند.

فرض کنید (x, y) هر نقطهٔ اختیاری دیگری روی خط گذرنده از $(2, -3)$ باشد. ضریب زاویهٔ خط گذرنده از $(1, 4)$ و $(-2, 2)$ برابراست با ضریب زاویهٔ خط گذرنده از $(2, -3)$ و (x, y). پس $\frac{y+3}{x-2}=\frac{1-2}{4+2}$. با ساده‌کردن آن:

$$x+6y+16=0$$

۱۲. معادلهٔ خطی را بیابید که از نقطهٔ $(-3, 2)$ بگذرد و برخط $2x-3y+6=0$ عمود باشد.

اگر دوخط برهم عمود باشند، ضریب زاویهٔ یکی ازخطوط عکس قرینهٔ ضریب زاویهٔ خط دیگر است.

ضریب زاویهٔ $2x-3y+6=0$ که به‌صورت $Ax+By+C=0$ است، برابر است با $-\frac{A}{B}=\frac{2}{3}$. ازاین‌رو ضریب زاویهٔ خط موردنظر $-\frac{3}{2}$ است.

فرض کنید (x, y) هرنقطهٔ اختیاری دیگری روی خط مطلوب که ازنقطهٔ $(-3, 2)$

می‌گذرد و ضریب زاویهٔ $-\frac{۳}{۲}$ دارد، باشد. داریم، $y-۳=-\frac{۳}{۲}(x+۲)$. با ساده کردن آن:

$$۳x+۲y=۰$$

۱۳. خطی عمودمنصف پاره‌خطی است که از اتصال نقاط $(۷,۴)$ و $(-۱,-۲)$ به‌وجود می‌آید. معادلهٔ آن را پیدا کنید.

نقطهٔ میانی پاره‌خط، $(x_۰, y_۰)$، را به‌دست می‌آوریم:

$$x_۰=\frac{x_۱+x_۲}{۲}=\frac{۷-۱}{۲}=۳ \quad ، \quad y_۰=\frac{y_۱+y_۲}{۲}=\frac{۴-۲}{۲}=۱$$

$$\text{ضریب زاویهٔ پاره‌خط}=\frac{۴+۲}{۷+۱}=\frac{۳}{۴}$$

از این‌رو ضریب زاویهٔ خط مطلوب $-\frac{۴}{۳}$ است.

فرض کنید (x,y) هر نقطهٔ دلخواه دیگری روی خط مطلوب که با ضریب زاویهٔ $-\frac{۴}{۳}$ از نقطهٔ $(۳,۱)$ می‌گذرد باشد. داریم، $y-۱=-\frac{۴}{۳}(x-۳)$. با ساده کردن آن:

$$۴x+۳y-۱۵=۰$$

۱۴. معادلهٔ خطی را بنویسید که با زاویهٔ میل ۶۰° از نقطهٔ $(۲,-۳)$ بگذرد.

فرض کنید (x,y) هر نقطهٔ دلخواه دیگری روی خط موردنظر باشد که ضریب زاویه‌اش برابر است با $\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$. داریم، $y+۳=\sqrt{۳}(x-۲)$. با ساده کردن آن:

$$\sqrt{۳}x-y-۳-۲\sqrt{۳}=۰$$

۱۵. مطلوب است تعیین مقدار ویژهٔ پارامتر k طوری که:

الف) خط $۳kx+۵y+k-۲=۰$ از نقطه $(-۱,۴)$ بگذرد؛

ب) خط $۴x-ky-۷=۰$ دارای ضریب زاویهٔ ۳ باشد؛

ج) خط $kx-y=۳k-۶$ دارای طول ازمبدأ ۵ باشد.

الف) درمعادلهٔ خط $x=-۱$ و $y=۴$ را جایگذاری می‌کنیم،

$$۳k(-۱)+۵\times۴+k-۲=۰ \quad ،۲k=۱۸ \quad ،k=۹$$

ب) با به‌کارگیری صورت داده شده

$Ax+By+C=۰$، داریم $۳=-\frac{۴}{-k}=-\frac{A}{B}=$ ضریب‌زاویه، یا $k=\frac{۴}{۳}$.

یا به صورت دیگر با تبدیل $۴x-ky-۷=۰$ به شکل $y=mx+b$ یعنی $y=\frac{۴}{k}x-\frac{۷}{k}$. داریم $۳=\frac{۴}{k}=$ ضریب زاویه، یا $۳k=۴$، یا $k=\frac{۴}{۳}$.

ج) وقتی $y=۰$، $x=\frac{۳k-۶}{k}=۵$. پس $۳k-۶=۵k$ و $k=-۳$.

۱۶. معادلهٔ خطی را بیابید که دارای ضریب زاویهٔ $-\frac{۳}{۴}$ باشد و با محورهای مختصات، مثلثی به‌مساحت ۲۴ واحد سطح تشکیل دهد.

هر خط با ضریب زاویهٔ $-\frac{۳}{۴}$ وعرض ازمبدأ b با معادلهٔ $y=-\frac{۳}{۴}x+b$ مشخص می‌شود.

وقتی $x=۰$، $y=b$ و وقتی $y=۰$، $x=\frac{۴}{۳}b$.

مساحت مثلث $=\frac{۱}{۲}$ (حاصل ضرب طول از مبدأ و عرض از مبدأ) $=\frac{۱}{۲}\left(b\cdot\frac{۴}{۳}b\right)$

$$=\frac{۲}{۳}b^{۲}=۲۴$$

پس $۲b^{۲}=۳(۲۴)$، یا $b^{۲}=۳۶$، یا $b=\pm۶$ ومعادلات خطوط مطلوب عبارتند از:

$y=-\frac{۳}{۴}x\pm۶$، یا $۳x+۴y-۲۴=۰$ و $۳x+۴y+۲۴=۰$

۱۷. مطلوب است تعیین مکان هندسی هر یک از معادلات زیر:

الف) $x^{۲}+۸xy-۹y^{۲}=۰$ ؛ ب) $x^{۳}-۴x^{۲}-x+۴=۰$.

الف) چون معادله به عواملی به صورت $(x-y)(x+۹y)=۰$ تجزیه می‌شود، مکان هندسی آن دو خط راست به‌معادلات $x-y=۰$ و $x+۹y=۰$ است.

ب) با تجزیهٔ معادله به‌عوامل

$$(x-۱)(x^{۲}-۳x-۴)=(x-۱)(x+۱)(x-۴)=۰$$

بنابراین مکان هندسی آن سه خط راست به معادلات $x=۰$، $x-۱=۰$، $x+۱=۰$، $x-۴=۰$ است.

۱۸. نقطهٔ $p(x,y)$ طوری حرکت می‌کند که فاصله‌اش تا خط $x=۵$ دو برابر فاصلهٔ آن تا خط $y=۸$ است. مکان هندسی آن‌را پیدا کنید.

[فاصلهٔ نقطهٔ (x,y) از خط $y=۸$]$۲\pm=$ فاصلهٔ (x,y) از خط $x=۵$

یا $$x-۵=\pm ۲(y-۸)$$

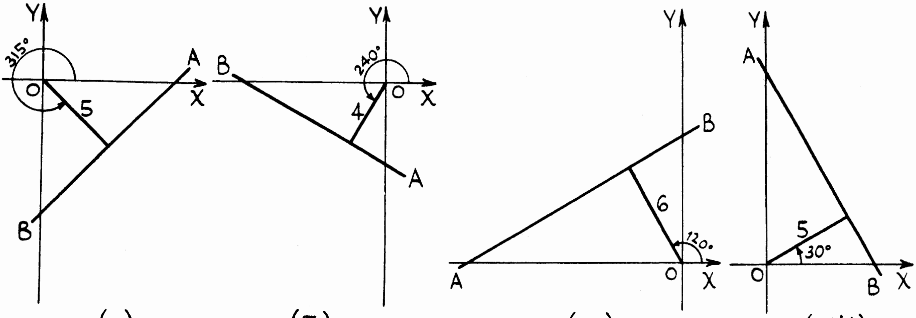
از این‌رو مکان هندسی نقطهٔ p دو خط راست است، $x+۲y-۲۱=۰$ و $x-۲y+۱۱=۰$، یا $(x+۲y-۲۱)(x-۲y+۱۱)=۰$.

معادلهٔ نرمال خط

۱۹. هر یک از خطوط زیر، AB، را با استفاده از مقادیر داده شدهٔ p و ω رسم کنید، و معادلات آنها را بنویسید.

الف) $p=۵$، $\omega=\frac{\pi}{۶}=۳۰^\circ$ ؛ ب) $p=۶$، $\omega=\frac{۲\pi}{۳}=۱۲۰^\circ$؛

ج) $p=۴$، $\omega=\frac{۴\pi}{۳}=۲۴۰^\circ$ ؛ د) $p=۵$، $\omega=\frac{۷\pi}{۴}=۳۱۵^\circ$.



(الف) (ب) (ج) (د)

الف) $x\cos ۳۰^\circ+y\sin ۳۰^\circ-۵=۰$، یا $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}x+\frac{۱}{۲}y-۵=۰$، یا $\sqrt{۳}x+y-۱۰=۰$.

ب) $x\cos ۱۲۰^\circ+y\sin ۱۲۰^\circ-۶=۰$، یا $-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}y-۶=۰$،

یا $x-\sqrt{3}y+12=0$.

ج) $x\cos 240^\circ+y\sin 240^\circ-4=0$، یا $-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{3}y-4=0$، یا $x+\sqrt{3}y+8=0$.

د) $x\cos 315^\circ+y\sin 315^\circ-5=0$، یا $\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y-5=0$، یا $x-y-5\sqrt{2}=0$.

۲۰. هر یك از معادلات را به‌صورت نرمال تبدیل کنید و p و ω را بیابید.

الف) $\sqrt{3}x+y-9=0$ ؛ ب) $3x-4y-6=0$؛

ج) $x+y+8=0$ ؛ د) $12x-5y=0$؛

ه) $4y-7=0$ ؛ و) $x+5=0$.

شکل نرمال خط $Ax+By+C=0$ عبارت است از:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

الف) $A=\sqrt{3}$ و $B=1$ و $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{3+1}=2$. چون $(C=-9)$ عددی منفی است $\sqrt{A^2+B^2}$ با علامت مثبت مشخص شده‌است. معادله به‌صورت نرمال عبارت است از، $\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{9}{2}=0$. $\cos\omega=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\omega=\frac{1}{2}$. پس $\omega=30^\circ$ و $p=\frac{9}{2}$.

چون $\sin\omega$ و $\cos\omega$ هر دو مثبت هستند، ω زاویه‌ای است در ناحیهٔ اول.

ب) $A=3$ و $B=-4$ و $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{9+16}=5$. معادله به‌صورت نرمال عبارت است از، $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{6}{5}=0$. $\cos\omega=\frac{3}{5}$ و $\sin\omega=-\frac{4}{5}$. پس $\omega=306^\circ 52'$ و $p=\frac{6}{5}$.

چون $\cos\omega$ عددی مثبت و $\sin\omega$ عددی منفی است، ω زاویه‌ای در ناحیهٔ چهارم است.

ج) $A=1$ و $B=1$ و $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{2}$. چون $C(=+8)$ مثبت است، رادیکال با علامت منفی مشخص شده است، معادله درشکل نرمال عبارت است از،

$-\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y-4\sqrt{2}=0$ ، $\cos\omega=\sin\omega=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. پس $\omega=225^\circ$ و $p=4\sqrt{2}$.

چون $\cos\omega$ و $\sin\omega$ هر دو منفی هستند، ω زاویه‌ای در ناحیهٔ سوم است.

د) $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{144+25}=13$. چون $C=0$، رادیکال با همان علامت $B(=-5)$ داده‌شده است، که علامت $\sin\omega$ را مثبت می‌سازد و $\omega<180^\circ$. معادله در شکل نرمال عبارت است از، $-\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y=0$ ، $\cos\omega=-\frac{12}{13}$ و $\sin\omega=\frac{5}{13}$، پس $\omega=157^\circ 23'$ و $p=0$.

چون $\cos\omega$ عددی‌منفی و $\sin\omega$ عددی‌مثبت است، ω زاویه‌ای درناحیهٔ دوم‌است.

ه) $A=0$ و $B=4$ و $\sqrt{A^2+B^2}=4$. معادله به‌صورت نرمال‌عبارت است از، $\frac{4}{4}y-\frac{7}{4}=0$ ، یا $y-\frac{7}{4}=0$ ، $\cos\omega=0$ و $\sin\omega=1$، پس $\omega=90^\circ$ و $p=\frac{7}{4}$.

و) $A=1$ و $B=0$ و $\sqrt{A^2+B^2}=1$. معادله به صورت نرمال عبارت‌است از، $\frac{1}{-1}x+\frac{5}{-1}=0$ ، یا $-x-5=0$ ، $\cos\omega=-1$ و $\sin\omega=0$، پس $\omega=180^\circ$ و $p=5$.

۲۱. معادلهٔ خطوطی را پیدا کنید که از نقطهٔ $(4, -2)$ بگذرند و به‌فاصلهٔ قائم، p، ۲ واحد از مبدأ مختصات باشند.

معادلهٔ دستهٔ خطوطی که با ضریب زاویهٔ m از نقطهٔ $(4, -2)$ می‌گذرند عبارت است از: $y+2=m(x-4)$ یا $mx-y-(4m+2)=0$.

شکل نرمال $mx-y-(4m+2)=0$ عبارت‌است از، $\frac{mx-y-(4m+2)}{\pm\sqrt{m^2+1}}=0$.

پس $\frac{4m+2}{\pm\sqrt{m^2+1}}=2$ ، یا $(4m+2)^2=4(m^2+1)$. با حل آن، $m=0, -\frac{4}{3}$.

معادلات مطلوب عبارتند از: $y+2=0$ و $y+2=-\frac{4}{3}(x-4)$، یا $4x+3y-10=0$.

۲۲. مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ الف) خط $8x+15y-24=0$ تا نقطهٔ $(-2, -3)$؛ ب) خط $6x-8y+5=0$ تا نقطهٔ $(-1, 7)$.

الف) شکل نرمال معادله عبارت است از:

$$\frac{۸x+۱۵y-۲۴}{+\sqrt{۸^۲+(۱۵)^۲}}=۰ \text{ ، یا } \frac{۸x+۱۵y-۲۴}{۱۷}=۰$$

$$d=\frac{۸(-۲)+۱۵(-۳)-۲۴}{۱۷}=\frac{-۸۵}{۱۷}=-۵$$ ، چون d منفی است، بنابراین نقطهٔ $(-۲\,,-۳)$ و مبدأ در یك طرف خط هستند.

ب) شکل نرمال معادله عبارت است از:

$$\frac{۶x-۸y+۵}{-\sqrt{۶^۲+(-۸)^۲}}=۰ \text{ ، یا } \frac{۶x-۸y+۵}{-۱۰}=۰$$

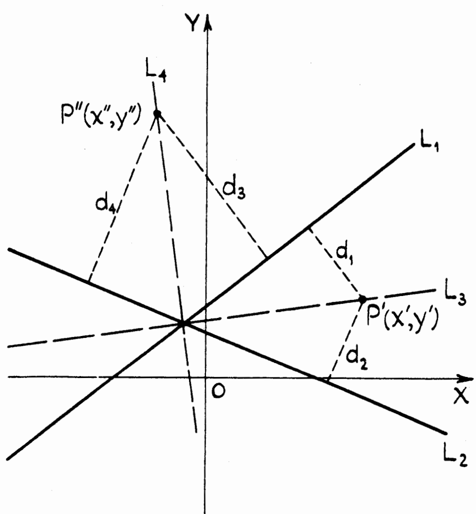
$$d=\frac{۶(-۱)-۸\times۷+۵}{-۱۰}=\frac{-۵۷}{-۱۰}=۵٫۷$$ ، چون d مثبت‌است، نقطهٔ $(-۱,۷)$ و مبدأ در دو طرف خط هستند.

۲۳. مطلوب است تعیین نیمساز زاویه‌های بین خطوط $L_۱ : ۳x-۴y+۸=۰$ و $L_۲ : ۵x+۱۲y-۱۵=۰$.

فرض کنید $p'(x',y')$ نقطه‌ای دلخواه روی نیمساز $L_۳$ باشد، آنگاه

$$d_۱=\frac{۳x'-۴y'+۸}{-۵} \text{ و } d_۲=\frac{۵x'+۱۲y'-۱۵}{۱۳}.$$

بدازای هر نقطه روی $L_۳$، مقادیر قدرمطلق $d_۱$ و $d_۲$ با هم مساویند.



p' و مبدأ در یك طرف L_1 ولی در دو طرف L_2 قرار دارند. بنا براین d_1 منفی و d_2 مثبت است و $d_1=-d_2$. به‌این ترتیب مکان p' عبارت است از:

$$\frac{3x'-4y'+8}{-5}=-\frac{5x'+12y'-15}{13}$$

عبارت را ساده و پریمها را حذف می‌کنیم. معادلهٔ L_3 عبارت است از،

$$14x-112y+179=0$$

به‌طریق مشابه، فرض کنید $p''(x'', y'')$ نقطه‌ای روی نیمساز L_4 باشد. چون p'' ومبدأ مختصات، دردوطرف L_1وL_2 قراردارند، d_3وd_4 هردومثبت‌هستندو $d_3=d_4$.

پس مکان هندسی p'' عبارت است از، $\frac{3x''-4y''+8}{-5}=\frac{5x''+12y''-15}{13}$.

باساده‌نمودن‌وحذف‌پریمها،معادلهٔL_4عبارت‌است‌از، $64x+8y+29=0$. به‌خاطر داشته‌باشید L_3وL_4 برهم‌عمودند وضریب زاویه‌هایشان عکس قرینهٔ یکدیگر هستند.

۲۴. معادلات خطوط موازی باخط $12x-5y-15=0$ را پیدا کنید که مقدار عددی فاصلهٔ قائم آنها از این خط برابر ۴ باشد.

فرض کنید $p'(x', y')$ نقطه‌ای دلخواه روی خط مطلوب باشد. پس، $\frac{12x'-5y'-15}{13}=\pm 4$. باساده‌نمودن وحذف پریمها، معادلات‌مطلوب‌عبارتنداز،

$$12x-5y-67=0 \text{ ، } 12x-5y+37=0$$

۲۵. مطلوب است تعیین مقدار k طوری که مقدارعددی فاصلهٔ خط $8x+15y+k=0$ تا نقطهٔ $(2, 3)$، d، برابر ۵ واحد باشد.

$d=\frac{8(2)+15(3)+k}{\pm 17}=\pm 5$، با حل آن، ۲۴ و $k=-146$.

۲۶. مطلوب‌است تعیین نقطهٔ تلاقی نیمسازهای زوایای‌داخلی‌مثلثی که اضلاعش‌عبارتنداز:

$$L_1: 7x-y+11=0$$

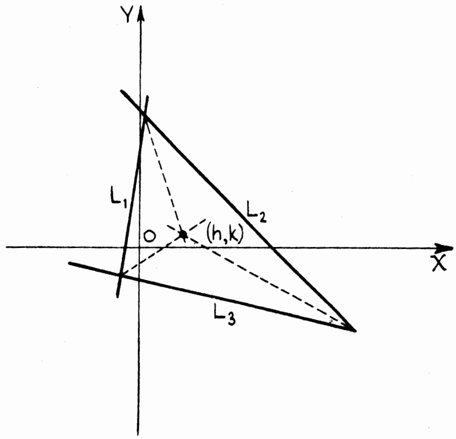
$$L_2: x+y-15=0$$

$$L_3: 7x+17y+65=0$$

نقطهٔ تقاطع، (h, k)، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث است، بنابراین فاصلهٔ (h, k) از L_1، $d_1=\frac{7h-k+11}{-\sqrt{50}}$ است.

فاصلهٔ (h, k) از $L_۲$ برابر است با، $d_۲ = \dfrac{h+k-۱۵}{\sqrt{۲}}$.

فاصلهٔ (h, k) از $L_۳$ برابر است با، $d_۳ = \dfrac{۷h+۱۷k+۶۵}{-\sqrt{۳۳۸}}$.



کلیهٔ فواصل منفی هستند، زیرا نقطه و مبدأ مختصات هر دو در یک طرف هر خط واقعند. درنتیجه $d_۱ = d_۲ = d_۳$.

چون $d_۱ = d_۲$، $\dfrac{۷h-k+۱۱}{-۵\sqrt{۲}} = \dfrac{h+k-۱۵}{\sqrt{۲}}$. باساده‌نمودن آن، $۳h+k=۱۶$.

چون $d_۱ = d_۳$ ، $\dfrac{۷h-k+۱۱}{-۵\sqrt{۲}} = \dfrac{۷h+۱۷k+۶۵}{-۱۳\sqrt{۲}}$. با ساده نمودن آن، $۴h-۷k=۱۳$.

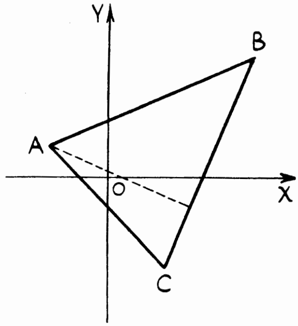
اگر $۳h+k=۱۶$ و $۴h-۷k=۱۳$ را همزمان حل کنیم، داریم، $h=۵$ و $k=۱$.

۲۷. مثلث $A(-۲, ۱)$، $B(۵, ۴)$، $C(۲, -۳)$ مفروض است. طول ارتفاع گذرنده‌از رأس A و مساحت مثلث را تعیین کنید.

معادلهٔ BC، $\dfrac{y+۳}{x-۲} = \dfrac{۴+۳}{۵-۲}$، یا $۷x-۳y-۲۳=۰$ است.

فاصلهٔ BC تا A، $\dfrac{-۴۰}{\sqrt{۵۸}} = \dfrac{۷(-۲)-۳(۱)-۲۳}{\sqrt{۴۹+۹}}$ است.

طول BC، $\sqrt{۵۸} = \sqrt{(۵-۲)^۲+(۴+۳)^۲}$ است.



$$\text{مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۵۸} \times \frac{۴۰}{\sqrt{۵۸}}\right) = ۲۰ \text{ واحد مربع}$$

دستهٔ خطوط

۲۸. مطلوب است تعیین معادلهٔ دستهٔ خطوطی که:

الف) ضریب زاویهٔ آنها ۴ − باشد؛

ب) از نقطهٔ (۴, ۱) بگذرند؛

ج) عرض از مبدأ آنها ۷ باشد؛

د) طول از مبدأ آنها ۵ باشد؛

ه) مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ آنها ۸ باشد؛

و) عرض از مبدأ آنها دو برابر طول از مبدأ باشد؛

ز) یکی از تقاطعها از نظر عددی دو برابر تقاطع دیگر باشد. (مقصود از تقاطع عرض از مبدأ یا طول از مبدأ است.)

در هر حالت، فرض کنید k مقداری ثابت یا پارامتر اختیاری دستهٔ خطوط باشد.

الف) فرض کنید k عرض از مبدأ دستهٔ خطوطی باشد که ضریب زاویهٔ آنها ۴ − است.

از دستور $y = mx + b$، معادلهٔ مطلوب عبارت است از، $y = -۴x + k$، یا $۴x + y - k = ۰$.

ب) فرض کنید k ضریب زاویهٔ دستهٔ خطوطی باشد که از نقطهٔ (۴, ۱) می‌گذرند. با جایگذاری در رابطهٔ $y - y_۱ = m(x - x_۱)$، معادلهٔ مطلوب عبارت است از:

$$y - ۱ = k(x - ۴)\text{، یا } kx - y + ۱ - ۴k = ۰$$

ج) فرض کنید k ضریب زاویهٔ دسته خطوطی باشد که عرض از مبدأ آنها ۷ است. از دستور $y = mx + b$، معادلهٔ مطلوب عبارت است از: $y = kx + ۷$، یا

$kx-y+7=0$.

د) فرض کنید k ضریب زاویهٔ دستهٔ خطوطی باشد که طول از مبدأ آنها ۵ است.
از رابطهٔ $y-y_1=m(x-x_1)$، معادلهٔ مطلوب عبارت است از:

$$y-0=k(x-5) \text{ یا } kx-y-5k=0$$

ه) فرض کنید k طول از مبدأ دستهٔ خطوط باشد، آنگاه عرض از مبدأ دستهٔ خطوط برابر $(8-k)$ است. از دستور $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$، معادلهٔ مطلوب عبارت است از:

$$\frac{x}{k}+\frac{y}{8-k}=1 \text{ یا } (8-k)x+ky-8k+k^2=0.$$

و) فرض کنید k عرض از مبدأ دستهٔ خطوط باشد، آنگاه $\frac{1}{2}k$ طول از مبدأ خواهد بود.

از دستور $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$، معادلهٔ مورد نظر عبارت است از: $\frac{x}{\frac{1}{2}k}+\frac{y}{k}=1$، یا $2x+y-k=0$.

ز) ضریب زاویهٔ خط برابر است با $-\frac{\text{عرض از مبدأ}}{\text{طول از مبدأ}}$. وقتی طول از مبدأ از نظر عددی $(\pm)$ دو برابر عرض از مبدأ باشد، ضریب زاویهٔ خط $\mp\frac{1}{2}$ است. وقتی عرض از مبدأ از نظر عددی دو برابر طول از مبدأ باشد، ضریب زاویهٔ خط ∓ 2 است. فرض کنید k عرض از مبدأ باشد، آنگاه مطابق دستور $y=mx+b$، معادلهٔ مطلوب دستهٔ خطوط عبارت است از، $y=\pm\frac{1}{2}x+k$ و $y=\pm 2x+k$.

۲۹. مطلوب است تعیین معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(-2, -4)$ بگذرد و مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ آن برابر ۳ باشد.

معادلهٔ دستهٔ خطوطی که از نقطهٔ $(-2, -4)$ می‌گذرند عبارت است از:

$$y+4=m(x+2)$$

اگر $x=0$، $y=2m-4$؛ اگر $y=0$، $x=\frac{4-2m}{m}$.

مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ برابر ۳ است، پس، $3=\frac{4-2m}{m}+2m-4$.

عبارت را ساده می‌کنیم، $۲m^۲-۹m+۴=۰$. با حل آن،

$$(۲m-۱)(m-۴)=۰ \text{ ، } m=\frac{۱}{۲}, ۴$$

با جایگذاری مقادیر m در رابطهٔ $y+۴=m(x+۲)$، معادلهٔ مورد نظر عبارت است از: $y+۴=\frac{۱}{۲}(x+۲)$ و $y+۴=۴(x+۲)$، یا

$$۴x-y+۴=۰ \text{ و } x-۲y-۶=۰.$$

۳۰. معادلهٔ خطی را پیدا کنید که از نقطهٔ تقاطع خطوط $۳x-۲y+۱۰=۰$ و $۴x+۳y-۷=۰$ و از نقطهٔ $(۲, ۱)$ بگذرد.

$۳x-۲y+۱۰+k(۴x+۳y-۷)=۰$ معادلهٔ دستهٔ خطوطی است که از نقطهٔ تقاطع دو خط داده شده می‌گذرند.

چون خط مورد نظر از $(۲, ۱)$ می‌گذرد،

$$۳\times۲-۲\times۱+۱۰+k(۴\times۲+۳\times۱-۷)=۰$$

با حل آن، $k=-\frac{۷}{۲}$. خط مطلوب عبارت است از:

$$۳x-۲y+۱۰-\frac{۷}{۲}(۴x+۳y-۷)=۰ \text{، یا } ۲۲x+۲۵y-۶۹=۰$$

۳۱. معادلهٔ خطی را پیدا کنید که بر خط $۴x+y-۱=۰$ عمود باشد و از نقطهٔ تقاطع خطوط $۲x-۵y+۳=۰$ و $x-۳y-۷=۰$ بگذرد.

ضریب زاویهٔ $۴x+y-۱=۰$ برابر -۴ است. در نتیجه ضریب زاویهٔ خط مورد نظر $\frac{۱}{۴}$ است.

معادلهٔ دستهٔ خطوطی که از نقطهٔ تقاطع خطوط $۲x-۵y+۳=۰$ و $x-۳y-۷=۰$ می‌گذرند عبارت است از، $۲x-۵y+۳+k(x-۳y-۷)=۰$، یا:

$$(۲+k)x-(۵+۳k)y+(۳-۷k)=۰ \qquad (۱)$$

ضریب زاویهٔ هرخط ازاین دسته برابر است با $\frac{۲+k}{۵+۳k}$، وضریب‌زاویهٔ خط‌مطلوب $\frac{۱}{۴}$ است، بنابراین $\frac{۲+k}{۵+۳k}=\frac{۱}{۴}$. با حل آن $k=-۳$.

اگر $k=-۳$ را در رابطهٔ (۱) قراردهیم، معادلهٔ خط مطلوب، $x-۴y-۲۴=۰$ است.

مسئله‌های تکمیلی

۱. معادلات خطهایی را که درشرایط زیرصدق می‌کنند بنویسید.

الف) گذرنده از $(۰ , ۲)$ با $m=۳$.

جواب: $y-۳x-۲=۰$.

ب) گذرنده از $(۰, -۳)$ با $m=-۲$.

جواب: $y+۲x+۳=۰$.

ج) گذرنده از $(۰ , ۴)$ با $m=\frac{۱}{۳}$.

جواب: $x-۳y+۱۲=۰$.

د) گذرنده از $(۰, -۱)$ با $m=۰$.

جواب: $y+۱=۰$.

ه) گذرنده از $(۰ , ۳)$ $m=-\frac{۴}{۳}$.

جواب: $۴x+۳y-۹=۰$.

۲. معادلهٔ خطی راکه ازنقاط زیر، می‌گذرد بنویسید.

الف) $(۲, -۳)$ و $(۴, ۲)$.

جواب: $۵x-۲y-۱۶=۰$.

ب) $(-۴, ۱)$ و $(۳, -۵)$.

جواب: $۶x+۷y+۱۷=۰$.

ج) $(۷, ۰)$ و $(۰, ۴)$.

جواب: $۴x+۷y-۲۸=۰$.

د) $(۰, ۰)$ و $(۵, -۳)$.

جواب: $۳x+۵y=۰$.

ه) $(۵, -۳)$ و $(۵, ۲)$.

جواب: $x-۵=۰$.

و) $(-۵, ۲)$ و $(۳, ۲)$.

جواب: $y-۲=۰$.

۳. مثلثی مفروض است، که رأسهای آن عبارتند از $A(-5, 6)$، $B(-1, -4)$ و $C(3, 2)$.

الف) معادلات سه‌میانهٔ مثلث را به‌دست آورید.

جواب: $x-6y+9=0$، $x+1=0$ و $7x+6y-1=0$.

ب) نقطهٔ تقارب میانه‌ها را ازطریق جبری به‌دست آورید.

جواب: $(-1, 4/3)$.

۴. الف) معادلات سه ارتفاع مثلث مسئلهٔ ۳ را به‌دست‌آورید.

جواب: $2x-5y+4=0$، $2x-y-2=0$ و $2x+3y-8=0$.

ب) نقطهٔ تقارب سه‌ارتفاع مثلث را به‌دست آورید.

جواب: $\left(\frac{7}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

۵. الف) مطلوب است تعیین معادلات عمودمنصفهای اضلاع مثلث مسئلهٔ ۳.

جواب: $2x+3y+1=0$، $2x-y+6=0$ و $2x-5y+11=0$.

ب) نقطهٔ تقاطع این عمودمنصفها را به‌دست‌آورید.

جواب: $\left(\frac{-19}{8}, \frac{5}{4}\right)$. این نقطه مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است.

۶. ثابت‌کنید نقاط تقاطع میانه‌ها، ارتفاعها و عمودمنصفهای اضلاع مثلث مسئلهٔ ۳، روی خطی راست قرار دارند. معادلهٔ این‌خط را به‌دست‌آورید.

جواب: $2x-33y+46=0$.

۷. معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(2, 3)$ را طوری تعیین‌کنید‌که طول ازمبدأ آن دوبرابر عرض از مبدأش باشد. جواب: $x+2y-8=0$.

۸. مقدار K درمعادلهٔ $2x+3y+K=0$ را طوری تعیین‌کنید‌که این‌خط با محورهای مختصات مثلثی به‌مساحت ۲۷ واحد مربع تشکیل دهد.

جواب: $K=\pm 18$.

۹. مقدار K راطوری تعیین‌کنید که‌خطی‌که معادله‌اش به‌صورت $2x+3Ky-13=0$ است، ازنقطهٔ $(-2, 4)$ بگذرد. جواب: $K=\frac{17}{12}$.

۱۰. مقدار K را طوری تعیین‌کنید‌که خطی‌که معادله‌اش به‌صورت $3x-Ky-8=0$ است باخط $2x+5y-17=0$ زاویهٔ 45° بسازد.

جواب: $K=۷ \text{،} -\frac{۹}{۷}$.

۱۱. نقطه‌ای روی خط $۳x+y+۴=۰$ را طوری پیدا کنید که از نقاط $(-۵ \text{،} ۶)$ و $(۳ \text{،} ۲)$ به‌یک فاصله باشد. جواب: $(-۲ \text{،} ۲)$.

۱۲. معادلهٔ خطهایی را پیدا کنید که از $(۱ \text{،} -۶)$ بگذرند و حاصلضرب طول ازمبدأ و عرض ازمبدأ هریك از آنها برابر ۱ باشد.

جواب: $۴x+y+۲=۰$، $۹x+y-۳=۰$.

۱۳. معادلهٔ خطی را بیابید که طول ازمبدأش برابر $-\frac{۳}{۷}$ باشد و برخط $۳x+۴y-۱۰=۰$ نیز عمود باشد. جواب: $۲۸x-۲۱y+۱۲=۰$.

۱۴. معادلهٔ خطی را پیدا کنید که برخط $۲x+۷y-۳=۰$ در نقطهٔ تقاطعش با خط $۳x-۲y+۸=۰$ عمود باشد. جواب: $۷x-۲y+۱۶=۰$.

۱۵. هریك از خطوط زیر را با استفاده از مقادیر داده شدهٔ p و ω رسم کنید، و معادلاتشان را بنویسید.

الف) $p=۶$ و $\omega=۳۰^\circ$. جواب: $\sqrt{۳}x+y-۱۲=۰$.

ب) $p=\sqrt{۲}$ و $\omega=\frac{\pi}{۴}$. جواب: $x+y-۲=۰$.

ج) $p=۳$ و $\omega=\frac{۲\pi}{۳}$. جواب: $x-\sqrt{۳}y+۶=۰$.

د) $p=۴$ و $\omega=\frac{۷\pi}{۴}$. جواب: $x-y-۴\sqrt{۲}=۰$.

ه) $p=۳$ و $\omega=۰^\circ$. جواب: $x-۳=۰$.

و) $p=۴$ و $\omega=\frac{۳\pi}{۲}$. جواب: $y+۴=۰$.

۱۶. هریك از معادلات خط راست زیر را به‌صورت نرمال تبدیل، و p و ω را پیدا کنید.

الف) $x-۳y+۶=۰$.

جواب: $-\frac{x}{\sqrt{۱۰}}+\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}y-\frac{۶}{\sqrt{۱۰}}=۰$، $p=\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۵}$ و $\omega=۱۰۸^\circ ۲۶'$.

ب) $۲x+۳y-۱۰=۰$.

جواب: $\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}x+\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}y-\frac{۱۰}{\sqrt{۱۳}}=۰$، $p=\frac{۱۰\sqrt{۱۳}}{۱۳}$ و $\omega=۵۶^\circ ۱۹'$.

ج) $۳x+۴y-۵=۰$.

جواب: $\frac{۳}{۵}x+\frac{۴}{۵}y-۱=۰$، $p=۱$ و $\omega=۵۳^\circ۸'$.

د) $۵x+۱۲y=۰$.

جواب: $\frac{۵}{۱۳}x+\frac{۱۲}{۱۳}y=۰$، $p=۰$ و $\omega=۶۷^\circ۲۳'$.

و) $x+y-\sqrt{۲}=۰$.

جواب: $\frac{x}{\sqrt{۲}}+\frac{y}{\sqrt{۲}}-۱=۰$، $p=۱$ و $\omega=\frac{\pi}{۴}$.

۱۷. معادلات و نقطهٔ تقاطع نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلثی را که از خطهای $۴x-۳y-۶۵=۰$، $۷x-۲۴y+۵۵=۰$ و $۳x+۴y-۵=۰$ به وجود می‌آید پیدا کنید.

جواب: نقطهٔ $(۱۰,۰)$ و $۷x+y-۷۰=۰$ ، $۲x+۱۱y-۲۰=۰$ و $۹x-۱۳y-۹۰=۰$.

۱۸. معادلات و نقطهٔ تقاطع نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلثی را که به‌وسیلهٔ خطهای $۷x+۶y-۱۱=۰$، $۹x-۲y+۷=۰$ و $۶x-۷y-۱۶=۰$ تشکیل می‌شود بیابید.

جواب: نقطهٔ $\left(\frac{۶}{۱۷},\frac{-۷}{۱۷}\right)$ و $۴x+y-۱=۰$ ، $۵x-۳y-۳=۰$ و $x+۱۳y+۵=۰$.

۱۹. معادلات و نقطهٔ تقاطع نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلثی را که به وسیلهٔ خطهای $y=۰$، $۳x-۴y=۰$ و $۴x+۳y-۵۰=۰$ ایجاد می‌شود پیدا کنید.

جواب: نقطهٔ $\left(\frac{۱۵}{۲},\frac{۵}{۲}\right)$ و $۷x-y-۵۰=۰$ ، $۲x+۴y-۲۵=۰$ و $x-۳y=۰$.

۲۰. مطلوب است تعیین نقطهٔ تقاطع نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلثی که رأسهای آن عبارتند از، $(-۱,۳)$، $(۳,۶)$، $\left(\frac{۳۱}{۵},۰\right)$.

جواب: $\left(\frac{۱۷}{۷},\frac{۲۴}{۷}\right)$.

۲۱. مختصات مرکز و شعاع دایرهٔ محاطی مثلثی را که به‌وسیلهٔ خطهای $۱۵x-۸y+۲۵=۰$،

$۵x+۱۲y-۳۰=۰$ و $۳x-۴y-۱۰=۰$ به‌وجود می‌آید به‌دست آورید.

جواب: $\frac{۱۳}{۷}=$ شعاع، $\left(\frac{۱}{۴}, \frac{۴}{۷}\right)$.

۲۲. مقدار K را طوری پیدا کنید که مقدار عددی فاصلهٔ مبدأ تا خط $y+۵=K(x-۳)$ برابر ۳ باشد. جواب: ∞، $K=\frac{-۸}{۱۵}$.

۲۳. نقطه‌ای طوری حرکت می‌کند که فاصله‌اش از خط $۵x+۱۲y-۲۰=۰$ همواره سه‌برابر فاصله‌اش از خط $۴x-۳y+۱۲=۰$ است. معادلهٔ مکان هندسی آن را پیدا کنید.

جواب: $۱۳۱x-۱۷۷y+۵۶۸=۰$، $۱۸۱x-۵۷y+۳۶۸=۰$.

۲۴. نقطه‌ای طوری حرکت می‌کند که مربع فاصله‌اش از نقطهٔ $(۳, -۲)$ برابر مقدار عددی فاصله‌اش از خط $۵x-۱۲y-۱۳=۰$ است، معادلهٔ مکان هندسی آن را پیدا کنید.

جواب: $۱۳x^۲+۱۳y^۲-۸۳x+۶۴y+۱۸۲=۰$؛

$۱۳x^۲+۱۳y^۲-۷۳x+۴۰y+۱۵۶=۰$.

۲۵. دو نقطه روی خط $۵x-۱۲y+۱۵=۰$ پیدا کنید که مقدار عددی فاصلهٔ آنها از خط $۳x+۴y-۱۲=۰$ برابر ۳ باشد.

جواب: $\left(-\frac{۱۲}{۷}, \frac{۱۵}{۲۸}\right)$ و $\left(\frac{۳۳}{۷}, \frac{۴۵}{۱۴}\right)$.

۲۶. دو خط موازی با $۸x-۱۵y+۳۴=۰$ پیدا کنید به‌طوری که مقدار عددی فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $(-۲, ۳)$، ۳ باشد.

جواب: $۸x-۱۵y+۱۰=۰$، $۸x-۱۵y+۱۱۲=۰$.

۲۷. نقطه‌ای طوری حرکت می‌کند که فاصله‌اش از خط $۳x-۴y-۲=۰$ همواره برابر فاصلهٔ آن از نقطهٔ $(-۱, ۲)$ است. معادلهٔ مکان هندسی آن را به‌دست آورید.

جواب: $۱۶x^۲+۲۴xy+۹y^۲+۶۲x-۱۱۶y+۱۲۱=۰$.

۲۸. طول ارتفاع رأس A تا ضلع BC و همچنین مساحت مثلثی را بیابید که رأسهایش عبارتند از:

الف) $A(-۳, ۳)$، $B(۵, ۵)$ و $C(۲, -۴)$.

جواب: $\frac{۱۱\sqrt{۱۰}}{۵}$ و ۳۳ واحد سطح.

ب) $A(۵, ۶)$، $B(۱, -۴)$ و $C(-۴, ۰)$.

جواب: $\frac{۶۶\sqrt{۴۱}}{۴۱}$ و ۳۳ واحد سطح.

ج) $A(-۱, ۴)$، $B(۱, -۴)$ و $C(۵, ۴)$.

جواب: $\frac{۱۲\sqrt{۵}}{۵}$ و ۲۴ واحد سطح.

د) $A(۰, ۴)$، $B(۵, ۱)$ و $C(۱, -۳)$.

جواب: $۴\sqrt{۲}$ و ۱۶ واحد سطح.

۲۹. مقدار K را در هریك از معادلات خط زیر طوری پیدا کنید که شرایط متناظر صادق باشد.

الف) $(۲+K)x-(۳-K)y+۴K+۱۴=۰$ از نقطهٔ $(۲, ۳)$ بگذرد.

جواب: $K=-۱$.

ب) ضریب زاویهٔ خط $Kx+(۳-K)y+۷=۰$، ۷ باشد.

جواب: $K=\frac{۷}{۲}$.

ج) مقدار عددی فاصلهٔ خط $۵x-۱۲y+۳+K=۰$، از $(۲, -۳)$، ۴ باشد.

جواب: $K=۸۸$، $K=-۱۶$.

۳۰. معادلهٔ خطی را پیدا کنید که از نقطهٔ تقاطع خطوط $۳x-۵y+۹=۰$ و $۴x+۷y-۲۸=۰$ بگذرد و در شرایط زیر نیز صادق باشد:

الف) از نقطهٔ $(-۳, -۵)$ بگذرد. جواب: $۱۳x-۸y-۱=۰$.

ب) از نقطهٔ $(۴, ۲)$ بگذرد. جواب: $۳۸x+۸۷y-۳۲۶=۰$.

ج) موازی با خط $۲x+۳y-۵=۰$ باشد.

جواب: $۸۲x+۱۲۳y-۵۱۴=۰$.

د) بر خط $۴x+۵y-۲۰=۰$ عمود باشد.

جواب: $۲۰۵x-۱۶۴y+۹۵=۰$.

ه) تقاطعهایش برابر باشند.

جواب: $120x-77y=0$، $41x+41y-197=0$.

۳۲. معادلهٔ خطی را به دست آورید که از نقطهٔ تقاطع خطهای $x-3y+1=0$ و $2x+5y-9=0$ بگذرد و فاصله‌اش از مبدأ مختصات برابر الف) ۲ باشد؛ ب) $\sqrt{5}$ باشد.

جواب: الف) $x-2=0$، $3x+4y-10=0$؛ ب) $2x+y-5=0$.

۴

دایره

هر دایره به وسیلهٔ معادله‌ای با دو متغیر از درجهٔ دوم نشان داده می‌شود. عکس قضیه فقط برای بعضی از صورتهای معادلات درجهٔ دوم صادق است.

یك دایره در صورتی که مرکز و شعاع آن معلوم باشد به‌طور کامل مشخص می‌شود.

معادلهٔ دایره. معادلهٔ دایره‌ای که مرکزش نقطهٔ (h, k) و شعاع آن r باشد عبارت است از:

$$(x-h)^{2}+(y-k)^{2}=r^{2}$$

اگر مرکز دایره در مبدأ مختصات باشد معادلهٔ دایره به‌صورت $x^{2}+y^{2}=r^{2}$ درمی‌آید.

هر معادلهٔ دایره را می‌توان به‌صورت زیر تبدیل کرد:

$$x^{2}+y^{2}+Dx+Ey+F=0$$

درصورتی که معادلهٔ فوق را به‌صورت $x^{2}+Dx+y^{2}+Ey+F=0$ بنویسیم و مربعات را کامل کنیم، داریم:

$$x^{2}+Dx+\frac{D^{2}}{4}+y^{2}+Ey+\frac{E^{2}}{4}=\frac{D^{2}}{4}+\frac{E^{2}}{4}-F$$

یا
$$\left(x+\frac{D}{۲}\right)^{۲}+\left(y+\frac{E}{۲}\right)^{۲}=\frac{D^{۲}+E^{۲}-۴F}{۴}$$

مرکز دایره نقطهٔ $\left(-\frac{E}{۲},-\frac{D}{۲}\right)$ و شعاع آن $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{D^{۲}+E^{۲}-۴F}$ است.

اگر $D^{۲}+E^{۲}-۴F>۰$، دایره حقیقی است.

اگر $D^{۲}+E^{۲}-۴F<۰$، دایره موهومی است.

اگر $D^{۲}+E^{۲}-۴F=۰$، شعاع دایره صفر است و معادلهٔ دایره، نقطهٔ $\left(-\frac{E}{۲},-\frac{D}{۲}\right)$ را نشان می‌دهد.

مسئله‌های حل شده

۰۱ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش نقطهٔ $(-۲,۳)$ وشعاع آن ۴ باشد.

$(x+۲)^{۲}+(y-۳)^{۲}=۱۶$، یا $x^{۲}+y^{۲}+۴x-۶y=۳$.

۰۲ مختصات مرکز و شعاع دایره‌ای را که معادله‌اش $x^{۲}+y^{۲}-۳x+۵y-۱۴=۰$ است، به‌وسیلهٔ الف) کامل‌کردن مربع؛ ب) دستور دایره به‌دست آورید:

الف)
$$x^{۲}-۳x+\frac{۹}{۴}+y^{۲}+۵y+\frac{۲۵}{۴}=۱۴+\frac{۹}{۴}+\frac{۲۵}{۴}،$$

یا
$$\left(x-\frac{۳}{۲}\right)^{۲}+\left(y+\frac{۵}{۲}\right)^{۲}=\frac{۹۰}{۴}$$

از این‌رو مرکز دایره نقطهٔ $\left(-\frac{۵}{۲},\frac{۳}{۲}\right)$ و شعاعش $r=\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۲}$ است.

ب)
$$h=-\frac{D}{۲}=\frac{۳}{۲}\ ,\ k=-\frac{E}{۲}=-\frac{۵}{۲}$$

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{D^{۲}+E^{۲}-۴F}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۹+۲۵+۵۶}=\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۲}.$$

۰۳ مقدار k را طوری تعیین کنیدکه $x^{۲}+y^{۲}-۸x+۱۰y+k=۰$ معادلهٔ دایره‌ای به‌شعاع ۷ باشد.

$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{D^{۲}+E^{۲}-۴F}$، بنابراین $۷=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴+۱۰۰-۴k}$.

طرفین را به‌توان دو می‌رسانیم و آن‌را نسبت به k حل می‌کنیم، $k=-۸$.

۴. معادلهٔ دایره‌ای را به‌دست آورید که مرکزش $(۵, -۲)$ باشد و از نقطهٔ $(-۱, ۵)$ بگذرد.

شعاع دایره برابر است با:

$$r=\sqrt{(۵+۱)^۲+(-۲-۵)^۲}=\sqrt{۳۶+۴۹}=\sqrt{۸۵}$$

بنا براین، $(x-۵)^۲+(y+۲)^۲=۸۵$، یا $x^۲+y^۲-۱۰x+۴y=۵۶$.

۵. معادلهٔ دایره‌ای را بیابید که یك قطر آن پاره‌خطی است که از اتصال نقاط $(۵, -۱)$ و $(-۳, ۷)$ ایجاد می‌شود.

مختصات مرکز عبارتند از، $h=\dfrac{۵-۳}{۲}=۱$، $k=\dfrac{-۱+۷}{۲}=۳$.

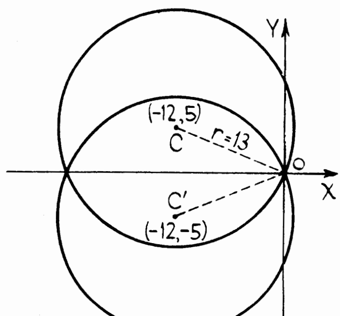
شعاع دایره برابر است با:

$$r=\sqrt{(۵-۱)^۲+(-۱-۳)^۲}=\sqrt{۱۶+۱۶}=۴\sqrt{۲}$$

پس $(x-۱)^۲+(y-۳)^۲=۳۲$، یا $x^۲+y^۲-۲x-۶y=۲۲$

۶. معادلهٔ دایره‌ای را که از نقطهٔ $(۰, ۰)$ می‌گذرد و شعاعش $r=۱۳$ و طول مرکزش -۱۲ است، بیابید.

چون دایره از مبدأ مختصات می‌گذرد، $h^۲+k^۲=r^۲$، یا $۱۴۴+k^۲=۱۶۹$.
با حل آن، $k^۲=۱۶۹-۱۴۴=۲۵$ و $k=\pm ۵$.



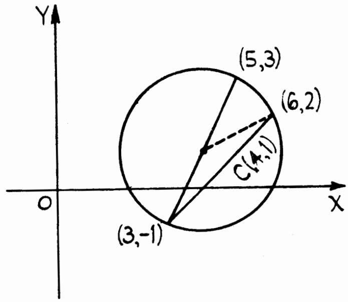
آنگاه، $(x+۱۲)^۲+(y-۵)^۲=۱۶۹$ و $(x+۱۲)^۲+(y+۵)^۲=۱۶۹$.
با بسط آن، $x^۲+y^۲+۲۴x-۱۰y=۰$ و $x^۲+y^۲+۲۴x+۱۰y=۰$.

۷. مطلوب است تعیین معادلهٔ دایره‌ای که از سه نقطهٔ $(۵, ۳)$، $(۶, ۲)$ و $(۳, -۱)$ بگذرد.

چون هر یك از اشکال استاندارد

$$x^۲+y^۲+Dx+Ey+F=۰ \text{ یا } (x-h)^۲+(y-k)^۲=r^۲$$

شامل سه ثابت نامعین است، تعیین این ضرایب مستلزم داشتن سه شرط است. با توجه



به اینکه دایره باید از این نقاط بگذرد، با جایگذاری مختصات نقاط به جای x و y می‌توان ضرایب مجهول‌را تعیین کرد و سه‌معادلهٔ خطی را برای یافتن D، E و F حل کرد. داریم:

$$۲۵+۹+۵D+۳E+F=۰$$

$$۳۶+۴+۶D+۲E+F=۰$$

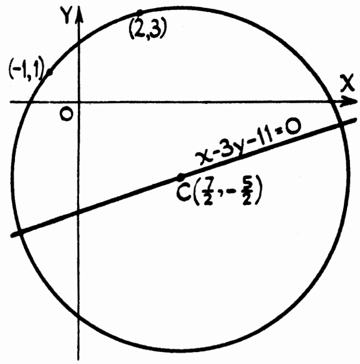
$$۹+۱+۳D-E+F=۰$$

با حل این سه معادله، $D=-۸$، $E=-۲$ و $F=۱۲$.
با قرار دادن این مقادیر به‌جای D، E و F، معادلهٔ دایره عبارت است از:

$$x^۲+y^۲-۸x-۲y+۱۲=۰$$

۸. معادلهٔ دایره‌ای را بیابید که از نقاط $(۲,۳)$ و $(-۱,۱)$ بگذرد و مرکزش روی‌خط $x-۳y-۱۱=۰$ باشد.

فرض کنید (h,k) مختصات مرکزدایره باشد. (h,k) بایداز $(۲,۳)$ و $(-۱,۱)$ به‌یك فاصله باشد، بنابراین $\sqrt{(h-۲)^۲+(k-۳)^۲}=\sqrt{(h+۱)^۲+(k-۱)^۲}$.
دو طرف را به‌توان دو می‌رسانیم و ساده می‌کنیم، $۶h+۴k=۱۱$.
مرکز دایره باید روی خط $x-۳y-۱۱=۰$ باشد، پس $h-۳k=۱۱$.
اگر این دو معادله را نسبت به h و k حل کنیم، داریم: $h=\frac{۷}{۲}$، $k=-\frac{۵}{۲}$.



پس $r=\sqrt{\left(\frac{۷}{۲}+۱\right)^۲+\left(-\frac{۵}{۲}-۱\right)^۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۳۰}$.

معادلهٔ مورد نظر عبارت است از:

$$\left(x-\frac{۷}{۲}\right)^۲+\left(y+\frac{۵}{۲}\right)^۲=\frac{۱۳۰}{۴}$$ ، یا $x^۲+y^۲-۷x+۵y-۱۴=۰$

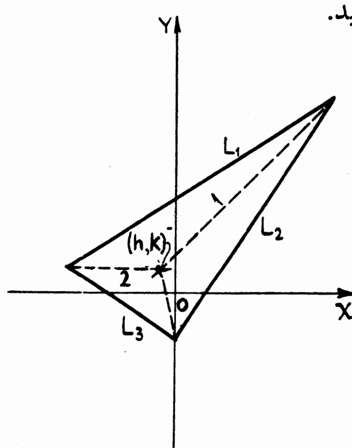
۹. معادلهٔ دایرهٔ محاط در مثلثی را که با خطوط

$$L_۱:\ ۲x-۳y+۲۱=۰$$

$$L_۲:\ ۳x-۲y-۶=۰$$

$$L_۳:\ ۲x+۳y+۹=۰$$

مشخص می‌شود پیدا کنید.



مرکز دایره درنقطهٔ تقاطع نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث قرار دارد، بنابراین لازم است معادلات نیمسازها را به‌دست‌آوریم. فرض کنید (h, k) مختصات مرکز دایره باشد. برای تعیین نیمساز (۱) (به‌شکل صفحهٔ قبل مراجعه کنید):

$$\frac{3h-2k-6}{\sqrt{13}}=\frac{2h-3k+21}{-\sqrt{13}}\text{، یا }h-k+3=0$$

برای یافتن نیمساز (۲):

$$\frac{2h-3k+21}{-\sqrt{13}}=\frac{2h+3k+9}{-\sqrt{13}}\text{، یا }6k-12=0$$

در نتیجه، $k=2$، $h=-1$، و $r=\frac{2(-1)+3(2)+9}{\sqrt{13}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$.

با قراردادن این مقادیر در رابطهٔ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ داریم:

$$(x+1)^2+(y-2)^2=13\text{، یا }x^2+y^2+2x-4y=8.$$

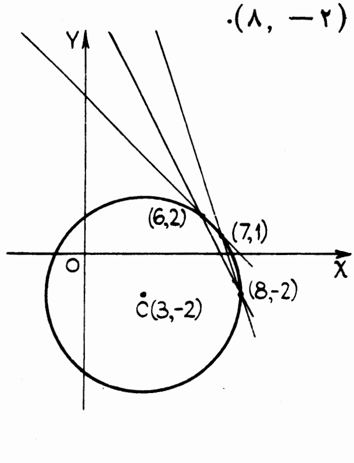
۱۵. معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلثی راکه به‌وسیلهٔ خطوط زیرمشخص می‌شود به‌دست‌آورید.

$$x+y=8$$

$$2x+y=14$$

$$3x+y=22$$

اگراین معادلات را دو به‌دو با هم حل کنیم، رأسهای مثلث عبارتند از نقطه‌های، $(6, 2)$، $(7, 1)$ و $(8, -2)$.



اگر مختصات این سه نقطه را درمعادلهٔ کلی دایرهٔ $x^۲+y^۲+Dx+Ey+F=۰$ قراردهیم، معادلات زیر به‌دست می‌آیند:

$$۶D+۲E+F=-۴۰$$

$$۷D+E+F=-۵۰$$

$$۸D-۲E+F=-۶۸$$

باحل آنها، $D=-۶$، $E=۴$، $F=-۱۲$. با جایگذاری این مقادیر در معادلهٔ کلی، معادلهٔ مطلوب به‌دست می‌آید:

$$x^۲+y^۲-۶x+۴y-۱۲=۰$$

۱۱. معادلهٔ دایره‌ای را به‌دست آورید که مرکزش نقطهٔ $(-۴ ,۲)$ و برخط $۳x+۴y-۱۶=۰$ مماس باشد.

شعاع دایره را می‌توان با تعیین فاصلهٔ $(-۴ ,۲)$ تاخط مماس به‌دست‌آورد.

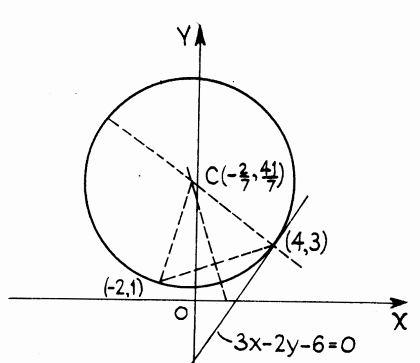
$$r=\left|\frac{۳(-۴)+۴(۲)-۱۶}{۵}\right|=\left|-\frac{۲۰}{۵}\right|=\left|-۴\right|=۴$$

معادلهٔ مطلوب عبارت است از:

$$(x+۴)^۲+(y-۲)^۲=۱۶ \text{ ، یا } x^۲+y^۲+۸x-۴y+۴=۰$$

۱۲. معادلهٔ دایره‌ای را به‌دست آورید که از نقطهٔ $(-۲ ,۱)$ بگذرد و برخط $۳x-۲y-۶=۰$ در نقطهٔ $(۴ ,۳)$ مماس باشد.

دایره باید از دو نقطهٔ $(-۲ ,۱)$ و $(۴ ,۳)$ بگذرد، بنابراین مرکز آن روی



عمودمنصف پاره‌خطی قرار دارد که این نقاط را به هم متصل می‌سازد. مرکز آن نیز باید روی خطی باشد که بر خط $۳x-۲y-۶=۰$ در نقطهٔ $(۴, ۳)$ عمود است.

معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط، $۳x+y-۵=۰$ است.

معادلهٔ خط قائم بر $۳x-۲y-۶=۰$ در نقطهٔ $(۴, ۳)$ عبارت است از، $۲x+۳y-۱۷=۰$. باحل همزمان $۲x+۳y-۱۷=۰$ و $۳x+y-۵=۰$، داریم، $x=-\frac{۲}{۷}$ و $y=\frac{۴۱}{۷}$. در نتیجه:

$$r=\sqrt{\left(۴+\frac{۲}{۷}\right)^۲+\left(۳-\frac{۴۱}{۷}\right)^۲}=\frac{۱۰}{۷}\sqrt{۱۳}$$

معادلهٔ مطلوب عبارت است از:

$$\left(x+\frac{۲}{۷}\right)^۲+\left(y-\frac{۴۱}{۷}\right)^۲=\frac{۱۳۰۰}{۴۹}$$

یا
$$۷x^۲+۷y^۲+۴x-۸۲y+۵۵=۰$$

۱۳. معادلهٔ مکان هندسی رأس زاویهٔ قائمهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای را به‌دست‌آورید که وترش پاره‌خطی است که نقاط $(۰, b)$، (a, b) را به‌هم متصل می‌کند.

فرض‌کنید (x, y) رأس زاویهٔ قائمه باشد. چون دوساق مثلث باید برهم عمود باشند، ضریب زاویهٔ یکی از ساقها عکس قرینهٔ ضریب زاویهٔ ساق دیگراست، یا:

$$\frac{y-b}{x-۰}=-\frac{۱}{\frac{y-b}{x-a}}=-\frac{x-a}{y-b}$$

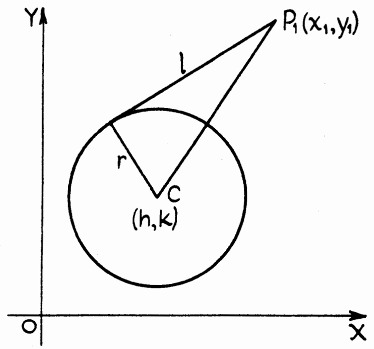
باساده‌کردن آن، $(y-b)^۲=-x(x-a)$، یا $x^۲+y^۲-ax-۲by+b^۲=۰$ (معادلهٔ یك دایره).

۱۴. طول مماس از نقطهٔ $P_۱(x_۱, y_۱)$ تا دایرهٔ $(x-h)^۲+(y-k)^۲=r^۲$ را بیابید.

$$l^۲=(P_۱C)^۲-r^۲ \quad \text{یا} \quad l^۲=(x_۱-h)^۲+(y_۱-k)^۲-r^۲$$

و
$$l=\sqrt{(x_۱-h)^۲+(y_۱-k)^۲-r^۲}$$

ازاین‌رو طول مماسی که از هرنقطهٔ خارج دایره بردایره رسم می‌شود برابر است با ریشهٔ دوم عددی که از قراردادن مختصات نقطه درمعادلهٔ دایره به‌دست می‌آید.



۱۵• تعریف. مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت به‌دو دایره دارای طولهای مماس مساوی‌است، خط راستی است که محور اصلی دو دایره نامیده می‌شود.

معادلهٔ محور اصلی دو دایرهٔ زیررا به‌دست‌آورید.

$$x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$$

و

$$x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$$

فرض کنید $P'(x', y')$ نقطه‌ای دلخواه روی محور اصلی باشد. l_1 و l_2 طولهای مماسهای از P' به‌دو دایره هستند. درنتیجه:

$$l_1=\sqrt{x'^2+y'^2+d_1x'+e_1y'+f_1}$$

و

$$l_2=\sqrt{x'^2+y'^2+d_2x'+e_2y'+f_2}$$

چون $l_1=l_2$:

$$\sqrt{x'^2+y'^2+d_1x'+e_1y'+f_1}=\sqrt{x'^2+y'^2+d_2x'+e_2y'+f_2}$$

عبارت را به‌توان‌دو می‌رسانیم، ساده می‌کنیم وسپس پریمها را حذف می‌کنیم،

$(d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+f_1-f_2=0$، که خطی راست است.

۱۶• معادلهٔ دسته دوایری را بنویسید که از نقاط تقاطع دو دایرهٔ مفروض می‌گذرند.

فرض کنید،

$$x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0 \quad \text{و} \quad x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$$

دودایرهٔ متقاطع باشند.

آنگاه $x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1+k(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0$

یك چنین دسته‌ای را ارائه می‌دهد، چون مختصات نقاط تقاطع باید معادلهٔ هریك از دوایر را صفر کند، به ازای تمام مقادیر k به‌جز $k=-۱$، معادلهٔ یك دایره حاصل می‌شود. اگر $k=-۱$، این معادله به‌خطی راست که وترمشترك دودایره است، تبدیل می‌شود.

۱۷۰ معادلات دایره‌هایی را به‌دست آورید که از نقاط $A(۱, ۲)$ و $B(۳, ۴)$ بگذرند و برخط $۳x+y-۳=۰$ مماس باشند.

برای تعیین مختصات مرکز $C(h, k)$، می‌دانیم که $CA=CB$ و $CA=CN$،

یا
$$(h-۱)^۲+(k-۲)^۲=(h-۳)^۲+(k-۴)^۲$$

و
$$(h-۱)^۲+(k-۲)^۲=\left(\frac{۳h+k-۳}{\sqrt{۱۰}}\right)^۲$$

این دومعادله را بسط می‌دهیم و ساده می‌کنیم، داریم:

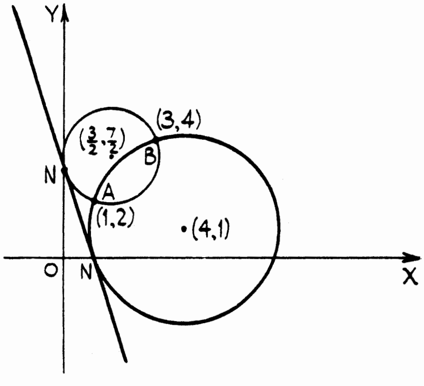
$$h^۲+۹k^۲-۶hk-۲h-۳۴k+۴۱=۰ \text{ و } h+k=۵$$

این معادلات را همزمان حل می‌کنیم. نتیجه می‌گیریم:

$$k=\frac{۷}{۲} ،h=\frac{۳}{۲} \text{ و } k=۱ ،h=۴$$

از $r=\frac{۳h+k-۳}{\sqrt{۱۰}}$، نتیجه می‌گیریم

$$r=\frac{\frac{۹}{۲}+\frac{۷}{۲}-۳}{\sqrt{۱۰}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲} \text{ و } r=\frac{۱۲+۱-۳}{\sqrt{۱۰}}=\sqrt{۱۰}$$



با استفاده از دستور $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$، داریم:

$$(x-4)^2+(y-1)^2=10$$

و
$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{10}{4}$$

از بسط این معادلات به‌دست می‌آوریم:

$$x^2+y^2-8x-2y+7=0 \quad \text{و} \quad x^2+y^2-3x-7y+12=0.$$

۱۸. معادلهٔ دایره‌ای به‌شعاع ۵ و مماس برخط $3x+4y-16=0$ درنقطهٔ $(4, 1)$ را به‌دست آورید.

اگر نقطهٔ (h, k) را مرکز دایره فرض کنیم، $\pm 5=\frac{3h+4k-16}{5}$،

یا
$$3h+4k-16=\pm 25$$

همچنین، $(h-4)^2+(k-1)^2=25$، یا $h^2+k^2-8h-2k=8$.

باحل همزمان دومعادله، دوجواب معادله عبارتند از $(7, 5)$ و $(1, -3)$.

معادلات دایره‌ها $(x-7)^2+(y-5)^2=25$ و $(x-1)^2+(y+3)^2=25$ هستند.

۱۹. معادلات دو دایره‌ای را به دست آورید که برخطوط $3x-4y+1=0$ و $4x+3y-7=0$ مماس باشند و ازنقطهٔ $(2, 3)$ نیز بگذرند.

نقطهٔ (h, k) را مرکزدایره فرض می‌کنیم:

$$\frac{4h+3k-7}{5}=\frac{3h-4k+1}{-5}، \text{ یا } 7h-k-6=0 \qquad \text{(الف)}$$

همچنین چون $r=\frac{3h-4k+1}{-5}$،

$$(h-2)^2+(k-3)^2=\left(\frac{3h-4k+1}{-5}\right)^2،$$

یا
$$16h^2+9k^2-106h-142k+24hk+324=0 \qquad \text{(ب)}$$

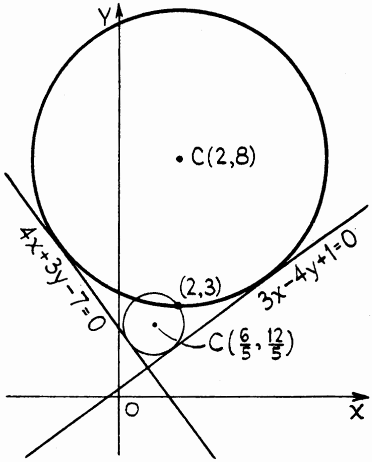
باحل همزمان (الف) و (ب) مختصات دومرکز عبارتند از، $(2, 8)$ و $\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

اگر $(2,8)$ مرکز دایره باشد، $5=\frac{6-32+1}{-5}=\frac{3h-4k+1}{-5}=r$ و

معادلهٔ دایره عبارت است از، $(x-2)^2+(y-8)^2=25$.

اگر $\left(\frac{۶}{۵}, \frac{۱۲}{۵}\right)$ مرکز دایره باشد، $r=۱$ و معادلهٔ دایره عبارت است از:

$$\left(x-\frac{۶}{۵}\right)^۲+\left(y-\frac{۱۲}{۵}\right)^۲=۱$$



۲۵. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که برخطوط $x+y+۴=۰$ و $۷x-y+۴=۰$ مماس باشد و مرکزش برخط $۴x+۳y-۲=۰$ واقع باشد.

نقطهٔ (h, k) را به‌عنوان مرکز دایره به‌کار می‌گیریم. درنتیجه:

$$\frac{h+k+۴}{\sqrt{۲}}=\pm\frac{۷h-k+۴}{۵\sqrt{۲}}$$

یا
$$۳h+k+۶=۰ \text{ و } h-۳k-۸=۰$$

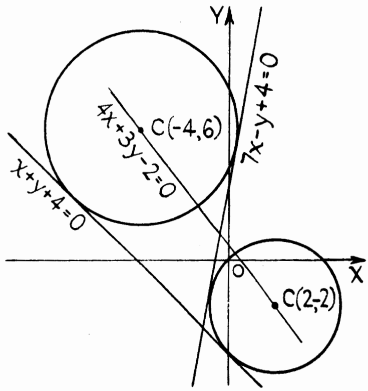
که این‌دو، معادلات نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط هستند. چون مرکز دایره باید روی $۴x+۳y-۲=۰$ واقع باشد، درنتیجه $۴h+۳k-۲=۰$. باحل این‌معادله و معادلهٔ $h-۳k-۸=۰$، نتیجه می‌گیریم $h=۲$ و $k=-۲$.

آنگاه $r=\frac{۲-۲+۴}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}$، و معادلهٔ این دایره عبارت است از:

$$(x-۲)^۲+(y+۲)^۲=۸$$

با به کار گیری معادلات $۴h+۳k-۲=۰$ و $۳h+k+۶=۰$، $h=-۴$، $k=۶$ و $r=۳\sqrt{۲}$. درنتیجه معادلهٔ این دایره عبارت است از:

$$(x+۴)^۲+(y-۶)^۲=۱۸$$



۲۱. نقطه (x', y') طوری حرکت می‌کند که مجموع مربعات فواصلش از خطهای $۵x+۱۲y-۴=۰$ و $۱۲x-۵y+۱۰=۰$ برابر ۵ است. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطهٔ (x', y').

فاصلهٔ نقطهٔ (x', y') از خط $۵x+۱۲y-۴=۰$ برابر است با، $\frac{۵x'+۱۲y'-۴}{۱۳}$، و از خط $۱۲x-۵y+۱۰=۰$ برابر است با، $\frac{۱۲x'-۵y'+۱۰}{-۱۳}$. درنتیجه:

$$\left(\frac{۵x'+۱۲y'-۴}{۱۳}\right)^۲+\left(\frac{۱۲x'-۵y'+۱۰}{-۱۳}\right)^۲=۵$$

باساده کردن و حذف پریمها، داریم، $۱۶۹x^۲+۱۶۹y^۲+۲۰۰x-۱۹۶y=۷۲۹$، که معادلهٔ یك دایره است.

۲۲. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطهٔ (x, y)، طوری که مجموع مربعات فواصلش ازنقاط $(۲, ۳)$ و $(-۱, -۲)$ برابر ۳۴ باشد.

$$(x-۲)^۲+(y-۳)^۲+(x+۱)^۲+(y+۲)^۲=۳۴$$

با ساده کردن عبارت فوق، داریم، $x^۲+y^۲-x-y=۸$ که یك دایره است.

۲۳. معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ (x, y) راکه نسبت فاصله‌اش از $(-۱, ۳)$ به‌فاصله‌اش از $(-۲, ۳)$ برابر $\frac{a}{b}$ است، به دست آورید.

$\dfrac{\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}}{\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}}=\dfrac{a}{b}$. این‌معادله را به‌توان‌دو می‌رسانیم وساده می‌کنیم.

معادلهٔ مطلوب عبارت است از:

$$(b^2-a^2)x^2+(b^2-a^2)y^2+2(b^2+3a^2)x-$$
$$-2(3b^2+2a^2)y=13a^2-10b^2$$

که معادلهٔ دایره است.

۲۴. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای مثل (x, y) را که مربع فاصله‌اش از $(-5, 2)$ برابر فاصله‌اش ازخط $5x+12y-26=0$ است، به‌دست‌آورید:

$$(x+5)^2+(y-2)^2=\pm\left(\frac{5x+12y-26}{13}\right)$$

این عبارت را بسط می‌دهیم وساده می‌کنیم:

$$13x^2+13y^2+125x-64y+403=0$$

و
$$13x^2+13y^2+135x-40y+351=0$$

که معادلهٔ دایره هستند.

۲۵. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که با دایرهٔ $x^2+y^2-4x+6y-17=0$ هم‌مرکز و برخط $3x-4y+7=0$ مماس باشد.

مرکز دایـرهٔ مفروض $(2, -3)$ است. شعاع دایرهٔ موردنظر برابر فاصلهٔ نقطـهٔ $(2, -3)$ تاخط $3x-4y+7=0$ است، به‌عبارت دیگر $r=\dfrac{6+12+7}{5}=5$.

درنتیجه معادلهٔ مطلوب عبارت است از، $(x-2)^2+(y+3)^2=25$.

۲۶. معادلهٔ دوایری به‌شعاع ۱۵ رابنویسید که بردایرهٔ $x^2+y^2=100$ درنقطهٔ $(6, -8)$ مماس باشند.

مرکزاین دوایر باید روی خطی باشدکـه از $(0, 0)$ و $(6, -8)$ می‌گذرد. معادلهٔ این خط عبارت است از، $y=-\frac{4}{3}x$.

با استفاده از نقطهٔ (h, k)، به عنوان مرکز دایره:

$$(h-6)^2+(k+8)^2=225 \quad \text{و} \quad k=-\frac{4}{3}h$$

با حل این معادلات نسبت به h و k، مختصات دو مرکز عبارتند از، $(-3, 4)$ و $(15, -20)$.

معادلات دو دایره عبارتند از:

$$(x+3)^2+(y-4)^2=225 \quad \text{و} \quad (x-15)^2+(y+20)^2=225$$

مسئله‌های تکمیلی

۱. معادلهٔ دایره‌ای را بیابید که:

الف) مرکزش نقطهٔ $(3, -1)$ وشعاعش ۵ باشد.

جواب: $x^2+y^2-6x+2y-15=0$.

ب) مرکزش نقطهٔ $(0, 5)$ وشعاعش ۵ باشد.

جواب: $x^2+y^2-10y=0$.

ج) مرکزش نقطهٔ $(-4, 2)$ وقطرش ۸ باشد.

جواب: $x^2+y^2+8x-4y+4=0$.

د) مرکزش نقطهٔ $(4, -1)$ باشد واز نقطهٔ $(-1, 3)$ بگذرد.

جواب: $x^2+y^2-8x+2y-24=0$.

ه) پاره‌خطی که از اتصال نقطه‌های $(-3, 5)$ و $(7, -3)$ به‌وجود می‌آید، یك قطر آن باشد. جواب: $x^2+y^2-4x-2y-36=0$.

و) مرکزش $(-4, 3)$ و برمحور yها مماس باشد.

جواب: $x^2+y^2+8x-6y+9=0$.

ز) مرکزش نقطهٔ $(3, -4)$ باشد و ازمبدأ مختصات بگذرد.

جواب: $x^2+y^2-6x+8y=0$.

ح) مرکزش مبدأ مختصات باشد ومحور xها را درنقطه‌ای به‌طول ۶ قطع کند.

جواب: $x^2+y^2-36=0$.

ط) برمحورهای مختصات مماس، مرکزش درناحیهٔ اول و $r=8$ باشد.

جواب: $x^2+y^2-16x-16y+64=0$.

ی) ازمبدأ مختصات بگذرد، شعاع آن ۱۰، وطول مرکزش ۶− باشد.

جواب: $x^2+y^2+12x+16y=0$، $x^2+y^2+12x-16y=0$.

۲. مرکز وشعاع هریك ازدایره‌های زیررا بیابید. معین‌کنیدکه آیا دایره، دایره‌ای است حقیقی یاموهومی‌یاتنها یك‌نقطه. ابتدا از دستور استفاده‌کنید و آنگاه باکامل کردن مربع نتیجه را تحقیق کنید.

الف) $x^2+y^2-8x+10y-12=0$.

جواب: $(4,\ -5)$، $r=\sqrt{53}$، حقیقی.

ب) $3x^2+3y^2-4x+2y+6=0$.

جواب: $\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$، $r=\frac{1}{3}\sqrt{-13}$، موهومی.

ج) $x^2+y^2-8x-7y=0$.

جواب: $\left(4,\ \frac{7}{2}\right)$، $r=\frac{1}{2}\sqrt{113}$، حقیقی.

د) $x^2+y^2=0$. جواب: $(0,\ 0)$، $r=0$، نقطه.

ه) $2x^2+2y^2-x=0$. جواب: $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$، $r=\frac{1}{4}$، حقیقی.

۳. معادلهٔ دایره‌ای راکه ازسه نقطهٔ زیرمی‌گذرد به‌دست‌آورید.

الف) $(4,\ 5)$، $(3,\ -2)$ و $(1,\ -4)$.

جواب: $x^2+y^2+7x-5y-44=0$.

ب) $(8,\ -2)$، $(6,\ 2)$ و $(3,\ -7)$.

جواب: $x^2+y^2-6x+4y-12=0$.

ج) $(1,\ 1)$، $(1,\ 3)$ و $(9,\ 2)$.

جواب: $8x^2+8y^2-79x-32y+95=0$.

د) $(-4,\ -3)$، $(-1,\ -7)$ و $(0,\ 0)$.

جواب: $x^2+y^2+x+7y=0$.

ه) $(1,\ 2)$، $(3,\ 1)$ و $(-3,\ -1)$. جواب: $x^2+y^2-x+3y-10=0$.

۴. معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلثی را که از خطوط زیر به‌وجود می‌آید به‌دست آورید.

الف) $۴x+y-۱۷=۰$، $۲x+۳y-۱=۰$ و $x-y+۲=۰$.

جواب: $۵x^۲+۵y^۲-۳۲x-۸y-۳۴=۰$.

ب) $x-y+۱=۰$، $۲x+y-۷=۰$ و $x+۲y-۵=۰$.

جواب: $۳x^۲+۳y^۲-۱۳x-۱۱y+۲۰=۰$.

ج) $x+y-۵=۰$، $x+۲y-۳=۰$ و $۳x+۲y-۱۳=۰$.

جواب: $x^۲+y^۲-۱۷x-۷y+۵۲=۰$.

د) $x-۷y-۱۹=۰$، $x-y-۱=۰$ و $۲x+y-۸=۰$.

جواب: $۳x^۲+۳y^۲-۸x+۸y-۳۱=۰$.

ه) $x-۷y-۱۳=۰$، $۳x+۵y-۹=۰$ و $۲x-y+۷=۰$.

جواب: $۱۶۹x^۲+۱۶۹y^۲-۸x+۴۹۸y-۳۷۵۷=۰$.

۵. معادلهٔ دایرهٔ محاطی مثلث حاصل ازخطوط زیررا به‌دست آورید.

الف) $۳x+۴y-۵=۰$، $۷x-۲۴y+۵۵=۰$ و $۴x-۳y-۶۵=۰$.

جواب: $x^۲+y^۲-۲۰x+۷۵=۰$.

ب) $۶x-۷y-۱۶=۰$، $۹x-۲y+۷=۰$ و $۷x+۶y-۱۱=۰$.

جواب: $۸۵x^۲+۸۵y^۲-۶۰x+۷۰y-۹۶=۰$.

ج) $۴x+۳y-۵۰=۰$، $۳x-۴y=۰$ و $y=۰$.

جواب: $۴x^۲+۴y^۲-۶۰x-۲۰y+۲۲۵=۰$.

د) $۵x+۱۲y-۳۰=۰$، $۳x-۴y-۱۰=۰$ و $۱۵x-۸y+۲۵=۰$.

جواب: $۷۸۴x^۲+۷۸۴y^۲-۸۹۶x-۳۹۲y-۲۳۹۹=۰$.

ه) محاط درمثلثی که رأسهایش عبارتند از، $(-۱, ۳)$، $(۳, ۶)$ و $(\frac{۳۱}{۵}, ۰)$.

جواب: $۷x^۲+۷y^۲-۳۴x-۴۸y+۱۰۳=۰$.

۶. معادلهٔ دایره‌ای را به‌دست آورید که مرکزش نقطهٔ $(-۲, ۳)$ و برخط $۲۰x-۲۱y-۴۲=۰$ مماس باشد. جواب: $x^۲+y^۲+۴x-۶y-۱۲=۰$.

۷. معادلهٔ دایره‌ای را به دست آورید که مرکزش مبدأ مختصات و برخط $۸x-۱۵y-۱۲=۰$ مماس باشد. جواب: $۲۸۹x^۲+۲۸۹y^۲=۱۴۴$.

۸. معادلهٔ دایره‌ای را به‌دست‌آورید که مرکزش نقطهٔ $(-۱, -۳)$ وبرخطی که از نقاط $(-۲, ۴)$ و $(۲, ۱)$ می‌گذرد مماس باشد.

جواب: $x^۲+y^۲+۲x+۶y-۱۵=۰$.

۹. معادلهٔ دایره‌ای را به‌دست آورید که مرکزش بر روی محور xها باشد، و از دو نقطهٔ $(-۲, ۳)$ و $(۴, ۵)$ بگذرد. جواب: $۳x^۲+۳y^۲-۱۴x-۶۷=۰$.

۱۰. معادلهٔ دایره‌ای را به‌دست آورید که از نقاط $(۱, -۴)$ و $(۵, ۲)$ بگذرد و دارای مرکزی روی خط $x-۲y+۹=۰$ باشد.

جواب: $x^۲+y^۲+۶x-۶y-۴۷=۰$.

۱۱. معادلهٔ دایرهٔ گذرنده از نقاط $(-۳, ۲)$ و $(۴, ۱)$ و مماس بر محور xها را به‌دست آورید. جواب: $x^۲+y^۲-۴۲x-۲۹۰y+۴۴۱=۰$،

$x^۲+y^۲-۲x-۱۰y+۱=۰$.

۱۲. مطلوب است تعیین معادلهٔ دایرهٔ گذرنده از نقاط $(۲, ۳)$ و $(۳, ۶)$ و مماس بر خط $۲x+y-۲=۰$.

جواب: $x^۲+y^۲-۲x-۱۰y+۲۱=۰$، $x^۲+y^۲-۲۶x-۲y+۴۵=۰$.

۱۳. معادلهٔ دایره‌ای را به‌دست آورید که از نقطهٔ $(۱۱, ۲)$ بگذرد و بر خط $۲x+۳y-۱۸=۰$ درنقطهٔ $(۳, ۴)$ مماس باشد.

جواب: $۵x^۲+۵y^۲-۹۸x-۱۴۲y+۷۳۷=۰$.

۱۴. معادلهٔ دایرهٔ مماس برخط $۳x-۴y-۱۳=۰$ در نقطهٔ $(۷, ۲)$ و به‌شعاع ۱۰، را به‌دست آورید. جواب: $x^۲+y^۲-۲x-۲۰y+۱=۰$،

$x^۲+y^۲-۲۶x+۱۲y+۱۰۵=۰$.

۱۵. معادلهٔ دایره‌ای را به‌دست آورید که بر دو خط $x-۲y+۴=۰$ و $۲x-y-۸=۰$ مماس باشد و از نقطهٔ $(۴, -۱)$ نیز بگذرد.

جواب: $x^۲+y^۲-۷۰x+۴۶y+۳۰۹=۰$،

$x^۲+y^۲-۳۰x+۶y+۱۰۹=۰$.

۱۶. مطلوب است تعیین معادلهٔ دایره‌ای که بر دو خط $x-۳y+۹=۰$ و $۳x+y-۳=۰$ مماس و مرکزش روی خط $۷x+۱۲y-۳۲=۰$ باشد.

جواب: $۹۶۱x^۲+۹۶۱y^۲+۲۴۸x-۵۲۷۰y+۷۲۰۱=۰$،

$x^۲+y^۲+۸x-۱۰y+۳۱=۰$.

۱۷. مطلوب است تعیین معادلهٔ دایره‌ای که مکان هندسی رأس زاویهٔ قائمهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشد که وترش پاره‌خطی است که از اتصال نقاط $(-۴, ۱)$ و $(۳, ۲)$ به‌دست

می آید. جواب: $x^2+y^2+x-3y-10=0$.

۱۸. معادلهٔ دایره‌ای را به‌دست آورید که بردو خط $4x+3y-50=0$ و $3x-4y-25=0$ مماس وشعاعش برابر ۵ باشد.

جواب: $x^2+y^2-36x-2y+300=0$،

$x^2+y^2-20x+10y+100=0$،

$x^2+y^2-8x-6y=0$،

$x^2+y^2-24x-18y+200=0$.

۱۹. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بنویسید که مجموع مربعات فواصلش از دوخط عمود برهم $2x+3y-6=0$ و $3x-2y+8=0$ برابر ۱۰ باشد. درصورتی که مکان فوق دایره باشد، مطلوب است تعیین مرکز وشعاع دایره.

جواب: $13x^2+13y^2+24x-68y-30=0$،

$r=\sqrt{10}$، مرکز $\left(-\frac{12}{13}, \frac{34}{13}\right)$.

۲۰. نشان دهید مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعات فواصلش از دوخط عمود برهم $a_1x+b_1y+c_1=0$ و $b_1x-a_1y+c_2=0$ برابر مقدار ثابت k^2 باشد، یک دایره است.

۲۱. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بنویسید که مجموع مربعات فواصلش از $(-2, -5)$ و $(3, 4)$ برابر ۷۰ باشد. درصورتی که مکان یك دایره باشد، مرکز و شعاع آن را تعیین کنید.

جواب: $r=\frac{1}{2}\sqrt{34}$، مرکز $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$، $x^2+y^2-x+y-8=0$.

۲۲. معادلهٔ مکان‌هندسی نقطه‌ای را بنویسید که نسبت فاصله‌اش از نقطهٔ $(2, -1)$ به‌فاصله‌اش از $(-3, 4)$ برابر $\frac{2}{3}$ باشد. درصورتی که مکان‌فوق‌دایره باشد، مطلوب است تعیین مرکز وشعاع آن.

جواب: $r=6\sqrt{2}$، مرکز $(6, -5)$، $x^2+y^2-12x+10y-11=0$.

۲۳. ثابت کنید مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از هردونقطهٔ دلخواه (a, b) و (c, d) برابر k (عددی است ثابت) باشد، یك دایره خواهد بود.

۲۴. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بنویسید که مربع فاصله‌اش از نقطهٔ $(-2, -5)$،

۳ برابر فاصله‌اش ازخط $8x+15y-34=0$ باشد.

جواب: $17x^2+17y^2+92x+215y+391=0$،

$17x^2+17y^2+44x+125y+595=0$.

۲۵. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که برخط $3x-4y+17=0$ مماس و با دایرهٔ $x^2+y^2-4x+6y-11=0$ هم‌مرکز باشد.

جواب: $x^2+y^2-4x+6y-36=0$.

۲۶. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بردایرهٔ $x^2+y^2=25$ درنقطهٔ $(3,4)$ مماس‌ودارای شعاعی برابر ۱۰ باشد.

جواب: $x^2+y^2+6x+8y-75=0$،

$x^2+y^2-18x-24y+125=0$.

۲۷. میله‌ای به‌طول ۳۰ اینچ طوری جابه‌جا می‌شود که دوسر انتهاییش روی دوسیم عمود برهم قرار می‌گیرد. مطلوب است تعیین مکان هندسی وسط میله.

جواب: $x^2+y^2=225$، یك دایره.

۲۸. بیشترین و کمترین فاصلهٔ نقطهٔ $(10,7)$ را ازدایرهٔ $x^2+y^2-4x-2y-20=0$ پیدا کنید. جواب: ۱۵ و ۵.

۲۹. طول مماس ازنقطهٔ $(7,8)$ تادایرهٔ $x^2+y^2=9$ را بیابید.

جواب: $2\sqrt{26}$.

۳۰. مطلوب است تعیین طول مماس از نقطهٔ $(6,4)$ تادایرهٔ $x^2+y^2+4x+6y-19=0$.

جواب: ۹.

۳۱. مطلوب است تعیین مقدار k که به‌ازای آن طول مماس از نقطهٔ $(5,4)$ تا دایرهٔ $x^2+y^2+2ky=0$، الف) برابر یك باشد؛ ب) برابر صفر باشد.

جواب: الف) $k=-5$؛ ب) $k=-5{,}125$.

۳۲. معادلات سه محور اصلی دوایر داده شدهٔ زیر راکه دوبه‌دو دارای یك محور اصلیند، تعیین کنید، وثابت کنید که سه‌محوراصلی همدیگررا دریك نقطه قطع می‌کنند.

$$x^2+y^2-1=0$$

$$x^2+y^2-2x-y-6=0$$

$$x^2+y^2+3x-2y-4=0$$

جواب: $2x+y+5=0$، $3x-2y-3=0$، $5x-y+2=0$؛

نقطهٔ تقاطع $(-1, -3)$. این نقطه مرکز اصلی دایره‌ها نامیده می‌شود.

۳۳. معادلات سه‌محور اصلی سه دایرهٔ معین شدهٔ زیر را دو به‌دو پیدا کنید. مرکز اصلی را بیابید.

$2x^2+2y^2+5x+3y+9=0$، $x^2+y^2+4y+7=0$ و $x^2+y^2+x=0$.

جواب: مرکز اصلی $(-1, -2)$، $x-y-1=0$، $x+y+3=0$ و $x-4y-7=0$.

۳۴. معادلات محورهای اصلی سه‌دایرهٔ مفروض زیر را دو به‌دو پیدا کنید: همچنین مرکز اصلی را تعیین کنید.

$$x^2+y^2-4x+16y+43=0$$
$$x^2+y^2-4x-21=0$$
$$x^2+y^2+12x+11=0$$

جواب: مرکز اصلی $(-2, -4)$، $y+4=0$، $x-y-2=0$ و $x+2=0$.

۳۵. معادلهٔ دایره‌ای را بیابید که شامل نقطهٔ $(-2, 2)$ باشد و از نقطه‌های تقاطع دو دایرهٔ $x^2+y^2+3x-2y-4=0$ و $x^2+y^2-2x-y-6=0$ نیز بگذرد.

جواب: $5x^2+5y^2-7y-26=0$.

۳۶. معادلهٔ دایره‌ای را پیدا کنید که شامل نقطهٔ $(3, 1)$ باشد و از نقطه‌های تقاطع دو دایرهٔ $x^2+y^2-x-y-2=0$ و $x^2+y^2+4x-4y-8=0$ نیز بگذرد.

جواب: $3x^2+3y^2-13x+3y+6=0$.

۳۷. معادلهٔ دایره‌ای را تعیین کنید که از نقاط تقاطع دایره‌های $x^2+y^2-6x+2y+4=0$ و $x^2+y^2+2x-4y-6=0$ بگذرد و مرکزش روی خط $y=x$ واقع باشد.

جواب: $7x^2+7y^2-10x-10y-12=0$.

۵

مقاطع مخروطی ـ سهمی

تعریف. هرگاه نقطه‌ای چنان حرکت کند که فاصله‌اش از یک نقطهٔ ثابت، به‌فاصله‌اش از خطی ثابت، نسبتی ثابت باشد، مسیرش مقطع مخروطی یا یک مخروطی نامیده می‌شود.

نقطهٔ ثابت کانون مقطع‌مخروطی، خط ثابت هادی و نسبت ثابت خروج از مرکز است که معمولاً با حرف e نشان داده می‌شود.

مقاطع مخروطی به سه دسته تقسیم می‌شوند، که درشکل و خواص معینی باهم فرق دارند. این سه دسته به‌وسیلهٔ مقدار خروج از مرکز e از هم متمایز می‌شوند.

اگر $e < ۱$، مقطع مخروطی یک بیضی است.

اگر $e = ۱$، مقطع‌مخروطی یک سهمی است.

اگر $e > ۱$، مقطع مخروطی یک هذلولی است.

سهمی. فرض کنید $L'L$ خط ثابت و F نقطهٔ ثابت باشد. از نقطهٔ F محور xها را عمود بر خط ثابت رسم می‌کنیم. فرض کنید فاصلهٔ F تا $L'L$ برابر $۲a$ باشد. بنابراین بنابه تعریف سهمی، منحنی باید محور xها را در نقطه‌ای مثل O، وسط پاره‌خط بین F و $L'L$ قطع کند. از نقطهٔ O محور yها را رسم می‌کنیم.

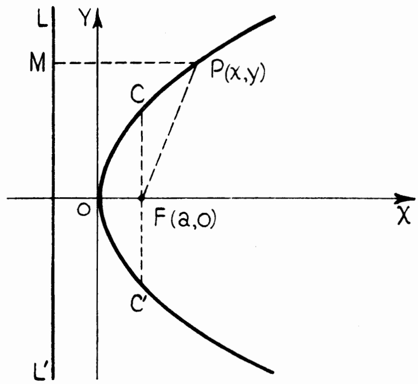
مختصات F عبارتند از $(a, ۰)$، و معادلهٔ خط هادی عبارت است از:

$$x+a=0 \text{ یا } x=-a$$

نقطهٔ اختیاری $P(x, y)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\frac{PF}{PM}=e=1$.

در نتیجه $\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}=x+a$. عبارت را به‌توان دو می‌رسانیم:

$$x^2-2ax+a^2+y^2=x^2+2ax+a^2 \text{، یا } y^2=4ax$$



از روی ظاهر معادله مشاهده می‌شود که منحنی نسبت به محور xها متقارن است. نقطه‌ای که در آن منحنی محور تقارنش را قطع می‌کند رأس سهمی نام دارد. وتر $C'C$ گذرنده‌ازکانون که بر محورعمود است، وترکانونی نامیده می‌شود. طول وترکانونی برابر $4a$ است، که همان ضریب جملهٔ درجهٔ اول است.

اگرکانون درطرف چپ خط هادی باشد، معادله به‌شکل $y^2=-4ax$ درمی‌آید.

اگرکانون روی محور yها باشد، و محور yها منطبق بر محور تقارن سهمی‌باشد، شکل معادله چنین است:

$$x^2=\pm 4ay$$

علامت مثبت یا منفی به‌موقعیت کانون‌که بالا یا پایین خط هادی باشد، بستگی دارد.

اکنون یك سهمی را مورد بررسی قرار می‌دهیم‌که رأسش نقطهٔ (h, k)، محور آن موازی محور xها، و کانونش به‌فاصلهٔ a در طرف راست رأس باشد. خط هادی موازی‌با محور yها و به‌فاصلهٔ $2a$ در طرف چپ کانون قرار دارد و دارای معادله‌ای به شکل $x=h-a$ یا $x-h+a=0$ است.

فرض‌کنید $P(x, y)$ نقطه‌ای دلخواه روی سهمی باشد. چون $PF=PM$،

$$\sqrt{(x-h-a)^2+(y-k)^2}=x-h+a \text{،}$$

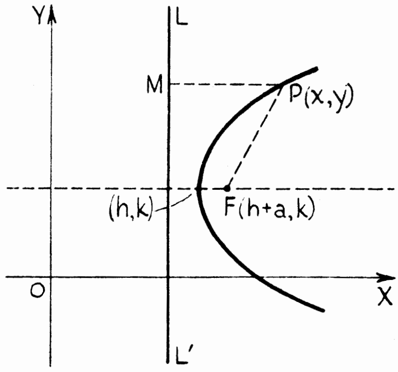
یا $y^2-2ky+k^2=4ax-4ah$ ، یا $(y-k)^2=4a(x-h)$.

صورتهای دیگر استاندارد عبارتند از:

$$(y-k)^2=-4a(x-h)$$
$$(x-h)^2=4a(y-k)$$
$$(x-h)^2=-4a(y-k)$$

اگر عبارتهای بالا را بسط دهیم، معادلاتی با شکل کلی زیر به‌دست می‌آیند:

$$x=ay^2+by+c$$
$$y=ax^2+bx+c$$



مسئله‌های حل شده

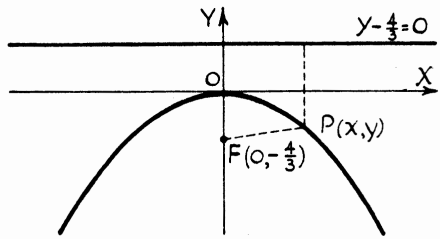
۱. کانون و معادلهٔ خط هادی و طول وتر کانونی سهمی $3y^2=8x$، یا $y^2=\frac{8}{3}x$ را تعیین کنید.

دراینجا $4a=\frac{8}{3}$، یا $a=\frac{2}{3}$. بنابراین کانون نقطهٔ $\left(\frac{2}{3},0\right)$ است ومعادلهٔ خط هادی عبارت است از، $x=-\frac{2}{3}$.

برای تعیین طول وتر کانونی، به‌ازای $x=\frac{2}{3}$ مقدار y را پیدا می‌کنیم. وقتی $x=\frac{2}{3}$، $y=\frac{4}{3}$ و طول وتر کانونی سهمی برابر است با، $2\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}$.

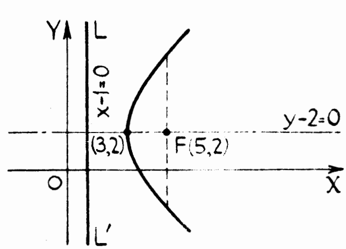
۲. معادلهٔ یك سهمی را بیابید که کانونش نقطهٔ $\left(\circ, -\frac{۴}{۳}\right)$ و خط هادیش $y - \frac{۴}{۳} = \circ$ باشد. طول وتر کانونی سهمی را تعیین کنید.

فرض کنید $P(x, y)$ نقطه‌ای دلخواه روی سهمی باشد. در نتیجه، $\sqrt{(x-\circ)^۲ + \left(y+\frac{۴}{۳}\right)^۲} = y - \frac{۴}{۳}$. عبارت را به‌توان دو می‌رسانیم و ساده می‌کنیم، $x^۲ + \frac{۱۶}{۳}y = \circ$. طول وتر کانونی سهمی برابر است با، $۴a = \frac{۱۶}{۳}$.



۳. معادلهٔ یك سهمی را به‌دست آورید که رأسش $(۳, ۲)$ و کانونش نقطهٔ $(۵, ۲)$ باشد.

چون رأس نقطهٔ $(۳, ۲)$ و کانون $(۵, ۲)$ است، $a = ۲$ و سهمی دارای معادله‌ای به‌شکل $(y-k)^۲ = ۴a(x-h)$، یا $(y-۲)^۲ = ۸(x-۳)$ است. اگر معادله را ساده کنیم به‌صورت $y^۲ - ۴y - ۸x + ۲۸ = \circ$ درمی‌آید.



۴. معادلهٔ یك سهمی را بیابید که رأسش مبدأ مختصات و محورش روی محور yها باشد و از نقطهٔ $(۶, -۳)$ نیز بگذرد.

شکل استاندارد معادله‌ای که مورد استفاده قرار می‌گیرد $x^۲ = -۴ay$ است.

چون نقطهٔ $(۶, -۳)$ باید روی منحنی واقع باشد، مقدار a باید چنان باشد که مختصات نقطه در معادله صدق کند.

با جایگذاری مختصات نقطه داریم، $۳۶ = -۴a(-۳)$، یا $a = ۳$. معادلهٔ مطلوب عبارت است از، $x^۲ = -۱۲y$.

۵. معادلهٔ یک سهمی را بنویسید که کانون آن نقطهٔ $(۶, -۲)$ و خط هادیش خط $x-۲=۰$ باشد.

بنا به تعریف $\sqrt{(x-۶)^{۲}+(y+۲)^{۲}}=x-۲$.

به توان دو می‌رسانیم، $x^{۲}-۱۲x+۳۶+y^{۲}+۴y+۴=x^{۲}-۴x+۴$. پس

از ساده کردن، $y^{۲}+۴y-۸x+۳۶=۰$.

۶. معادلهٔ یک سهمی را بنویسید که رأسش نقطهٔ $(۲, ۳)$ و محورش موازی محور yها باشد و از نقطهٔ $(۴, ۵)$ بگذرد.

شکل استاندارد سهمی که در این مسئله مورد استفاده قرار می‌گیرد، $(x-h)^{۲}=۴a(y-k)$ یا $(x-۲)^{۲}=۴a(y-۳)$ است.

چون نقطهٔ $(۴, ۵)$ روی منحنی قرار دارد، $(۴-۲)^{۲}=۴a(۵-۳)$ و $a=\frac{۱}{۲}$.

معادلهٔ مورد نظر عبارت است از:

$$(x-۲)^{۲}=۲(y-۳)، \text{یا } x^{۲}-۴x-۲y+۱۰=۰$$

۷. معادلهٔ یک سهمی را به‌دست آورید که محورش موازی محور xها باشد و از نقطه‌های $(۱, -۲)$، $(۲, ۱)$ و $(۳, -۱)$ بگذرد.

شکل استاندارد $y^{۲}+Dx+Ey+F=۰$ را مورد استفاده قرار می‌دهیم.

به‌جای x و y مختصات نقطه‌ها را قرار می‌دهیم. داریم:

$$۱-۲D+E+F=۰$$
$$۴+D+۲E+F=۰$$
$$۹-D+۳E+F=۰$$

با حل این دستگاه سه معادله با سه مجهول، $D=\frac{۲}{۵}$، $E=-\frac{۲۱}{۵}$ و $F=۴$.

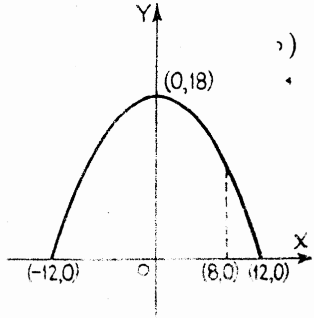
در نتیجه معادلهٔ مطلوب عبارت است از:

$$y^{۲}+\frac{۲}{۵}x-\frac{۲۱}{۵}y+۴=۰ \quad \text{یا} \quad ۵y^{۲}+۲x-۲۱y+۲۰=۰$$

۸. بلندی قوسی سهمی‌شکل را بیابید که دهانهٔ آن ۲۴ فوت و ارتفاعش در فاصلهٔ ۸ فوت از مرکز دهانه، ۱۸ فوت است.

محور xها را درامتداد پایهٔ دهانه و مبدأ مختصات را در مرکز آن اختیار می‌کنیم.

در این‌صورت معادلهٔ سهمی به شکل $(x-h)^{۲}=۴a(y-k)$، یا $(x-۰)^{۲}=۴a(y-۱۸)$ است.



منحنی از نقطهٔ $(\circ, ۱۲)$ می‌گذرد. بـا جایگذاری این مختصات در معادله، نتیجه می‌گیریم $a = -۲$. پس $(x - \circ)^۲ = -۸(y - ۱۸)$.

برای تعیین ارتفاع قوس در فاصلهٔ ۸ فوت از مرکز، بـا فرض $x = ۸$، معادله را برای تعیین y حل می‌کنیم. درنتیجه $۸^۲ = -۸(y - ۱۸)$، یا $y = ۱\circ \mathrm{ft}$. محکمترین قوس ساده، به‌شکل سهمی است.

۹. یـك سهمی به معادلـهٔ $y^۲ + ۸y - ۶x + ۴ = \circ$ مفروض است. مطلوب است تعیین مختصات رأس، کانون و معادلهٔ خط هادی.

عبارت را به‌صورت مربع کامل درمی‌آوریم:

$$y^۲ + ۸y + ۱۶ = ۶x - ۴ + ۱۶ = ۶x + ۱۲ \quad \text{یا} \quad (y + ۴)^۲ = ۶(x + ۲)$$

رأس سهمی نقطهٔ $(-۲, -۴)$ است. چون $۴a = ۶$، پس $a = \frac{۳}{۲}$. بنا براین کانون نقطهٔ $\left(-\frac{۱}{۲}, -۴\right)$ است، و معادلهٔ خط هادی عبارت است از، $x = -\frac{۷}{۲}$.

۱۰. معادلهٔ یك سهمی را به‌دست آورید که وترکانونی آن پاره‌خطی است حاصل ازاتصال نقطه‌های $(۳, ۵)$ و $(۳, -۳)$.

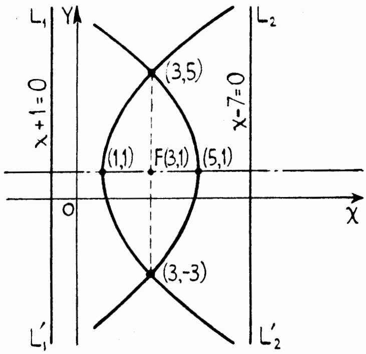
از معادلهٔ $(y - k)^۲ = \pm ۴a(x - h)$ استفاده می‌کنیم. چون طول وتـر کانونی برابر ۸ است، $۴a = ۸$ و $(y - k)^۲ = \pm ۸(x - h)$. چـون نقطه‌های $(۳, ۵)$ و $(۳, -۳)$ روی منحنی قرار دارند، برای تعیین (h, k)، داریم:

$$(۵ - k)^۲ = \pm ۸(۳ - h) \quad \text{و} \quad (-۳ - k)^۲ = \pm ۸(۳ - h)$$

با حل این دستگاه معادلات، نتیجه می‌گیریم که (h, k)، $(۱, ۱)$ و $(۵, ۱)$ است.

معادلات مطلوب عبارتند از:

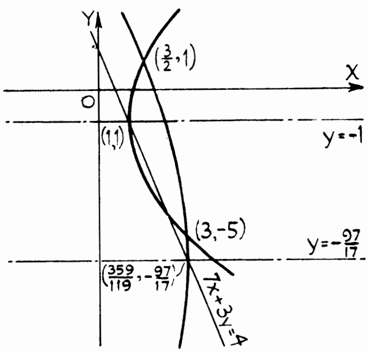
$$(۱) \qquad y^۲ - ۲y - ۸x + ۹ = \circ \quad \text{یا} \quad (y - ۱)^۲ = ۸(x - ۱)$$



$$(y-۱)^۲=-۸(x-۵) \quad \text{یا} \quad y^۲-۲y+۸x-۳۹=۰ \qquad (۲)$$

۰۱۱ معادلهٔ یك سهمی را بدست آورید که رأس آن روی خط $۷x+۳y-۴=۰$ قرار داشته باشد ومحورش بهموازات محور xها و شامل نقطههای $(۳, -۵)$ و $\left(\frac{۳}{۲}, ۱\right)$ باشد.

ازمعادلهٔ $(y-k)^۲=۴a(x-h)$ استفاده می‌کنیم. با جایگذاری مختصات نقطه‌ها در این معادله داریم: $(-۵-k)^۲=۴a(۳-h)$ و $(۱-k)^۲=۴a\left(\frac{۳}{۲}-h\right)$.



چون (h, k) روی خط $۷x+۳y-۴=۰$ قرار دارد، $۷h+۳k-۴=۰$. با حل این دستگاه معادلات، بهدست‌می‌آوریم: $h=۱$، $k=-۱$، $۴a=۸$ و $h=\frac{۳۵۹}{۱۱۹}$، $k=-\frac{۹۷}{۱۷}$، $۴a=-\frac{۵۰۴}{۱۷}$.

بنابراین معادلات مطلوب عبارتند از: $(y+۱)^۲=۸(x-۱)$ و

$$\left(y+\frac{۹۷}{۱۷}\right)^۲=-\frac{۵۰۴}{۱۷}\left(x-\frac{۳۵۹}{۱۱۹}\right)$$

۱۲. مسیر پرتابه‌ای که به‌طور افقی از نقطه‌ای، y فوت بالای سطح زمین، بـا سرعت v فوت بر ثانیه پرتاب می‌شود، یك سهمی‌است که معادله‌اش به‌صورت $x^۲=-\frac{۲v^۲}{g}y$ است. در این دستور x مسافت افقی تـا نقطهٔ پرتاب و g تقریباً برابر ۳۲ فوت بـر مجذور ثانیه و مبدأ مختصات نقطهٔ شروع پرتاب است.

سنگی از نقطه‌ای ۱۰ فوت بالای سطح زمین بـه‌طور افقی پرتاب می‌شود. هرگاه سرعت افقی سنگ ۱۶۰ فوت بر ثانیه باشد، قبل‌از برخورد با زمین، سنگ چه‌مسافتی را به‌طور افقی می‌پیماید؟

$$x^۲=-\frac{۲v^۲}{g}y=-\frac{۲(۱۶۰)^۲}{۳۲}(-۱۰)\text{، }x=۴۰\sqrt{۱۰}=۱۲۶٫۵\text{ فوت}$$

مسئله‌های تکمیلی

۱. مختصات کانون، طول وتر کانونی و معادلهٔ هادی هر یك از سهمیهای زیر را بیابید و نمودار آنها را رسم کنید.

الف) $y^۲=۶x$. جواب: $\left(\frac{۳}{۲},۰\right)$، ۶، $x+\frac{۳}{۲}=۰$.

ب) $x^۲=۸y$. جواب: $(۰,۲)$، ۸، $y+۲=۰$.

ج) $۳y^۲=-۴x$. جواب: $\left(-\frac{۱}{۳},۰\right)$، $\frac{۴}{۳}$، $x-\frac{۱}{۳}=۰$.

۲. معادلهٔ هر یك از سهمیهای زیر را به‌دست‌آورید، اگر:

الف) کانون آن نقطهٔ $(۳,۰)$ و خط هادی آن $x+۳=۰$ باشد.

جواب: $y^۲-۱۲x=۰$.

ب) کانون آن نقطهٔ $(۰,۶)$ و خط هادی آن محور xها باشد.

جواب: $x^۲-۱۲y+۳۶=۰$.

ج) رأس آن مبدأ مختصات ومحورش درامتداد محور xها باشد و از نقطهٔ $(-۳,۶)$ بگذرد.

جواب: $y^۲=-۱۲x$.

۳. نقطه‌ای طوری تغییرمکان می‌دهد که فاصله‌اش از نقطهٔ $(-۲, ۳)$ برابر فاصله‌اش از خط $x+۶=۰$ است. معادلهٔ مکان هندسی این نقطه را به‌دست آورید.
جواب: $y^{۲}-۶y-۸x-۲۳=۰$.

۴. معادلهٔ یك سهمی را به‌دست آورید که کانونش نقطهٔ $(-۲, -۱)$، و وتر کانونیش پاره‌خطی باشد که از اتصال نقاط $(-۲, ۲)$ و $(-۲, -۴)$ به‌وجود می‌آید.
جواب: $y^{۲}+۲y+۶x+۴=۰$، $y^{۲}+۲y-۶x-۲۰=۰$.

۵. مطلوب است تعیین معادلهٔ یك سهمی که رأسش $(-۲, ۳)$ و کانونش $(۱, ۳)$ باشد.
جواب: $y^{۲}-۶y-۱۲x-۱۵=۰$.

۶. معادلهٔ هر یك از سهمیهای زیر را به‌صورت استاندارد تبدیل کنید و الف) مختصات رأس، ب) مختصات کانون، ج) طول وتر کانونی و د) معادلهٔ خط هادی را تعیین کنید.

۱) $y^{۲}-۴y+۶x-۸=۰$.

جواب: الف) $(۲, ۲)$؛ ب) $\left(\frac{۱}{۲}, ۲\right)$؛ ج) ۶؛ د) $x-\frac{۷}{۲}=۰$.

۲) $۳x^{۲}-۹x-۵y-۲=۰$.

جواب: الف) $\left(\frac{۳}{۲}, -\frac{۷}{۴}\right)$؛ ب) $\left(\frac{۳}{۲}, -\frac{۴}{۳}\right)$؛ ج) $\frac{۵}{۳}$؛ د) $y+\frac{۱۳}{۶}=۰$.

۳) $y^{۲}-۴y-۶x+۱۳=۰$.

جواب: الف) $\left(\frac{۳}{۲}, ۲\right)$؛ ب) $(۳, ۲)$؛ ج) ۶؛ د) $x=۰$.

۷. معادلهٔ یك سهمی را بیابید که محورش موازی محور xها باشد و از نقطه‌های $(۳, ۳)$، $(۶, ۵)$ و $(۶, -۳)$ بگذرد.
جواب: $y^{۲}-۲y-۴x+۹=۰$.

۸. معادلهٔ یك سهمی را به‌دست آورید که محورش قائم باشد، و از نقطه‌های $(۴, ۵)$، $(-۲, ۱۱)$ و $(-۴, ۲۱)$ بگذرد.
جواب: $x^{۲}-۴x-۲y+۱۰=۰$.

۹. معادلهٔ یك‌سهمی را بیابید که رأس آن روی خط $۲y-۳x=۰$ و محورش به‌موازات محور xها باشد، و از دو نقطهٔ $(۳, ۵)$ و $(۶, -۱)$ بگذرد.
جواب: $۱۱y^{۲}-۹۸y-۱۰۸x+۵۳۹=۰$، $y^{۲}-۶y-۴x+۱۷=۰$.

۱۰. هنگامی که وزن به طور یکنواخت توزیع شود، کابل پل معلق به صورت قوسی

سهمی شکل آویزان می‌شود. بلندی برجهای حفاظ ۶۰ فوت است و ۵۰۰ فوت از هم فاصله دارند. پایینترین نقطه، روی کابل ۱۰ فوت بالای جاده است. بااستفاده از کف پل به عنوان محور xها و محور تقارن سهمی به‌عنوان محور yها معادلهٔ سهمیی را که کابل به‌خود می‌گیرد پیدا کنید. طول میلهٔ حفاظی را که ۸۰ فوت از مرکز پل فاصله دارد بیابید.

جواب: $x^۲ - ۱۲۵۰y + ۱۲۵۰۰ = ۰$ ؛ ۱۵٫۱۲ فوت.

۱۱. یك تـوپ بیسبال به طور افقی از بالای بنای یادبود واشینگتن به‌بلندی ۵۵۵ فوت با سرعت اولیهٔ ۴۰ فوت بر ثانیه پرتاب می‌شود. به فرض اینکه زمین مسطح باشد، در چه فاصله‌ای از پای بنا، توپ به‌زمین اصابت خواهدکرد؟

جواب: ۲۳۵٫۵۸ فوت.

۱۲. هواپیمایی در ارتفاع ۴۰۰۰ فوتی‌که به‌طرف جنوب با سرعت ۱۲۰ مایل درساعت پرواز می‌کند، بمبی را رها می‌سازد. بمب در چه فاصله‌ای از نقطهٔ پرتاب بـه‌سطح زمین اصابت می‌کند؟

جواب: ۲۷۸۳ فوت.

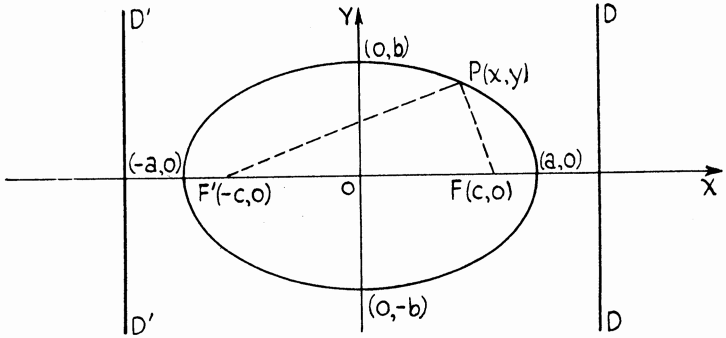
۱۳. طاقی سهمی شکل بـه‌ارتفاع ۲۵ فوت دارای دهانه‌ای ۴۰ فوتی است. بلندی این طاق در فاصلهٔ ۸ فوت از دو طرف مرکز، چه اندازه است؟

جواب: ۲۱ فوت.

٦

بیضی

تعریف. مسیر نقطهٔ متحرکی که مجموع فواصلش از دونقطهٔ ثابت مقداری ثابت باشد، یك بیضی است. دونقطهٔ ثابت، کانونهای بیضی هستند.



فرض کنید که $F(c, 0)$ و $F'(-c, 0)$ دو نقطهٔ ثابت باشند و مجموع ثابت، $2a$ $(a>c)$ باشد و فرض کنید $P(x, y)$ نقطه‌ای دلخواه روی مکان هندسی فوق باشد، در نتیجه بنا به تعریف:

$$F'P+PF=2a$$

یا

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

یا
$$\sqrt{(x+c)^{۲}+(y-۰)^{۲}}=۲a-\sqrt{(x-c)^{۲}+(y-۰)^{۲}}$$
اگر این عبارت را به‌توان دو برسانیم و جمله‌ها را با هم جمع کنیم، داریم، $cx-a^{۲}=-a\sqrt{(x-c)^{۲}+(y-۰)^{۲}}$. این عبارت را نیز به‌توان دو می‌رسانیم و ساده می‌کنیم، $(a^{۲}-c^{۲})x^{۲}+a^{۲}y^{۲}=a^{۲}(a^{۲}-c^{۲})$.

طرفین‌تساوی را بر $a^{۲}(a^{۲}-c^{۲})$ تقسیم می‌کنیم. معادلهٔ $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{a^{۲}-c^{۲}}=۱$ نتیجه می‌شود.

چون $a>c$، $a^{۲}-c^{۲}$ مثبت‌است. می‌نویسیم $a^{۲}-c^{۲}=b^{۲}$. آنگاه‌شکل‌استاندارد معادلهٔ بیضی به‌صورت $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$، یا $b^{۲}x^{۲}+a^{۲}y^{۲}=a^{۲}b^{۲}$ به‌دست می‌آید. از آنجاکه این‌معادله تنها شامل توانهای زوج x و y است، منحنی نسبت‌به‌محور xها و yها و مبدأ مختصات متقارن است. نقطهٔ O مرکز بیضی است. محوری راکه از دوکانون بیضی می‌گذرد، محور کانونی و محور عمود بر آن‌را محور ناکانونی می‌نامند. پاره‌خط AA' را قطرکانونی و پاره‌خط BB' را قطر ناکانونی می‌نامند.

اگر کانونها نقطه‌های $(۰, c)$ و $(۰, -c)$ باشند، محور کانونی روی محور yها است. آنگاه شکل استاندارد معادلهٔ بیضی $\frac{x^{۲}}{b^{۲}}+\frac{y^{۲}}{a^{۲}}=۱$ است.

خروج از مرکز $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}}{a}$ است. بنابراین $c=ae$.

چون بیضی دارای دو کانون است، دو خط هادی خواهد داشت. معادلات خطهای هادی DDو$D'D'$ به‌ترتیب: $x+\frac{a}{e}=۰$ و $x-\frac{a}{e}=۰$ است.

درصورتی‌که‌کانونها روی محور yها واقع باشند، معادلات خطهای هادی‌به‌صورت $y+\frac{a}{e}=۰$ و $y-\frac{a}{e}=۰$ است.

وتری که از کانون بیضی بگذرد و بر محور کانونی عمود باشد وترکانونی بیضی نامیده می‌شود و طول آن برابر است با، $\frac{۲b^{۲}}{a}$.

نقطه‌هایی که در آن بیضی محور کانونیش را قطع می‌کند رأسهای بیضی نامیده می‌شوند.

اگر مرکز بیضی نقطهٔ (h, k) و محور کانونیش موازی محور xها باشد، می‌توان اثبات کرد که صورت استاندارد معادلهٔ بیضی به صورت $\frac{(x-h)^۲}{a^۲}+\frac{(y-k)^۲}{b^۲}=۱$ است. اگر محور کانونی بیضی موازی محور yها باشد، شکل استاندارد معادلهٔ بیضی $\frac{(x-h)^۲}{b^۲}+\frac{(y-k)^۲}{a^۲}=۱$ است. در هر حالت صورت کلی معادلهٔ بیضی $Ax^۲+By^۲+Dx+Ey+F=۰$ است که در آن A و B هم‌علامت هستند.

مسئله‌های حل شده

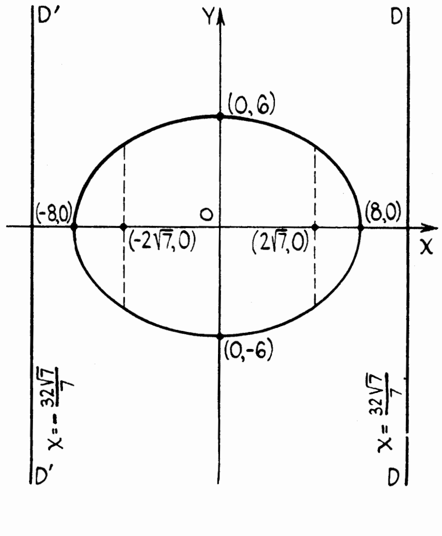
۱. مطلوب است تعیین قطر کانونی، قطر ناکانونی، خروج از مرکز، مختصات کانونها، معادلات خطهای هادی، و طول وتر کانونی بیضی به‌معادلهٔ $۹x^۲+۱۶y^۲=۵۷۶$.

با تقسیم طرفین‌معادله بر ۵۷۶، داریم $\frac{x^۲}{۶۴}+\frac{y^۲}{۳۶}=۱$. بنابراین $a=۸$ و $b=۶$.

$$c=\sqrt{a^۲-b^۲}=۲\sqrt{۷} \quad ،e=\frac{\sqrt{a^۲-b^۲}}{a}=\frac{\sqrt{۷}}{۴}$$

کانونها $(۲\sqrt{۷}, ۰)$ و $(-۲\sqrt{۷}, ۰)$ هستند و معادلات خطهای هادی عبارتند از:

$$x=\pm\frac{۳۲\sqrt{۷}}{۷} \quad \text{یا} \quad x=\pm\frac{a}{e}$$



طول وتر کانونی بیضی برابر است با، $\frac{2b^2}{a}=\frac{72}{8}=9$.

۲. معادلهٔ بیضیی را به‌دست آورید که مرکزش درمبدأ مختصات، یك کانونش در نقطهٔ $(0,3)$ و نصف قطر کانونیش ۵ باشد.

داریم $c=3$ و $a=5$. بنابراین $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-9}=4$.

بااستفاده ازشکل استاندارد $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$، معادلهٔموردنظر $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ است.

۳. معادلهٔ بیضیی را بیابید که مرکزش در مبدأ مختصات و قطر کانونیش روی محور xها باشد و از نقاط $(4,3)$ و $(6,2)$ بگذرد.

صورت استاندارد معادلهٔ بیضی عبارت است از، $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. مختصات نقطه‌ها را درمعادله به‌جای x و y قرار می‌دهیم. داریم، $\frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$ و $\frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1$.

با حل دستگاه، $a^2=52$ و $b^2=13$.

پس معادلهٔ مطلوب عبارت است از، $\frac{x^2}{52}+\frac{y^2}{13}=1$، یا $x^2+4y^2=52$.

۴. نقطه‌ای طوری تغییرمکان می‌دهد که همواره فاصله‌اش از نقطهٔ $(4,0)$، نصف فاصلهٔ آن از خط $x-16=0$ است. معادلهٔ مکان هندسی این نقطه را بیابید.

بنا به معلومات مسئله داریم: $\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}=\frac{1}{2}(x-16)$

یا
$$x^2-8x+16+y^2=\frac{x^2-32x+256}{4}$$

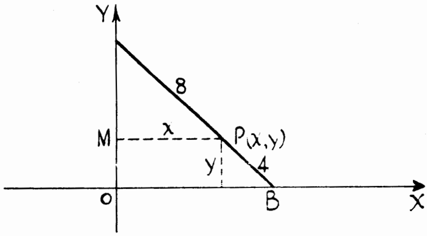
پس از ساده کردن، معادلهٔ مطلوب عبارت است از، $3x^2+4y^2=192$، که یك بیضی است.

۵. پاره‌خط AB به طول ۱۲ واحد، شامل نقطهٔ درونی $P(x,y)$ به‌فاصلهٔ ۸ واحد از A، طوری جابه‌جا می‌شود که A همواره روی‌محور yها و B روی‌محور xها باقی‌می‌مانند. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطهٔ P.

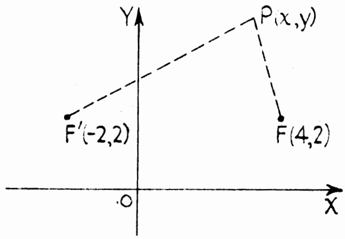
بنا به تشابه مثلثها، $\frac{MA}{AP}=\frac{y}{PB}$ ، یا $\frac{y}{4}=\frac{\sqrt{64-x^2}}{8}$.

درنتیجه $4y^2=64-x^2$، یا $x^2+4y^2=64$. مکان‌هندسی بیضیی است که‌مرکزش

مبدأ مختصات است و قطر کانونیش روی محور xها قرار دارد.



۶. نقطهٔ $P(x, y)$ طوری حرکت می‌کند که مجموع فواصلش از نقطه‌های $(۴, ۲)$ و $(-۲, ۲)$ برابر ۸ است. معادلهٔ مکان هندسی آن‌را به‌دست آورید.



$F'P+PF=۸$، یا $\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۲)^۲}+\sqrt{(x-۴)^۲+(y-۲)^۲}=۸$

این عبارت را دوباره مرتب می‌کنیم:

$$\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۲)^۲}=۸-\sqrt{(x-۴)^۲+(y-۲)^۲}$$

به‌توان دو می‌رسانیم و جملات مشابه‌را جمع می‌کنیم:

$$۳x-۱۹=-۴\sqrt{(x-۴)^۲+(y-۲)^۲}$$

عبارت را به‌توان دو می‌رسانیم و جملات مشابه را جمع می‌کنیم. معادلهٔ مطلوب عبارت‌است‌از، $۷x^۲+۱۶y^۲-۱۴x-۶۴y-۴۱=۰$ که معادلهٔ یك بیضی‌است.

۷. بیضیی به معادلهٔ $۴x^۲+۹y^۲-۴۸x+۷۲y+۱۴۴=۰$ مفروض است. مرکز، نصف قطرها، رأسها و کانونهای بیضی را بیابید.

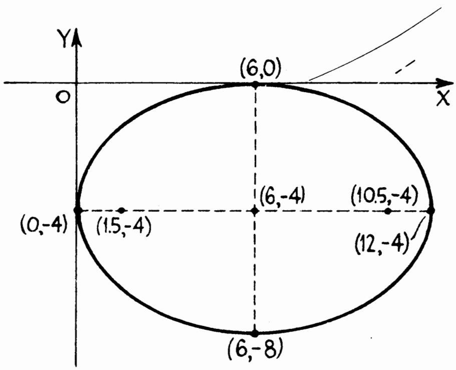
این معادله را با کامل کردن مربع می‌توان به شکل استاندارد $\frac{(x-h)^۲}{a^۲}+\frac{(y-k)^۲}{b^۲}=۱$ نوشت.

$$۴(x^۲-۱۲x+۳۶)+۹(y^۲+۸y+۱۶)=۱۴۴$$

$$۴(x-۶)^۲+۹(y+۴)^۲=۱۴۴$$

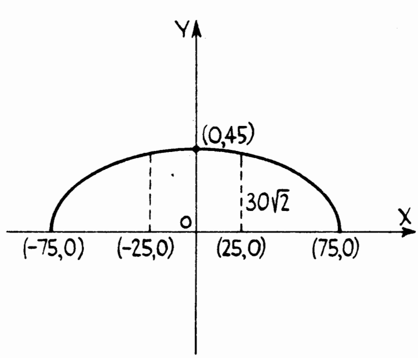
$$\frac{(x-۶)^۲}{۳۶}+\frac{(y+۴)^۲}{۱۶}=۱$$

پس مرکز بیضی نقطهٔ $(۶, -۴)$؛ $a=۶$ و $b=۴$ است. رأسهایش عبارتند از: $(۰, -۴)$، $(۱۲, -۴)$. کانونها عبارتند از، $(۶+۲\sqrt{۵}, -۴)$، $(۶-۲\sqrt{۵}, -۴)$.



۰۸ قوسی به‌شکل نیم‌بیضی دهانه‌ای ۱۵۰ فوتی دارد و بیشترین ارتفاع آن ۴۵ فوت است. این قوس دارای دوحفاظ قائم است، به‌طوری که از دوانتهای قوس به‌یک فاصله‌هستند. بلندی حفاظها را حساب کنید.

فرض کنید محور xها درامتداد پایهٔ قوس و مبدأمختصات در وسط پایه (قاعده) باشد. آنگاه‌شکل استاندارد معادلهٔ بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$، و $a=۷۵$،$b=۴۵$ خواهد بود.



برای تعیین بلندی حفاظ قائم، $x=۲۵$ را درمعادله قرار می‌دهیم و معادله را نسبت به y حل می‌کنیم. در نتیجه:

$$\frac{۶۲۵}{۵۶۲۵}+\frac{y^۲}{۲۰۲۵}=۱ \text{،} \qquad y^۲=۸(۲۲۵) \text{، و} \quad y=۳۰\sqrt{۲} \text{ فوت}$$

۹. مدار زمین یك بیضی است که خورشید دریکی از کانونهای آن قرار دارد. درصورتی که نصف قطر کانونی بیضی ۹۳,۰۰۰,۰۰۰ مایل و خروج از مرکز آن تقریباً برابر $\frac{۱}{۶۲}$ باشد، مطلوب است تعیین کمترین و بیشترین فاصلهٔ زمین از خورشید.

خروج از مرکز $e=\frac{c}{a}$. بنابراین، $\frac{c}{۹۳,۰۰۰,۰۰۰}=\frac{۱}{۶۲}$ یا $c=۱,۵۰۰,۰۰۰$.

بیشترین فاصله برابر است با: $a+c=۹۴,۵۰۰,۰۰۰$ مایل.

کمترین فاصله برابر است با: $a-c=۹۱,۵۰۰,۰۰۰$ مایل.

۱۰. معادلهٔ یك بیضی را بیابید که مرکزش $(۱,۲)$، کانونش $(۶,۲)$ و شامل نقطهٔ $(۴,۶)$ باشد.

با به‌کارگیری معادلهٔ $\frac{(x-۱)^۲}{a^۲}+\frac{(y-۲)^۲}{b^۲}=۱$ و از آنجاکه $(۴,۶)$ روی منحنی واقع است، $\frac{(۴-۱)^۲}{a^۲}+\frac{(۶-۲)^۲}{b^۲}=۱$، یا $\frac{۹}{a^۲}+\frac{۱۶}{b^۲}=۱$.

چون $c=۵$، $b^۲=a^۲-c^۲=a^۲-۲۵$ و $\frac{۹}{a^۲}+\frac{۱۶}{a^۲-۲۵}=۱$.

با حل آن، $a^۲=۴۵$ و $b^۲=۲۰$. با جایگذاری در رابطهٔ بالا داریم:

$$\frac{(x-۱)^۲}{۴۵}+\frac{(y-۲)^۲}{۲۰}=۱$$

۱۱. معادلهٔ بیضیی با مرکز $(-۱,-۱)$، رأس $(۵,-۱)$ و $e=\frac{۲}{۳}$ را بیابید.

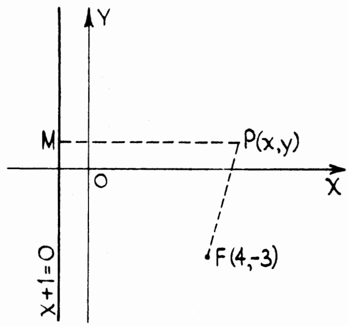
چون مرکز، نقطهٔ $(-۱,-۱)$ و رأس $(۵,-۱)$ است، $a=۶$، $e=\frac{c}{a}=\frac{c}{۶}=\frac{۲}{۳}$ و $c=۴$. همچنین $b^۲=a^۲-c^۲=۳۶-۱۶=۲۰$.

معادلهٔ مطلوب عبارت است از: $\frac{(x+۱)^۲}{۳۶}+\frac{(y+۱)^۲}{۲۰}=۱$.

۱۲. معادلهٔ یك بیضی را به‌دست آورید که کانونش $(۴,-۳)$، خط هادیش $x=-۱$، و خروج از مرکز آن $\frac{۲}{۳}$ باشد.

بنا به‌تعریف کلی، مقطع مخروطی، اگر $e=\dfrac{PF}{PM}$ و $e<1$، منحنی بیضی است.

بنا براین:
$$\frac{\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2}}{x+1}=\frac{2}{3}$$



اگر طرفین این معادله را به‌توان دو برسانیم و ساده‌کنیم، داریم:

$$5x^2+9y^2-80x+54y=-221$$

عبارت‌را به‌صورت مربع کامل درمی‌آوریم:

$$5(x^2-16x+64)+9(y^2+6y+9)=-221+320+81$$

یا $5(x-8)^2+9(y+3)^2=180$ یا $\dfrac{(x-8)^2}{36}+\dfrac{(y+3)^2}{20}=1$

۱۳. مکان هندسی نقطهٔ $P(x,y)$ را طوری تعیین کنید که حاصل‌ضرب ضریب زاویه‌های خطهای حاصل‌ازاتصال $P(x,y)$ با $(3,-2)$ و $(-2,1)$ برابر -6 باشد.

$$\left(\frac{y+2}{x-3}\right)\left(\frac{y-1}{x+2}\right)=-6 \quad \text{یا} \quad 6x^2+y^2+y-6x=38$$

که یك بیضی است.

۱۴. معادلهٔ بیضیی را تعیین کنید که‌کانونهایش $(0,\pm4)$ باشد وازنقطهٔ $\left(\dfrac{12}{5},3\right)$ بگذرد.

$x=\dfrac{12}{5}$ و $y=3$ را در معادلهٔ $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ قرار می‌دهیم و نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{144}{25b^2}+\frac{9}{a^2}=1$$

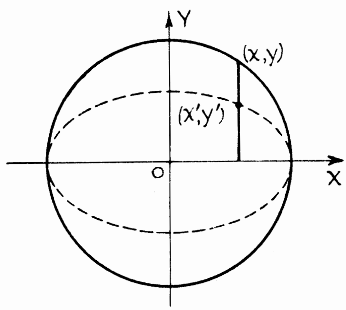
چون کانونها نقطه‌های $(0, \pm 4)$ هستند، $c=4$ و $a^2-b^2=4^2=16$.

با حل دستگاه دو معادله، $a^2=25$ و $b^2=9$. پس، $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$.

۱۵. مکان هندسی نقطه‌هایی را تعیین کنید که عرض نقطه‌های واقع بر دایرهٔ $x^2+y^2=25$ را به نسبت $\frac{3}{5}$ تقسیم کنند.

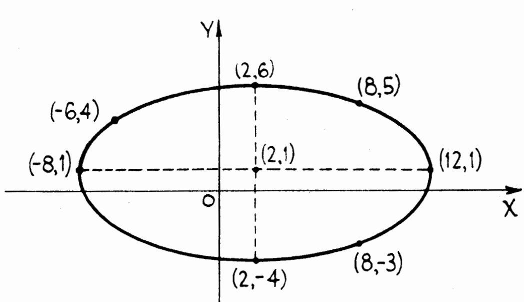
فرض می‌کنیم $y'=\frac{3}{5}y$، یا $y=\frac{5}{3}y'$ و $x=x'$. آنگاه، $x'^2+\frac{25}{9}y'^2=25$.

با حذف پریمها و ساده کردن عبارت، معادله عبارت است از، $9x^2+25y^2=225$ که یك بیضی است.



۱۶. معادلهٔ بیضیی را بیابید که از نقطه‌های $(-6, 4)$، $(-8, 1)$، $(2, -4)$ و $(8, -3)$ بگذرد و محورهایش موازی محورهای مختصات باشد.

در رابطهٔ $x^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ به‌جای x و y مختصات چهار نقطه را قرار می‌دهیم.



$$16B-6C+4D+E=-36$$

$$B-8C+D+E=-64$$

$$16B+2C-4D+E=-4$$

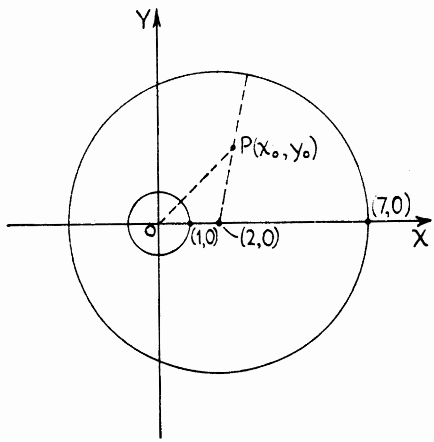
$$9B+8C-3D+E=-64$$

با حل این معادلات، نتیجه می‌گیریم $B=4$، $C=-4$، $D=-8$ و $E=-92$.
معادلهٔ مطلوب عبارت است از، $x^2+4y^2-4x-8y-92=0$، یا

$$\frac{(x-2)^2}{100}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$$

۱۷. معادلهٔ مکان هندسی مرکز دایره‌ای را به‌دست آورید که بر دایره‌های $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2-4x-21=0$ مماس باشد.

نقطهٔ (x_0, y_0) را به‌عنوان مرکز دایره مورد استفاده قرار می‌دهیم. دایره‌های داده شده به‌ترتیب دارای شعاعهای ۱ و ۵ هستند.



الف)
$$5-\sqrt{(x_0-2)^2+(y_0-0)^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2}-1$$

طرفین تساوی را به‌توان دو می‌رسانیم وساده می کنیم وسپس اندیسها را حذف می کنیم. معادلهٔ $8x^2+9y^2-16x-64=0$ نتیجه می‌شود، که یك بیضی است. این معادله را به‌صورت $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-0)^2}{8}=1$ می نویسیم. بدیهی است که مرکز بیضی $(1, 0)$ است.

ب)
$$\sqrt{x_0^2+y_0^2}+1=5-\sqrt{(x_0-2)^2+y_0^2}$$

عبارت را به‌توان دو می‌رسانیم وساده می کنیم، و اندیسها را حذف می کنیم، معادلهٔ

$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-0)^2}{3}=1$ یا ، $3x^2+4y^2-6x-9=0$ نتیجه می‌شود.

مرکز این بیضی $(1\,,0)$ است.

۱۸. خطهایی که از کانونها به‌هر نقطهٔ اختیاری روی بیضی رسم شوند، شعاعهای کانونی بیضی نامیده می‌شوند. معادلات شعاعهای کانونی راکه به‌نقطهٔ $(2\,,3)$ واقع بر بیضی $3x^2+4y^2=48$ رسم می‌شوند، به دست آورید.

این معادله را به‌صورت $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ می‌نویسیم. $c=\pm\sqrt{16-12}=\pm 2$.

کانونها عبارتند از، $(\pm 2\,,0)$. معادلهٔ شعاع کانونی گذرنده از $(2\,,0)$ و $(2\,,3)$ عبارت است از، $x-2=0$، و از $(-2\,,0)$ و $(2\,,3)$ عبارت است از:

$$y-0=\frac{3-0}{2+2}(x+2) \quad \text{یا} \quad 3x-4y+6=0$$

مسئله‌های تکمیلی

۱. در هر یك از بیضیهای زیر، مطلوب است تعیین الف) طول نصف قطر کانونی؛ ب) اندازهٔ نصف قطر ناکانونی؛ ج) مختصات کانونها؛ د) خروج از مرکز.

۱) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$.

جواب: الف) ۱۳؛ ب) ۱۲؛ ج) $(\pm 5\,,0)$؛ د) $\frac{5}{13}$.

۲) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{12}=1$.

جواب: الف) $2\sqrt{3}$؛ ب) $2\sqrt{2}$؛ ج) $(0\,,\pm 2)$؛ د) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

۳) $225x^2+289y^2=65025$.

جواب: الف) ۱۷؛ ب) ۱۵؛ ج) $(\pm 8\,,0)$؛ د) $\frac{8}{17}$.

۲. هر یك از بیضیهای زیر در وضعیت استاندارد هستند و مرکزشان در مبدأ مختصات است. در صورتی که علاوه بر آن شرایط زیر نیز بر قرار باشد معادلهٔ هر کدام از

بیضیها را بیابید.

۱) کانونها $(\pm ۴, ۰)$، رأسها $(\pm ۵, ۰)$. جواب: $\frac{x^۲}{۲۵}+\frac{y^۲}{۹}=۱$.

۲) کانونها $(۰, \pm ۸)$، رأسها $(۰, \pm ۱۷)$. جواب: $\frac{x^۲}{۲۲۵}+\frac{y^۲}{۲۸۹}=۱$.

۳) طول وتر کانونی برابر ۵، رأسها $(\pm ۱۰, ۰)$. جواب: $\frac{x^۲}{۱۰۰}+\frac{y^۲}{۲۵}=۱$.

۴) کانونها $(۰, \pm ۶)$، نصف قطرنا کانونی برابر ۸. جواب: $\frac{x^۲}{۶۴}+\frac{y^۲}{۱۰۰}=۱$.

۵) کانونها $(\pm ۵, ۰)$، خروج از مرکز برابر $\frac{۵}{۸}$. جواب: $\frac{x^۲}{۶۴}+\frac{y^۲}{۳۹}=۱$.

۳. معادلهٔ بیضیی را بنویسید که مرکزش در مبدأ مختصات و کانونهایش روی محور xها باشد، و از نقطه‌های $(-۳, ۲\sqrt{۳})$ و $\left(۴, \frac{۴\sqrt{۵}}{۳}\right)$ بگذرد.

جواب: $۴x^۲+۹y^۲=۱۴۴$.

۴. معادلهٔ بیضیی را بنویسید کــه مرکزش مبدأ مختصات باشد، قطرکانونیش روی محور yها و نصف آن برابر ۴ واحد و اندازهٔ وتر کانونی آن برابر $\frac{۹}{۲}$ باشد.

جواب: $۱۶x^۲+۹y^۲=۱۴۴$.

۵. نقطهٔ $P(x, y)$ طوری حرکت می‌کندکه مجموع فاصله‌های آن ازدو نقطهٔ $(۳, ۱)$و $(-۵, ۱)$، ۱۰ است. معادلهٔ مکان هندسی آن‌را به‌دست آورید. این منحنی چیست؟

جواب: $۹x^۲+۲۵y^۲+۱۸x-۵۰y-۱۹۱=۰$، یك بیضی.

۶. نقطهٔ $P(x, y)$ طوری‌حرکت می‌کندکه مجموع فاصله‌هایش از $(۲, -۳)$ و$(۲, ۷)$، ۱۲ است. معادلهٔ مکان هندسی آن‌را به‌دست آورید.

جواب: $۳۶x^۲+۱۱y^۲-۱۴۴x-۴۴y-۲۰۸=۰$.

۷. نقطه‌ای طوری حرکت می‌کند کــه فاصله‌اش از نقطهٔ $(۳, ۲)$ نصف فاصله‌اش از خط $x+۲=۰$ است. معادلهٔ مکان هندسی آن‌را به‌دست آورید. این منحنی چیست؟

جواب: $۳x^۲+۴y^۲-۲۸x-۱۶y+۴۸=۰$، یك بیضی.

۸. یك بیضی به‌معادلهٔ $۹x^۲+۱۶y^۲-۳۶x+۹۶y+۳۶=۰$ مفروض است. مطلوب است تعیین الف) مختصات مرکز آن؛ ب)نصف‌قطرکانونی؛ ج) نصف قطرناکانونی؛ د)

کانونها؛ هـ) طول وتر کانونی.

جواب: الف) $(۳-, ۲)$؛ ب) ۴؛ ج) ۳؛ د) $(۳-, ۲\pm\sqrt{۷})$؛ هـ) ۴٫۵.

۹. معادلهٔ بیضیی را بیابید که مرکزش $(۱-, ۴)$ و کانونش $(۱-, ۱)$ باشد و از نقطهٔ $(۰, ۸)$ نیز بگذرد.

جواب: $\frac{(x-۴)^۲}{۱۸}+\frac{(y+۱)^۲}{۹}=۱$، یا $x^۲+۲y^۲-۸x+۴y=۰$.

۱۰. معادلهٔ بیضیی را بیابید که مرکزش نقطهٔ $(۳, ۱)$، رأس آن $(۳, ۲-)$، و $e=\frac{۱}{۳}$ باشد.

جواب: $\frac{(x-۳)^۲}{۸}+\frac{(y-۱)^۲}{۹}=۱$، یا $۹x^۲+۸y^۲-۵۴x-۱۶y+۱۷=۰$.

۱۱. معادلهٔ بیضیی با کانون $(۱-, ۱-)$، خط هادی $x=۰$ و $e=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ را بیابید.

جواب: $x^۲+۲y^۲+۴x+۴y+۴=۰$.

۱۲. نقطهٔ $P(x, y)$ طوری حرکت می‌کند که حاصل‌ضرب ضریب زاویه‌های دوخطی که از اتصال نقطهٔ P به‌دو نقطهٔ $(۲-, ۱)$ و $(۶, ۵)$ به‌وجود می‌آید برابر ۴ــ است. ثابت‌کنید مکان هندسی این نقطه یك بیضی است و مرکز آن را تعیین‌کنید.

جواب: $۴x^۲+y^۲-۱۶x-۶y-۴۳=۰$، مرکز $(۲, ۳)$.

۱۳. پاره‌خط AB به‌طول ۱۸ واحد طوری حرکت می‌کند که نقطهٔ A همواره روی‌محور yها و نقطهٔ B روی محور xها باقی می‌مانند. با فرض اینکه نقطهٔ P روی خط و به‌فاصلهٔ ۶ واحد از B باشد، مطلوب است تعیین معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ $P(x, y)$.

جواب: $x^۲+۴y^۲=۱۴۴$، که یك بیضی است.

۱۴. قوسی به‌شکل نیم‌بیضی و قطر کانونیش دهانهٔ آن است. اگر دهانهٔ قوس ۸۰فوت و ارتفاع آن ۳۰ فوت باشد، ارتفاع قوس را در نقطه‌ای بـه‌فاصلهٔ ۱۵ فوت از قطر ناکانونی به‌دست آورید.

جواب: $\frac{۱۵\sqrt{۵۵}}{۴}$ فوت.

۱۵. مدارگردش زمین یك بیضی است‌که خورشید دریکی از کانونهای‌آن قرار دارد. در صورتی‌که نصف قطرکانونی بیضی ۹۲٫۹ میلیون مایل و خروج ازمرکزش۰٫۰۱۷ باشد، حداکثر و حداقل فاصلهٔ زمین از خورشید را تا سه رقم معنی‌دار بیابید.

جواب: (۹۱٫۳، ۹۴٫۵) میلیون مایل.

۱۶. معادلهٔ بیضیی را به‌دست آورید که کانونهایش $(\pm ۸, ۰)$ باشد و از نقطهٔ $\left(۸, \frac{۱۸}{۵}\right)$ بگذرد.

جواب: $\frac{x^۲}{۱۰۰}+\frac{y^۲}{۳۶}=۱$.

۱۷. مکان هندسی نقطه‌هایی را تعیین کنید که عرض نقطه‌های واقع بر دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱۶$ را به‌نسبت $\frac{۱}{۲}$ تقسیم کنند.

جواب: $x^۲+۴y^۲=۱۶$.

۱۸. معادلات شعاعهای کانونی را که به نقطهٔ $(۱, -۱)$ واقع بر بیضی به معادلهٔ $x^۲+۵y^۲-۲x+۲۰y+۱۶=۰$ رسم می‌شوند، به‌دست آورید.

جواب: $x-۲y-۳=۰$، $x+۲y+۱=۰$.

۱۹. معادلهٔ بیضیی را به‌دست آورید که از نقطه‌های $(۱, ۰)$، $(۱, -۱)$، $(۲, ۲)$ و $(۰, ۴)$ بگذرد و محورهایش موازی محورهای مختصات باشد.

جواب: $۱۳x^۲+۲۳y^۲-۵۱x-۱۹y-۴=۰$.

۲۰. معادلهٔ مکان هندسی مرکز دایره‌ای را پیدا کنید که بر دایره‌های $x^۲+y^۲=۴$ و $x^۲+y^۲-۶x-۲۷=۰$ مماس باشد.

جواب:

$۲۲۰x^۲+۲۵۶y^۲-۶۶۰x-۳۰۲۵=۰$ و $۲۸x^۲+۶۴y^۲-۸۴x-۴۹=۰$.

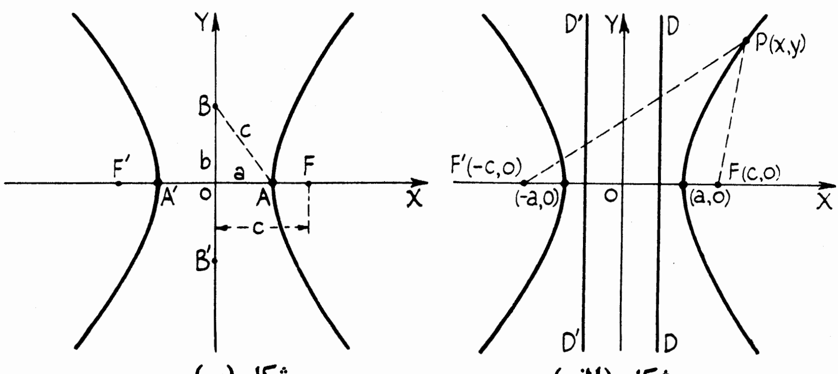
۷

هذلولی

هذلولی. نقطه‌ای طوری حرکت می‌کند که تفاضل فاصله‌هایش از دونقطهٔ $F(c,\ \circ)$ و $F'(-c,\ \circ)$ برابر $۲a$ است، که در آن a عددی ثابت است و $a<c$. حال می‌خواهیم معادلهٔ مکان هندسی نقطه را تعیین کنیم. به‌شکل (الف) مراجعه کنید.

فرض کنید $P(x,\ y)$ نقطه‌ای اختیاری واقع برمکان هندسی باشد، آنگاه:

$$F'P-PF=۲a \text{، یا } \sqrt{(x+c)^{۲}+(y-\circ)^{۲}}-\sqrt{(x-c)^{۲}+(y-\circ)^{۲}}=۲a$$



شکل (ب) شکل (الف)

یکی از رادیکالها را به‌طرف دیگرمعادله می‌بریم:

$$\sqrt{(x+c)^{2}+(y-0)^{2}}=2a+\sqrt{(x-c)^{2}+(y-0)^{2}}$$

عبارت فوق را به‌توان دو می‌رسانیم وجملات را دسته‌بندی می‌کنیم:

$$cx-a^{2}=a\sqrt{(x-c)^{2}+y^{2}}$$

عبارت را به‌توان‌دو می‌رسانیم وساده می‌کنیم:

$$(c^{2}-a^{2})x^{2}-a^{2}y^{2}=a^{2}(c^{2}-a^{2})$$

اگرطرفین تساوی را بر $a^{2}(c^{2}-a^{2})$ تقسیم کنیم، معادلهٔ $\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{c^{2}-a^{2}}=1$ به‌دست می‌آید.

$c>a$، بنابراین $c^{2}-a^{2}$ عددی مثبت است. مــی‌نویسیم، $c^{2}-a^{2}=b^{2}$. درایــن صورت شکل استاندارد معادلهٔ هذلولی را داریم که مرکزش مبدأ مختصات وکانونهایش روی محور xها قرار دارد، $\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$.

اگرکانونها نقطه‌های $(0\ ,c)$ و $(0\ ,-c)$ باشند، شکل استاندارد هذلولی عبارت است از: $\frac{y^{2}}{a^{2}}-\frac{x^{2}}{b^{2}}=1$

صورت کلی معادلهٔ یك هذلولی که مرکزش مبدأمختصات وکانونهایش برمحورهای مختصات واقع باشند $Ax^{2}-By^{2}=\pm 1$ است، علامت مثبت هنگامی برقرار است که کانونها روی محور xها باشند.

چون معادله تنها شامل توانهای زوج x و y است، منحنی نسبت به محور xهـا و yها ومبدأ مختصات متقارن است.

پاره‌خط AA' را قطرکانونی یا قطرحقیقی هذلولی می‌گویند وطول آن $2a$ است. پاره‌خط BB' را قطر غیرحقیقی هذلولی می‌گویند وطــول آن $2b$ است. شکل (ب) را ببینید.

خروج از مرکز $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}{a}$ است. واضح‌است که $e>1$، واین باتعریف عمومی مقاطع مخروطی سازگاراست. معادلات‌خطهای هادی DD و $D'D'$، وقتی‌کانونها روی محور xها باشند، $x=\pm\frac{a}{e}$ و وقتی‌کانونها روی محور yها باشند، $y=\pm\frac{a}{e}$است.

رأسهای هذلولی نقطه‌هایی هستند که در آنها منحنی محورکانونیش را قطع می‌کند.

طول وترکانونی هذلولی $\frac{2b^2}{a}$ است.

معادلات مجانبها، اگر محور xها محور کانونی هذلولی باشد، عبارتند از، $y=\pm\frac{b}{a}x$ و اگرمحور yها محورکانونی هذلولی‌باشد، عبارتند از، $y=\pm\frac{a}{b}x$.

اگرمرکز هذلولی نقطهٔ (h, k) ومحورکانونیش موازی محور xها باشد، شکل استاندارد هذلولی عبارت است از:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

اگر محورکانونی هذلولی با محور yها موازی باشد، معادلهٔ آن عبارت است از:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

معادلات‌مجانبها، اگرمحورکانونی‌موازی‌محور xها باشد، $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$،

واگرمحورکانونی موازی محور yها باشد، $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$ است.

صورت کلی معادلهٔ هذلولی با فرض‌اینکه محورهای هذلولی با محور xها و yها موازی باشد، $Ax^2-By^2+Dx+Ey+F=0$ است که در آن A و B یک علامت دارند.

مسئله‌های حل شده

۱. معادلهٔ یك هذلولی را بیابید که مرکز آن مبدأ مختصات باشد ومحورکانونیش برمحور yها قرار داشته باشد و ازنقطه‌های $(4, 6)$ و $(1, -3)$ بگذرد.

در معادلهٔ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$، به‌جای x و y مختصات نقطه‌های داده شده را قرار می‌دهیم. درنتیجه: $\frac{36}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1$ و $\frac{9}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$. با حل این دستگاه دو معادله، $a^2=\frac{36}{5}$ و $b^2=4$. با قراردادن این مقادیر در معادلهٔ عمومی هذلولی وپس ازساده

کردن، داریم، $\frac{5y^2}{36}-\frac{x^2}{4}=1$، یا $5y^2-9x^2=36$.

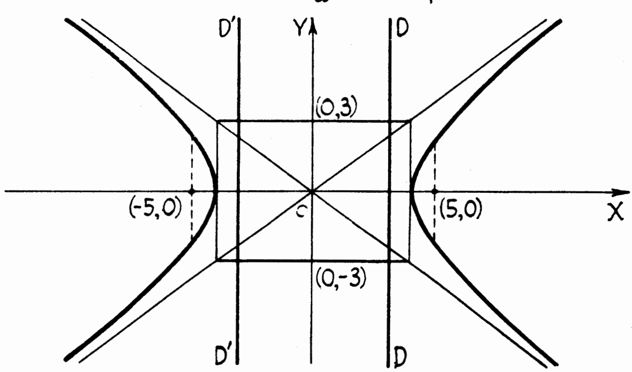
۲. مطلوب است تعیین مختصات رأسها و کانونها، معادلات خطهای هادی، معادلات مجانبها، طول وتر کانونی، خروج ازمرکز و رسم نمودار هذلولی $9x^2-16y^2=144$.

معادلهٔ هذلولی را به‌صورت $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ می‌نویسیم. آنگاه $a=4$، $b=3$ و $c=\sqrt{16+9}=5$. نقطه‌های برخورد هذلولی با محورهای مختصات $(\pm 4, 0)$ و کانونها $(\pm 5, 0)$ هستند.

خروج ازمرکز $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$، ومعادلهٔ خطهای هادی عبارتند از، $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{16}{5}$.

طول وتر کانونی برابر است با، $\frac{2b^2}{a}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$. معادلات مجانبها عبارتند از:

$$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{3}{4}x$$



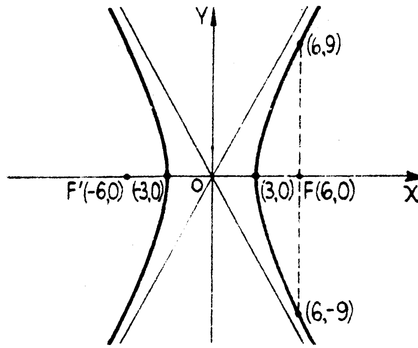
۳. طول وتر کانونی یک هذلولی برابر ۱۸ وفاصلهٔ بین دوکانون آن ۱۲، محورهایش موازی محورهای مختصات و مرکزش مبدأ مختصات است. معادلهٔ این هذلولی را تعیین کنید.

طول وتر کانونی برابراست با، $\frac{2b^2}{a}=18$، و $2c=12$. آنگاه $b^2=9a$ و $c=6$.

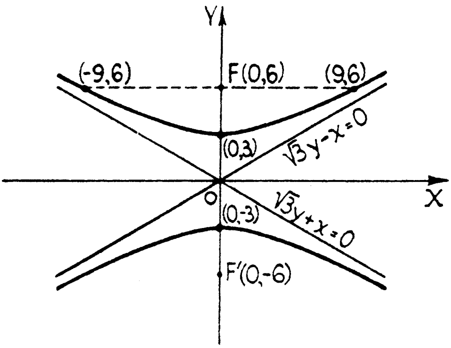
$b^2=c^2-a^2=36-a^2$، درنتیجه $9a=36-a^2$، یا $a^2+9a-36=0$.

با حل آن، $(a+12)(a-3)=0$ و -12، $a=3$. جواب $a=-12$ قابل قبول نیست. به‌ازای $a^2=9$، $b^2=36-9=27$ ودومعادلهٔ مطلوب عبارتند از:

الف) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$، یا $3x^2-y^2=27$؛ ب) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{27}=1$، یا $3y^2-x^2=27$.



(الف)



(ب)

۴. مطلوب است تعیین معادلهٔ یک هذلولی با کانونهای $(۰ , \pm۳)$ وقطرغیرحقیقی به‌طول ۵.

$c=۳$ و $b=\frac{۵}{۲}$ مشخص است. آنگاه $a^۲=c^۲-b^۲=۹-\frac{۲۵}{۴}=\frac{۱۱}{۴}$. با قرار دادن این مقادیر در رابطهٔ $\frac{y^۲}{a^۲}-\frac{x^۲}{b^۲}=۱$، نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{y^۲}{\frac{۱۱}{۴}}-\frac{x^۲}{\frac{۲۵}{۴}}=۱ \quad \text{، یا} \quad ۱۰۰y^۲-۴۴x^۲=۲۷۵$$

۵. مطلوب است تعیین معادلهٔ یک هذلولی که دارای مرکزی درمبدأ مختصات است، محور کانونیش روی محور xها قرار دارد، خروج ازمرکزش $\frac{۱}{۲}\sqrt{۷}$ وطول وتر کانونیش ۶ است.

داریم، $e=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{a}=\frac{\sqrt{۷}}{۲}$، طول وتر کانونی برابراست با، $\frac{۲b^۲}{a}=۶$، یا $b^۲=۳a$. با حل دستگاه معادلات $a^۲+b^۲=\frac{۷}{۴}a^۲$ و $b^۲=۳a$ ، خواهیم داشت، $a^۲=۱۶$ ، $b^۲=۱۲$. اگر این مقادیر را درمعادلهٔ $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ قرار دهیم، معادلهٔ موردنظر عبارت است از، $\frac{x^۲}{۱۶}-\frac{y^۲}{۱۲}=۱$، یا $۳x^۲-۴y^۲=۴۸$.

۶. نقطه‌ای طوری حرکت می‌کند که حاصل‌ضرب فاصله‌های جهت‌دار آن از دو خط $۴x-۳y+۱۱=۰$ و $۴x+۳y+۵=۰$، برابر $\frac{۱۴۴}{۲۵}$ است. معادلهٔ مکان هندسی آن را پیدا کنید.

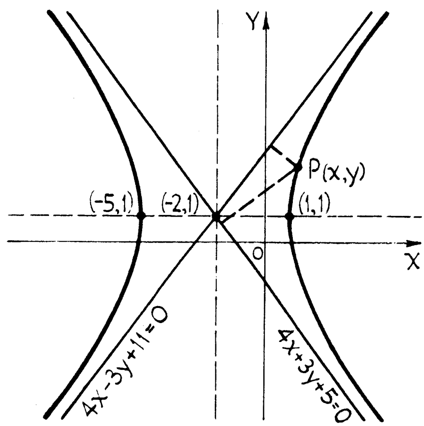
فرض کنید $P(x, y)$ نقطه‌ای دلخواه روی مکان هندسی باشد. آنگاه:

$$\left(\frac{۴x-۳y+۱۱}{-۵}\right)\left(\frac{۴x+۳y+۵}{-۵}\right)=\frac{۱۴۴}{۲۵}$$

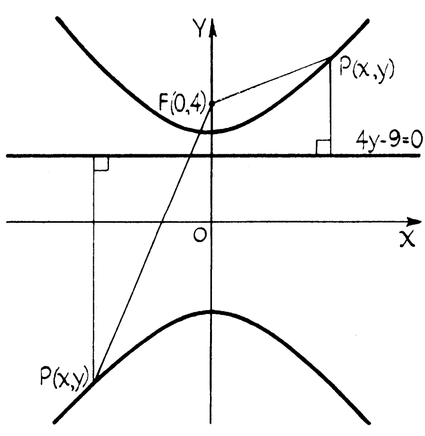
پس از ساده کردن:

$$۱۶x^{۲}-۹y^{۲}+۶۴x+۱۸y-۸۹=۰ \text{ ، یا } \frac{(x+۲)^{۲}}{۹}-\frac{(y-۱)^{۲}}{۱۶}=۱$$

این معادلهٔ یك هذلولی است که خطوط داده شده، مجانبهای آن هستند.



۰۷ نقطهٔ $P(x, y)$ طوری حرکت می‌کند که فاصله‌اش از نقطهٔ $(۰ , ۴)$ چهارسوم فاصله‌اش از خط $۴y-۹=۰$ است. مطلوب است تعیین معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ P.



$$\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}=\frac{4}{3}\left(\frac{4y-9}{4}\right)$$

اگر این عبارت را به‌توان‌دو برسانیم و ساده کنیم، داریم $9x^2-7y^2+63=0$، یا $1=\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}$. که معادلهٔ یك هذلولی است.

۸. معادلهٔ یك هذلولی را بدست آورید که مرکزش درمبدأ مختصات، یك رأس آن نقطهٔ $(6, 0)$ ومعادلهٔ یك مجانبش $4x-3y=0$ باشد.

معادلهٔ مجانب داده شده را بصورت $y=\frac{4}{3}x$ می‌نویسیم.

مجانبهای هذلولی $1=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ عبارتند از، $y=\pm\frac{b}{a}x$. بنابراین $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$.

چون نقطهٔ $(6, 0)$ یك‌رأس هذلولی است، $a=6$ و $b=\frac{4a}{3}=8$؛ ومعادلهٔ هذلولی عبارت‌است‌از، $1=\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}$.

۹. مطلوب است تعیین معادلهٔ یك هذلولی که مرکز آن $(-4, 1)$، رأسش نقطهٔ $(2, 1)$ ونصف قطر غیرحقیقیش برابر ۴ باشد.

فاصلهٔ بین مرکز ورأس ۶ است، بنابراین $a=6$. نصف قطر غیرحقیقی ۴ است، یعنی $b=4$. با قراردادن این مقادیر دررابطهٔ $1=\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}$، خواهیم داشت، $1=\frac{(x+4)^2}{36}-\frac{(y-1)^2}{16}$.

۱۰. مطلوب است تعیین الف) مرکز؛ ب) رأسها؛ ج) کانونها؛ د) معادلات مجانبها؛ ه) رسم نمودار یك هذلولی به‌معادلهٔ $9x^2-16y^2-18x-64y-199=0$.

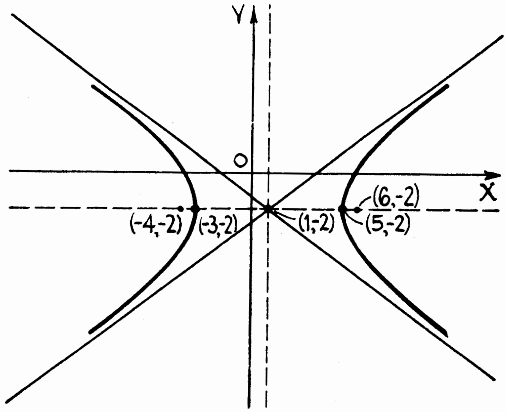
معادلهٔ هذلولی را به‌صورت مربع کامل درمی‌آوریم و آن را به‌شکل استاندارد $1=\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}$ می‌نویسیم.

$$9(x^2-2x+1)-16(y^2+4y+4)=199-64+9$$

$$9(x-1)^2-16(y+2)^2=144$$

$$\frac{(x-۱)^۲}{۱۶}-\frac{(y+۲)^۲}{۹}=۱$$

جواب: الف) $(۱, -۲)$؛ ب) $(-۳, -۲)$، $(۵, -۲)$؛ ج) $(-۴, -۲)$، $(۶, -۲)$؛ د) $y+۲=\pm\frac{۳}{۴}(x-۱)$.



۱۱. معادلهٔ یك هذلولی را بنویسید که مجانبهایش $y=\pm\sqrt{۳}x$ باشند و از نقطهٔ $(۴, ۶)$ بگذرد.

مجانبهای هذلولی $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ بـا معادلات $y=\pm\frac{b}{a}x$ مشخص می‌شوند.

این معادلات را به صورت $\frac{y}{b}=\pm\frac{x}{a}$، یا $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=۰$ و $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۰$ می‌نویسیم.

چون $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=۰$، نتیجه می‌گیریم که معادلات مجانبهای هذلولی $\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ را می‌توان با صفر قرار دادن مقدار ثابت و تجزیهٔ معادله به‌عوامل اول به‌دست آورد.

پس در این مسئله معادلهٔ هذلولی به‌صورت $(y-\sqrt{۳}x)(y+\sqrt{۳}x)=C$ است که در اینجا C مقداری است ثابت. باقرار دادن مختصات نقطهٔ $(۴, ۶)$ در این رابطه، $C=(۶+۴\sqrt{۳})(۶-۴\sqrt{۳})=-۱۲$. در نتیجه معادلهٔ موردنظرعبارت است از، $(y-\sqrt{۳}x)(y+\sqrt{۳}x)=-۱۲$، یا $۳x^۲-y^۲=۱۲$.

تعریف. دوهذلولی را درصورتی مزدوج گویند که قطرهای کانونی وغیرحقیقی یکی به‌ترتیب قطرهای غیرحقیقی وکانونی دیگری باشد. اگرمعادلهٔ یك‌هذلولی به‌صورت

استاندارد آن نوشته شود. آنگاه معادلهٔ هذلولی مزدوج آن با تغییر علامتهای ضریب $x^{۲}$ و $y^{۲}$ درمعادلهٔ داده شده، به‌دست می‌آید.

۱۲. معادلهٔ هذلولی مزدوج با هذلولی $\frac{x^{۲}}{۹}-\frac{y^{۲}}{۱۶}=۱$ را بنویسید. معادلهٔ مجانبهای هریك از هذلولیها را بنویسید ومختصات کانونهای آنها را به‌دست آورید.

معادلهٔ هذلولی مزدوج $-\frac{x^{۲}}{۹}+\frac{y^{۲}}{۱۶}=۱$ است. برای هر دو هذلولی $c=\sqrt{۹+۱۶}=۵$. پس مختصات کانونهای هذلولی داده شده عبارت است از، $(\pm ۵, ۰)$ ومختصات کانونهای هذلولی مزدوج آن $(۰, \pm ۵)$ است.

هردو هذلولی دارای مجانبهای یکسان هستند ومعادلات آنها عبارتند از، $y=\pm\frac{۴}{۳}x$.

۱۳. نقطهٔ $P(x, y)$ طوری حرکت می کند که حاصل ضرب ضریب زاویه‌های خطهای حاصل ازاتصال آن به‌نقطه‌های $(-۲, ۱)$ و $(۴, ۵)$ برابر ۳ است. معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ P را به‌دست آورید.

$$\left(\frac{y-۱}{x+۲}\right)\left(\frac{y-۵}{x-۴}\right)=۳$$

پس ازساده کردن داریم، $۳x^{۲}-y^{۲}+۶y-۶x-۲۹=۰$، که معادلهٔ یك هذلولی است.

۱۴. نشان دهید که تفاضل فاصله‌های نقطهٔ $\left(۸, \frac{۸\sqrt{۷}}{۳}\right)$ واقع بر هذلولی به معادلهٔ $۶۴x^{۲}-۳۶y^{۲}=۲۳۰۴$ تا کانونهای هذلولی، برابر اندازهٔ قطر کانونی هذلولی است. این فاصله‌ها شعاعهای کانونی نقطه نام دارند.

معادله را به صورت $\frac{x^{۲}}{۳۶}-\frac{y^{۲}}{۶۴}=۱$ می‌نویسیم. بنابراین:

$$c=\pm\sqrt{۳۶+۶۴}=\pm ۱۰$$

اندازهٔ قطرکانونی برابر است با $۲a=۱۲$. تفاضل فاصله‌های نقطهٔ $\left(۸, \frac{۸\sqrt{۷}}{۳}\right)$

تا کانونهای هذلولی، یعنی $(\pm ۱۰ , ۰)$ عبارت است از:

$$\sqrt{(۸+۱۰)^۲+\left(\frac{۸\sqrt{۷}}{۳}-۰\right)^۲}-\sqrt{(۸-۱۰)^۲+\left(\frac{۸\sqrt{۷}}{۳}-۰\right)^۲}=$$

$$=\frac{۵۸}{۳}-\frac{۲۲}{۳}=۱۲$$

مسئله‌های تکمیلی

۱. الف) مختصات رأسها؛ ب) مختصات کانونها؛ ج) خروج ازمرکز؛ د) طول وتر کانونی؛ ه) معادلات مجانبهای هریك از هذلولیهای زیررا به‌دست آورید:

۱) $۴x^۲-۴۵y^۲=۱۸۰$ ۲) $۴۹y^۲-۱۶x^۲=۷۸۴$ ۳) $x^۲-y^۲=۲۵$.

جواب: ۱) الف) $(\pm ۳\sqrt{۵} , ۰)$ ب) $(\pm ۷ , ۰)$

ج) $\frac{۷\sqrt{۵}}{۱۵}$ د) $\frac{۸\sqrt{۵}}{۱۵}$ ه) $y=\pm\frac{۲\sqrt{۵}}{۱۵}x$.

۲) الف) $(۰ , \pm ۴)$ ب) $(۰ , \pm\sqrt{۶۵})$

ج) $\frac{\sqrt{۶۵}}{۴}$ د) $\frac{۴۹}{۲}$ ه) $y=\pm\frac{۴}{۷}x$.

۳) الف) $(\pm ۵ , ۰)$ ب) $(\pm ۵\sqrt{۲} , ۰)$

ج) $\sqrt{۲}$ د) ۱۰ ه) $y=\pm x$.

۲. معادلات هذلولیهایی راکه با مشخصات زیرارائه شده‌اند بنویسید:

الف) قطرکانونی ۸، کانونها $(\pm ۵ , ۰)$.

جواب: $۹x^۲-۱۶y^۲=۱۴۴$.

ب) قطرغیرحقیقی ۲۴، کانونها $(۰ , \pm ۱۳)$.

جواب: $۱۴۴y^۲-۲۵x^۲=۳۶۰۰$.

ج) مرکز $(۰ , ۰)$، یك کانون نقطهٔ $(۸ , ۰)$، یك رأس نقطهٔ $(۶ , ۰)$.

جواب: $۷x^۲-۹y^۲=۲۵۲$.

۳. نقطه‌ای طوری حرکت می‌کندکه تفاضل فاصله‌هایش ازدونقطهٔ $(۰ , ۳)$ و $(۰ , -۳)$، ۵ است. معادلهٔ مکان هندسی آن را به‌دست‌آورید.

جواب: $۴۴y^۲-۱۰۰x^۲=۲۷۵$.

۴. نقطه‌ای طوری حرکت می‌کند که فاصله‌اش از نقطهٔ $(0, 6)$، $\frac{3}{2}$ فاصله‌اش از خط $y - \frac{8}{3} = 0$ است. مطلوب است تعیین معادلهٔ مکان هندسی نقطه.

جواب: $5y^2 - 4x^2 = 80$.

۵. معادلهٔ یك هذلولی را بنویسید که مرکزش مبدأ مختصات، قطرکانونیش، واقع بر محور yها، اندازهٔ وترکانونی آن ۳۶، وفاصلهٔ کانونیش ۲۴ باشد.

جواب: $3y^2 - x^2 = 108$.

۶. معادلهٔ یك هذلولی، به‌مرکز مبدأ مختصات را بنویسید که قطرکانونیش برمحور yها واقع باشد، خروج از مرکز آن $2\sqrt{3}$ وطول وترکانونی آن ۱۸ باشد.

جواب: $121y^2 - 11x^2 = 81$.

۷. معادلهٔ یك هذلولی، به‌مرکز مبدأ مختصات را بنویسید که محورهایش منطبق برمحورهای مختصات باشد وازنقطه‌های $(3, 1)$ و $(9, 5)$ بگذرد.

جواب: $x^2 - 3y^2 = 6$.

۸. معادلهٔ یك هذلولی را به‌دست‌آورید که رأسهایش $(\pm 6, 0)$ و معادلهٔ مجانبهای آن $6y = \pm 7x$ باشد.

جواب: $49x^2 - 36y^2 = 1764$.

۹. نقطه‌ای طوری حرکت می‌کند که تفاضل فاصله‌هایش از نقطه‌های $(-6, -4)$ و $(2, -4)$، ۶ است. مطلوب‌است تعیین معادلهٔ مکان هندسی نقطه.

جواب: $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+4)^2}{7} = 1$.

۱۰. مطلوب‌است تعیین الف) مختصات مرکز؛ ب) مختصات کانونها؛ ج) مختصات رأسها؛ د) معادلات مجانبهای هذلولی $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$.

جواب: الف) $(2, -1)$؛ ب) $(7, -1)$، $(-3, -1)$؛ ج) $(6, -1)$، $(-2, -1)$؛ د) $y + 1 = \pm\frac{3}{4}(x - 2)$.

۱۱. نقطه‌ای طوری حرکت می‌کند که حاصلضرب ضریب زاویه‌های خطهای حاصل از اتصال آن نقطه به $(-2, 1)$ و $(3, 2)$، برابر ۴ است. نشان دهید مکان هندسی این نقطه یك هذلولی است.

جواب: $4x^2 - y^2 - 4x + 3y - 26 = 0$.

۱۲. نقطه‌ای طوری حرکت می‌کند که حاصل‌ضرب فاصله‌های جهت‌دار آن از خطهای $۳x-۴y+۱=۰$ و $۳x+۴y-۷=۰$، برابر $\frac{۱۴۴}{۲۵}$ است. معادلهٔ مکان هندسی نقطه را بیابید ونوع منحنی را تعیین کنید.

جواب: $۹x^۲-۱۶y^۲-۱۸x+۳۲y-۱۵۱=۰$، یك هذلولی است.

۱۳. معادلهٔ یك هذلولی را پیدا کنید که مرکز آن $(۰, ۰)$، یك رأسش $(۳, ۰)$ ومعادلهٔ یکی ازمجانبهای آن $۲x-۳y=۰$ باشد.

جواب: $۴x^۲-۹y^۲=۳۶$.

۱۴. معادلهٔ هذلولی مزدوج، هذلولی مسئلهٔ ۱۳ را بنویسید.

جواب: $۹y^۲-۴x^۲=۳۶$.

۱۵. نقطه‌های تلاقی دو هذلولی را بیابید، وآنها را رسم کنید.

$$x^۲-۲y^۲+x+۸y-۸=۰ \text{ ؛ } ۳x^۲-۴y^۲+۳x+۱۶y-۱۸=۰$$

جواب: $(-۲, ۳)$، $(-۲, ۱)$، $(۱, ۳)$، $(۱, ۱)$.

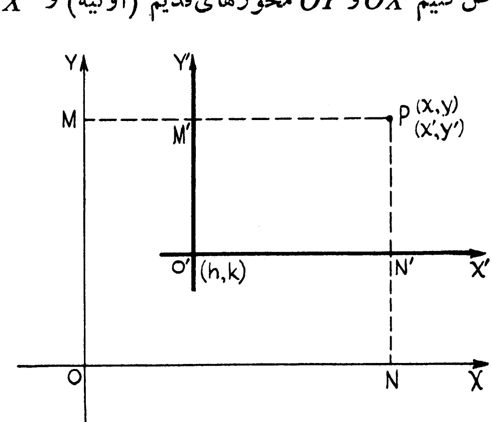
۱۶. نشان دهید که تفاضل فاصله‌های نقطهٔ $\left(۶, \frac{۳\sqrt{۵}}{۲}\right)$ واقع بر هذلولی به‌معادلهٔ $۹x^۲-۱۶y^۲=۱۴۴$ تا کانونهای هذلولی برابرطول قطر کانونی هذلولی است. این فاصله‌ها شعاعهای کانونی نقطه هستند.

۸

تغییر مختصات

مقدمه. گاهی اوقات اتفاق می‌افتد که انتخاب محورهای مختصات در آغاز حل مسئله‌ای، ما را به‌ساده‌ترین شکل معادله رهنمون نمی‌کند. هرمعادله را ممکن است بـا تغییرمناسب محورهای مختصات ساده کرد. این عمل را می‌توان در دو مرحله انجام داد، یکی انتقال محورها، ودیگری دوران محورها نام دارد.

انتقال محورها. فرض کنیم OX و OY محورهای قدیم (اولیه) و $O'X'$ و $O'Y'$ به ترتیب



به‌موازات محورهــای قدیم، محورهــای مختصات جدید باشند. همچنین فــرض می کنیم مختصات O' درمقایسه با محورهای مختصات قدیم نقطهٔ (h, k) باشد.

فــرض کنیم P نقطــه‌ای اختیاری در صفحهٔ مختصات باشد و مختصات آن نسبت به‌محورهای قــدیم (x, y) و نسبت به‌محورهای مختصات جدید (x', y') باشد. حــال می‌خواهیم x و y را برحسب x'، y'، h و k به‌دست‌آوریم:

$$x = MP = MM' + M'P = h + x'$$

و

$$y = NP = NN' + N'P = k + y'$$

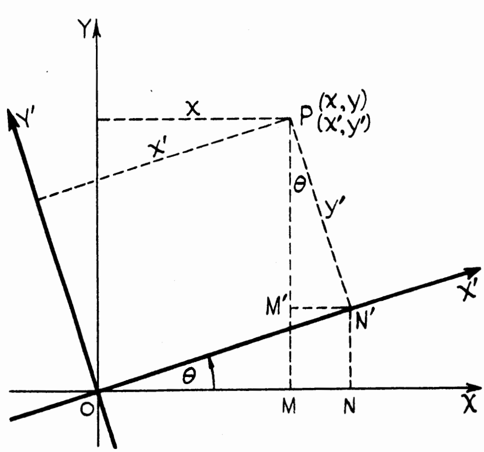
درنتیجه معادلات انتقال عبارتند از، $x = x' + h$ و $y = y' + k$.

دوران محورها. فرض کنید OX و OY محورهای‌مختصات‌قدیم و OX' و OY' محورهای جدید،ونقطهٔ O مبدأمختصات هریك ازدو دستگاه‌محورهای مختصات باشد. زاویهٔ $X'OX$ راکه محورها به‌اندازهٔ آن دوران کرده‌اند با θ نمایش می‌دهیم. فــرض می کنیم نقطهٔ P نقطه‌ای دلخواه درصفحهٔ مختصات باشد ومختصات‌آن نسبت بــه‌محورهای قدیم (x, y) ونسبت به‌محورهای‌جدید (x', y') باشد. برای‌تعیین x و y برحسب x'، y' و θ داریم:

$$x = OM = ON - MN$$
$$= x' \cos\theta - y' \sin\theta$$

و

$$y = MP = MM' + M'P = NN' + M'P$$
$$= x' \sin\theta + y' \cos\theta$$



بدین‌ترتیب دستورهای دوران محورهای مختصات به‌اندازهٔ زاویهٔ θ عبارتند از:

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$$

$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$

مسئله‌های حل شده

۱. اگر مبدأ مختصات به نقطهٔ $(۲, -۱)$ انتقال داده شود، معادلهٔ منحنی زیر را تعیین کنید.

$$۲x^۲ + ۳y^۲ - ۸x + ۶y = ۷$$

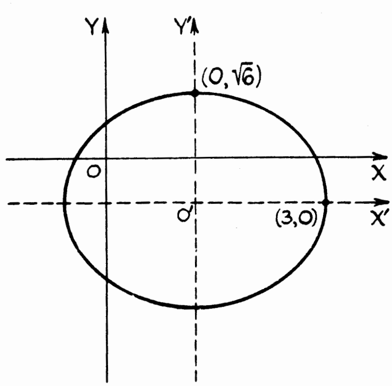
اگردر معادلهٔ منحنی $x = x' + ۲$ و $y = y' - ۱$ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$۲(x' + ۲)^۲ + ۳(y' - ۱)^۲ - ۸(x' + ۲) + ۶(y' - ۱) = ۷$$

عبارت بالا را بسط می‌دهیم وسپس ساده می‌کنیم. معادلهٔ منحنی نسبت به‌محورهای جدید عبارت است از:

$$۲x'^۲ + ۳y'^۲ = ۱۸$$

این معادلهٔ استاندارد یك بیضی است که مرکزش مبدأ مختصات جدید باشد و محور کانونیش برمحور x' قرار داشته باشد ونصف قطرهایش $a = ۳$ و $b = \sqrt{۶}$ باشند.



۲. مطلوب است انتقال محورهای مختصات به‌طوری که معادلهٔ

$$۳x^۲ - ۴y^۲ + ۶x + ۲۴y = ۱۳۵$$

به‌صورتی تبدیل شود که درآن ضرایب جمله‌های درجهٔ اول صفر باشند.

درمعادله به‌جای x و y به‌ترتیب مقادیر $x'+h$ و $y'+k$ را قرار می‌دهیم‌وسپس ضرایب توانهای مختلف x' و y' را دسته‌بندی می کنیم.

$$۳(x'+h)^۲-۴(y'+k)^۲+۶(x'+h)+۲۴(y'+k)=۱۳۵$$

یا

$$۳x'^۲-۴y'^۲+(۶h+۶)x'-(۸k-۲۴)y'+۳h^۲-۴k^۲+$$
$$+۶h+۲۴k=۱۳۵$$

از رابطهٔ $۶h+۶=۰$ و $۸k-۲۴=۰$، به‌دست می آید، $h=-۱$ و $k=۳$. و معادلـه به صورت $۳x'^۲-۴y'^۲=۱۰۲$ در می‌آید. ایـن صورت استاندارد یـك هذلولی است به‌مرکز مبدأ مختصات،کـه محور کانونیش برمحور xها منطبق و نصف قطرکانونی آن $\sqrt{۳۴}$ است.

روش دیگر. غالباً روش زیـر برای حذف جملات درجهٔ اول مـورد استفاده قرار می گیرد.

عبارت را به‌صورت مربع کامل درمی آوریم. $۳x^۲-۴y^۲+۶x+۲۴y=۱۳۵$ می‌شود،

$$۳(x^۲+۲x+۱)-۴(y^۲-۶y+۹)=۱۰۲$$

یا

$$۳(x+۱)^۲-۴(y-۳)^۲=۱۰۲$$

به جـای $x+۱$ ، x' و به جای $y-۳$، y' را قرار می‌دهیم. آنگاه معادله چنین می‌شود:

$$۳x'^۲-۴y'^۲=۱۰۲$$

۳. مطلـوب است تعیین معادلـهٔ سهمی $x^۲-۲xy+y^۲+۲x-۴y+۳=۰$، اگـر محورهای مختصات به‌اندازهٔ $۴۵°$ دوران داده شوند.

$$x=x'\cos ۴۵°-y'\sin ۴۵°=\frac{x'-y'}{\sqrt{۲}}$$

و

$$y=x'\sin ۴۵°+y'\cos ۴۵°=\frac{x'+y'}{\sqrt{۲}}$$

مقادیرفوق را در معادلهٔ داده شده قرار می‌دهیم:

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{۲}}\right)^۲-۲\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{۲}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{۲}}\right)+\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{۲}}\right)^۲+$$
$$+۲\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{۲}}\right)-۴\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{۲}}\right)+۳=۰$$

با بسط وساده کردن آن،معادله به‌صورت $۲y'^{۲}-\sqrt{۲}x'-۳\sqrt{۲}y'+۳=۰$ تبدیل می‌شود که یك سهمی است به‌رأس $\left(\frac{۳\sqrt{۲}}{۸},\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}\right)$، که محورش با محور x' جدید موازی است.

۴. با چه‌زاویه‌ای باید محورهای مختصات را دوران دهیم تا جملهٔ xy معادلهٔ $۷x^{۲}-۶\sqrt{۳}xy+۱۳y^{۲}=۱۶$، حذف شود.

$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta$ و $y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$ را درمعادلهٔ داده‌شده قرار می‌دهیم:

$$۷(x'\cos\theta-y'\sin\theta)^{۲}-۶\sqrt{۳}(x'\cos\theta-y'\sin\theta)(x'\sin\theta+$$
$$+y'\cos\theta)+۱۳(x'\sin\theta+y'\cos\theta)^{۲}=۱۶$$

پس از بسط ودسته‌بندی ضرایب جملات مختلف:

$$(۷\cos^{۲}\theta-۶\sqrt{۳}\sin\theta\cos\theta+۱۳\sin^{۲}\theta)x'^{۲}+$$
$$+[۱۲\sin\theta\cos\theta-۶\sqrt{۳}(\cos^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta)]x'y'+$$
$$+(۷\sin^{۲}\theta+۶\sqrt{۳}\sin\theta\cos\theta+۱۳\cos^{۲}\theta)y'^{۲}=۱۶$$

به‌منظورحذف جملهٔ $x'y'$، ضریب آن را مساوی صفر قرارمی‌دهیم ومعادله را نسبت به θ حل می کنیم:

$$۱۲\sin\theta\cos\theta-۶\sqrt{۳}(\cos^{۲}\theta-\sin^{۲}\theta)=۰$$

یا

$$۶\sin ۲\theta-۶\sqrt{۳}(\cos ۲\theta)=۰$$

درنتیجه، $\tan ۲\theta=\sqrt{۳}$، $۲\theta=۶۰^{\circ}$ و $\theta=۳۰^{\circ}$.

هرگاه این مقدار θ را دررابطهٔ بالاقراردهیم، معادله به‌صورت $x'^{۲}+۴y'^{۲}=۴$ تبدیل می‌شود. این معادلهٔ یك بیضی است که مرکز آن مبدأ مختصات و محورهایش در امتداد محورهای جدید است. نصف قطرها عبارتند از، $a=۲$، $b=۱$.

عمومی‌ترین صورت معادلهٔ درجهٔ دوم. این صورت، چنین است:

$$Ax^{۲}+Bxy+Cy^{۲}+Dx+Ey+F=۰$$

دربحث وبررسی کلی این معادله ثابت می‌شود که می‌توان زاویهٔ θ، یعنی زاویه‌ای که لازم است تا محورهای مختصات به‌منظور حذف جملهٔ xy دوران داده شود، را از

رابطهٔ $\tan 2\theta = \dfrac{B}{A-C}$ به‌دست آورد.

۵. با انتقال و دوران محورهـا، معادلهٔ $5x^2+6xy+5y^2-4x+4y-4=0$ را به‌ساده‌ترین شکل آن درآورید. منحنی را درهرسه دستگاه مختصات رسم کنید. بـرای حذف جملات درجهٔ اول، رابطهٔ $x=x'+h$، $y=y'+k$ را به‌کار می گیریم:

$$5(x'+h)^2+6(x'+h)(y'+k)+5(y'+k)^2-4(x'+h)+$$
$$+4(y'+k)-4=0$$

پس از بسط ودسته‌بندی جملات:

$$5x'^2+6x'y'+5y'^2+(10h+6k-4)x'+(10k+6h+4)y'+$$
$$+5h^2+6hk+5k^2-4h+4k-4=0$$

قرار می‌دهیم، $10h+6k-4=0$ و $10k+6h+4=0$. باحـل آن، نتیجه می گیریم که، $h=1$، $k=-1$. آنگاه‌معادله به‌صورت $5x'^2+6x'y'+5y'^2=8$ تبدیل می‌شود.

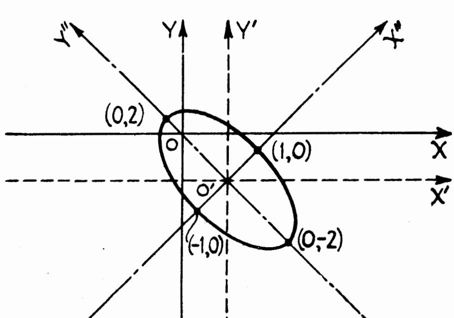
برای تعیین θ، از $\tan 2\theta = \dfrac{B}{A-C} = \dfrac{6}{5-5} = \infty$ استفاده می کنیم.

بنابراین $\qquad 2\theta = 90^\circ$ و $\theta = 45^\circ$

معادلات دوران عبارتند از، $y' = \dfrac{x''+y''}{\sqrt{2}}$، $x' = \dfrac{x''-y''}{\sqrt{2}}$.

با قراردان این عبارتها در معادلهٔ اخیر:

$$5\left(\frac{x''-y''}{\sqrt{2}}\right)^2+6\left(\frac{x''-y''}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x''+y''}{\sqrt{2}}\right)+5\left(\frac{x''+y''}{\sqrt{2}}\right)^2=8$$



هرگاه عبارت را بسط دهیم وسپس ساده کنیم، معادله به‌صورت $۴x''^۲+y''^۲=۴$ ساده می‌شود. این‌معادلهٔ بیضیی است که محورهایش برمحورهای x'' و y'' قراردارند، مرکز آن مبدأ مختصات، نصف قطرکانونی آن ۲ ونصف قطرناکانونی آن یك است.

معادلهٔ عمومی. $Ax^۲+Bxy+Cy^۲+Dx+Ey+F=۰$، به‌استثنای حالتهای خاص، معادلهٔ یك مقطع مخروطی است. می توان ثابت کرد که:

اگر $B^۲-۴AC<۰$ باشد، منحنی یك بیضی است.

اگر $B^۲-۴AC=۰$ باشد، منحنی یك سهمی است.

اگر $B^۲-۴AC>۰$ باشد، منحنی یك هذلولی است.

برای حالتهای خاصی که ممکن است وجود داشته باشد، مکان هندسی معادلهٔ فوق می‌تواند دوخط راست، یك نقطه یا موهومی باشد.

۶. نوع مکان هندسی معادلهٔ $۴x^۲-۴xy+y^۲-۶x+۳y+۲=۰$ را تعیین کنید.

چون $B^۲-۴AC=۱۶-۱۶=۰$، مکان هندسی می‌تواند یك سهمی باشد.

با دسته‌بندی جملات این معادله، می‌توان آن را به‌عوامل ضرب تجزیه نمود:

$$(۴x^۲-۴xy+y^۲)-۳(۲x-y)+۲=۰$$

$$(۲x-y)^۲-۳(۲x-y)+۲=۰$$

$$(۲x-y-۱)(۲x-y-۲)=۰$$

مکان هندسی،دوخط موازی به‌معادلهٔ $۲x-y-۱=۰$ و $۲x-y-۲=۰$است.

۷. نوع مکان هندسی معادلهٔ $۹x^۲-۱۲xy+۷y^۲+۴=۰$ را مشخص کنید.

دراینجا $B^۲-۴AC=(۱۴۴-۲۵۲)<۰$، که این شرط لازم برای بیضی بودن مکان است.

با وجود این، هرگاه این معادله را به صورت $(۳x-۲y)^۲+۳y^۲+۴=۰$ بنویسیم، می بینیم که‌هیچیك ازمقادیرحقیقی x و y درمعادله صدق نمی کند. مکان‌هندسی فوق موهومی است.

روش دیگر بدین صورت است که با استفاده ازدستور معادلهٔ درجهٔ دوم، معادله را برای y برحسب x حل کنیم:

$$y=\frac{+۱۲x\pm\sqrt{(۱۲x)^۲-۴(۷)(۹x^۲+۴)}}{۲(۷)}=\frac{+۶x\pm\sqrt{-(۲۷x^۲+۲۸)}}{۷}$$

به‌ازای همهٔ مقادیرحقیقی x، مکان هندسی فوق موهومی است.

۸. جملهٔ درجهٔ اول معادلهٔ $۳x^۲+۴y^۲-۱۲x+۴y+۱۳=۰$ را حذف کنید.

عبارت را به‌صورت مربع کامل درمی‌آوریم:

$۳(x^۲-۴x+۴)+۴\left(y^۲+y+\frac{۱}{۴}\right)=۰$، یا $۳(x-۲)^۲+۴\left(y+\frac{۱}{۲}\right)^۲=۰$.

قرارمی‌دهیم، $x-۲=x'$ و $y+\frac{۱}{۲}=y'$. بنابراین $۳x'^۲+۴y'^۲=۰$، که تنها $x'=۰$ و $y'=۰$ در آن صادق است، که مبدأ جدید و مکان هندسی معادله است. مکان هندسی معادلهٔ اصلی، نقطهٔ $\left(۲, -\frac{۱}{۲}\right)$ است.

۹. معادلهٔ $۴x^۲-۴xy+y^۲-۸\sqrt{۵}x-۱۶\sqrt{۵}y=۰$ را ساده کنید.

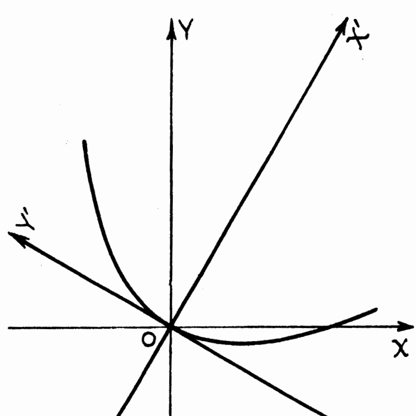
چون $B^۲-۴AC=۰$، مکان هندسی ممکن است سهمی باشد.

درحالتی‌که مکان هندسی سهمی باشد، قبل از انتقال، محورها را دوران می‌دهیم.

$\tan ۲\theta=\frac{-۴}{۴-۱}=-\frac{۴}{۳}$، بنابراین $\cos ۲\theta=-\frac{۳}{۵}$.

چون $\cos ۲\theta=۲\cos^۲\theta-۱=-\frac{۳}{۵}$، $\cos^۲\theta=\frac{۱}{۵}$ ، $\cos\theta=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ و $\sin\theta=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$.

معادلات دوران $x=\frac{x'-۲y'}{\sqrt{۵}}$ و $y=\frac{۲x'+y'}{\sqrt{۵}}$ هستند. با قراردادن آنها در معادله، داریم:



$$۴\left(\frac{x'-۲y'}{\sqrt{۵}}\right)^۲-۴\left(\frac{x'-۲y'}{\sqrt{۵}}\right)\left(\frac{۲x'+y'}{\sqrt{۵}}\right)+\left(\frac{۲x'+y'}{\sqrt{۵}}\right)^۲-$$

$$-۸\sqrt{۵}\left(\frac{x'-۲y'}{\sqrt{۵}}\right)-۱۶\sqrt{۵}\left(\frac{۲x'+y'}{\sqrt{۵}}\right)=۰$$

پس از بسط وساده نمودن، معادلهٔ $y'^۲-۸x'=۰$ به‌دست می‌آید که یك سهمی است.

۱۵. معادلهٔ $xy-۲y-۴x=۰$ را ساده کنید. منحنی را در هر سه دستگاه مختصات رسم کنید.

چون $B^۲-۴AC=۱>۰$، منحنی درصورتی که وجود داشته باشد، هذلولی است.

اگر $x=x'+h$ و $y=y'+k$ را درمعادله قراردهیم، معادلهٔ زیر به‌دست‌می‌آید:

$$(x'+h)(y'+k)-۲(y'+k)-۴(x'+h)=۰$$

یا

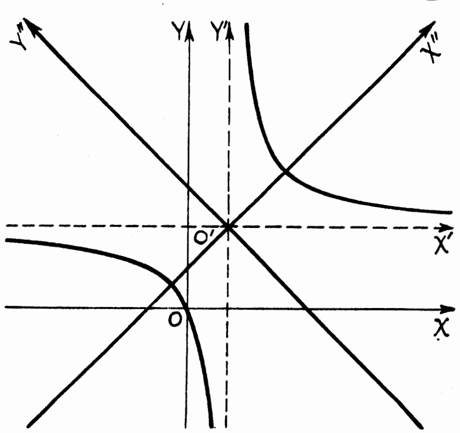
$$x'y'+(k-۴)x'+(h-۲)y'+hk-۲k-۴h=۰$$

وقتی $k=۴$ و $h=۲$، معادله به‌صورت $x'y'=۸$ درمی‌آید.

برای تعیین زاویهٔ دوران، $\tan ۲\theta=\frac{۱}{۰}=\infty$، $۲\theta=۹۰^\circ$ و $\theta=۴۵^\circ$.

آنگاه $x'=\frac{x''+y''}{\sqrt{۲}}$ ، $y'=\frac{x''-y''}{\sqrt{۲}}$ و $\left(\frac{x''-y''}{\sqrt{۲}}\right)\left(\frac{x''+y''}{\sqrt{۲}}\right)=۸$.

پس ازساده کردن، معادلهٔ نهایی عبارت است از، $x''^۲-y''^۲=۱۶$ که یك هذلولی متساوی‌القطرین است.



۱۱. معادلهٔ یك مقطع مخروطی را بیابید که از پنج نقطهٔ $(1,1)$، $(2,3)$، $(3,-1)$، $(-3,2)$ و $(-2,-1)$ بگذرد.

معادلهٔ عمومی درجهٔ دوم را بر A تقسیم می‌کنیم و به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2+B'xy+C'y^2+D'x+E'y+F'=0$$

به‌جای x و y مختصات نقطه‌ها را قرار می‌دهیم:

$$B'+C'+D'+E'+F'=-1$$

$$6B'+9C'+2D'+3E'+F'=-4$$

$$-3B'+C'+3D'-E'+F'=-9$$

$$-6B'+4C'-3D'+2E'+F'=-9$$

$$2B'+C'-2D'-E'+F'=-4$$

اگر این معادلات را حل کنیم، داریم:

$$B'=\frac{8}{9}\ \text{،}\ C'=-\frac{13}{9}\ \text{،}\ D'=-\frac{1}{9}\ \text{،}\ E'=\frac{19}{9}\ \text{و}\ F'=-\frac{22}{9}$$

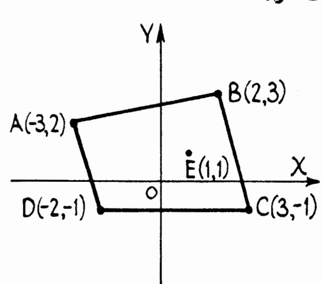
این مقادیررا در معادلهٔ اصلی قرار می‌دهیم وسپس ساده می‌کنیم. معادلهٔ حاصل عبارت است از:

$$9x^2+8xy-13y^2-x+19y-22=0$$

چون $B^2-4AC=(64+468)>0$، مقطع مخروطی یك هذلولی است.

روش دیگر. روش دیگری برای حل این مسئله به‌صورت زیراست:

$x-5y+13=0$ معادلهٔ خط AB و $y+1=0$ معادلهٔ خط CD است. معادلهٔ این زوج خط عبارت است از:



$$(y+1)(x-5y+13)=xy-5y^2+x+8y+13=0$$

به‌طریق مشابه، معادلهٔ زوج خط AD و BC عبارت است از:

$$12x^2+7xy+y^2-5x-4y-77=0$$

دسته منحنیهایی که ازنقطه‌های تقاطع این خطها می‌گذرند چنین است:

$$xy-5y^2+x+8y+13+k(12x^2+7xy+y^2-5x-4y-77)=0$$

برای به‌دست آوردن معادلهٔ یك منحنی این دسته‌که ازنقطهٔ پنجم $(1, 1)$ بگذرد، به‌جای x و y مختصات این نقطه را قرارمی‌دهیم ومعادله را نسبت به k حل‌می‌کنیم.

در نتیجه:
$$k=\frac{3}{11}$$

هرگاه این مقداررا به‌جای k درمعادلهٔ دسته قرار دهیم، معادله به‌صورت $9x^2+8xy-13y^2-x+19y-22=0$ تبدیل می‌شود.

مسئله‌های تکمیلی

۱. هریك ازمعادلات زیر را با انتقال محورها با استفاده از روابط $x=x'+h$ و $y=y'+k$ به‌ساده‌ترین شکل آن تبدیل کنید، ونوع مکان هندسی را بیان‌کنید.

الف) $y^2-6y-4x+5=0$.

جواب: $y^2=4x$، سهمی.

ب) $x^2+y^2+2x-4y-20=0$.

جواب: $x^2+y^2=25$، دایره.

ج) $3x^2-4y^2+12x+8y-4=0$.

جواب: $3x^2-4y^2=12$، هذلولی.

د) $2x^2+3y^2-4x+12y-20=0$.

جواب: $2x^2+3y^2=34$، بیضی.

ه) $x^2+5y^2+2x-20y+25=0$.

جواب: $x^2+5y^2+4=0$، بیضی موهومی.

۲. بااستفاده‌ازروش‌کامل‌کردن مربع، درهریك ازمعادلات زیرجملات درجهٔ اول راحذف کنید.

الف) $x^2+2y^2-4x+6y-8=0$.

جواب: $2x^2+4y^2=33$.

ب) $3x^2-4y^2-6x-8y-10=0$.

جواب: $3x^2-4y^2=9$.

ج) $2x^2+5y^2-12x+10y-17=0$.

جواب: $2x^2+5y^2=40$.

د) $3x^2+3y^2-12x+12y-1=0$.

جواب: $3x^2+3y^2=25$.

۳. با انتقال محورها، جملات درجهٔ اول $2xy-x-y+4=0$ را حذف کنید.

جواب: $4xy+7=0$.

۴. با انتقال محورها، جملات درجهٔ اول $x^2+2xy+3y^2+2x-4y-1=0$ را حذف کنید. جواب: $2x^2+4xy+6y^2-13=0$.

۵. هریک‌ازعبارات زیر، معادلهٔ یک‌مقطع مخروطی‌است. نوع‌هریک از آنها را تعیین کنید. دستور B^2-4AC را به‌کار گیرید.

الف) $3x^2-10xy+3y^2+x-32=0$. جواب: هذلولی.

ب) $41x^2-84xy+76y^2=168$. جواب: بیضی.

ج) $16x^2+24xy+9y^2-30x+40y=0$. جواب: سهمی.

د) $xy+x-2y+3=0$. جواب: هذلولی.

ه) $x^2-4xy+4y^2=4$. جواب: دوخط موازی.

۶. معادلهٔ $9x^2+24xy+16y^2+90x-130y=0$ را با دوران محورها ساده کنید. نوع مکان هندسی را مشخص کنید.

جواب: $x^2-2x-6y=0$، سهمی.

۷. محورها را به‌اندازهٔ زاویهٔ $\theta=\tan^{-1}\frac{4}{3}$ دوران دهید و سپس معادلهٔ

$$9x^2+24xy+16y^2+80x-60y=0$$

را ساده کنید. نمودارمنحنی را درهرسه دستگاه مختصات رسم کنید.

جواب: $x^2-4y=0$.

۸. با تغییر مناسب محورها، هریک ازمعادلات زیررا ساده‌کنید. ضمناً هرمنحنی رادرهرسه دستگاه مختصات رسم کنید.

الف) $9x^2+4xy+6y^2+12x+36y+44=0$.

جواب: $2x^2+y^2=2$.

ب) $x^2-10xy+y^2+x+y+1=0$.

جواب: $32x^2-48y^2=9$.

ج) $17x^2-12xy+8y^2-68x+24y-12=0$.

جواب: $x^2+4y^2=16$.

د) $2x^2+3xy+4y^2+2x-3y+5=0$.

جواب: هیچ مکانی (موهومی).

۹. مطلوب است تعیین معادلهٔ مقطع مخروطیی که از نقطه‌های $(5, 2)$، $(1, -2)$، $(-1, 1)$، $(2, 5)$ و $(-1, -2)$ می‌گذرد.

جواب: $49x^2-55xy+36y^2-110x-19y-231=0$، بیضی.

۱۰. مطلوب است تعیین معادلهٔ مقطع مخروطیی که از نقطه‌های $(1, 1)$، $(-1, 2)$، $(0, -2)$، $(-2, -1)$ و $(3, -3)$ می‌گذرد.

جواب: $16x^2+46xy+49y^2+16x+23y-150=0$، بیضی.

۱۱. مطلوب است تعیین معادلهٔ مقطع مخروطی گذرنده از نقطه‌های $(4, 1)$، $(2, 2)$، $(3, -2)$، $(4, -1)$ و $(1, -3)$.

جواب: $17x^2-16xy+54y^2+11x+64y-370=0$، بیضی.

۱۲. مطلوب است تعیین معادلهٔ مقطع مخروطی گذرنده از نقطه‌های $(1, 6)$، $(-3, -2)$، $(-5, 0)$، $(3, 4)$ و $(0, 10)$.

جواب: $xy-2x+y-10=0$، هذلولی.

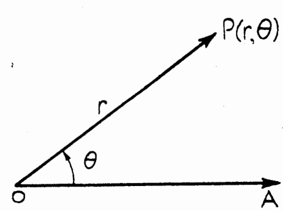
۹

مختصات قطبی

مختصات قطبی. گاهی اوقات به‌جای اینکه موضع یك‌نقطه را درصفحه برحسب فاصله‌های آن از دو خط عمود بر هم، بیان کنیم، بهتر است موقعیت آن را با توجه به‌فاصله‌اش از نقطه‌ای ثابت، و جهت آن نسبت به‌خطی ثابت، گذرنده ازاین نقطه، نمایش دهیم. مختصات نقطه در چنین دستگاهی، مختصات قطبی نام دارد.

دراین‌دستگاه، نقطهٔ ثابت O، قطب وخط جهت‌دار OA محورقطبی نامیده می‌شود.

مختصات قطبی نقطهٔ P را به‌صورت (r, θ) می‌نویسند که در آن r فاصلهٔ OP و θ زاویهٔ برداری AOP است. فاصلهٔ r که بر ضلع دوم زاویهٔ AOP از O تا P اندازه گرفته می‌شود، مثبت‌است. مانند مثلثات، زاویهٔ برداری θ مثبت است، اگر درخلاف‌جهت حرکت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری شود و منفی است، اگر در جهت حرکت عقربه‌های ساعت‌اندازه‌گیری‌شود. چون r همیشه‌بزرگتر ازصفر درنظرگرفته‌می‌شود، نقطهٔ $(-r, \theta)$ را به $(r, \pi+\theta)$ تبدیل می‌کنیم.



اگر r و θ به‌طریقی به‌کمك یك معادله به هم مربوط شوند، می‌توانیم مقادیری به θ نسبت‌دهیم ومقادیر متناظر برای r را تعیین‌کنیم. نقطه‌هایی‌که بدین ترتیب به‌دست‌می‌آیند، روی یك منحنی معین و معلوم قرار می‌گیرند.

تقارن. غالباً از تقارن بـرای رسم نمودار در مختصات قائم استفاده می‌شود. درمختصات قطبی نیز دستورهایی وجود داردکه هنگام رسم نمودار می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

اگر θ را به $-\theta$ تبدیل کنیم و درمعادله تغییری حاصل نشود، منحنی نسبت‌به‌محور قطبی، متقارن است.

اگر θ را به $\pi-\theta$ تبدیل‌کنیم و درمعادلهٔ منحنی تغییری حاصل نشود، منحنی‌نسبت به‌خط 90°، متقارن است.

یك منحنی در صورتی نسبت به‌قطب متقارن است‌که وقتی r به $-r$، یا θ به $\theta+\pi$ تبدیل شود، معادله‌اش تغییر نکند.

رابطهٔ بین مختصات قائم و قطبی. نقطهٔ $P(r, \theta)$ را در نظر بگیرید و فـرض کنید محور قطبی، OX، وقطب، O، به‌ترتیب نیمهٔ مثبت محور x هـا و مبدأ مختصات دستگاه مختصات قائم باشند. اگر (x, y) مختصات قائم نقطهٔ P باشد:

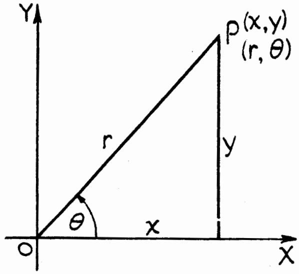
$$x=r\cos\theta$$

$$y=r\sin\theta$$

و

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

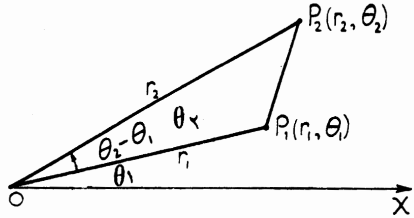


مسئله‌های حل شده

۱. فاصلهٔ بین نقطه‌های $P_۱(r_۱, \theta_۱)$ و $P_۲(r_۲, \theta_۲)$ را پیدا کنید.

چون دو ضلع و زاویهٔ بین دو ضلع مثلث را در اختیار داریم، ضلع سوم مثلث را می‌توان مطابق قانون کسینوسها پیدا کرد:

$$P_۱P_۲=\sqrt{r_۱^۲+r_۲^۲-۲r_۱r_۲\cos(\theta_۲-\theta_۱)}$$



۲. فاصلهٔ بین نقطه‌های $(۶, ۱۵^\circ)$ و $(۸, ۷۵^\circ)$ را به‌دست آورید.

با به‌کارگیری صورت و شکل مسئلهٔ ۱، داریم:

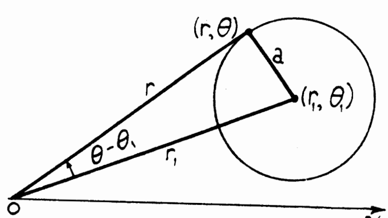
$$d=\sqrt{۶^۲+۸^۲-۲(۶)(۸)\cos(۷۵^\circ-۱۵^\circ)}$$

$$=\sqrt{۳۶+۶۴-۹۶\left(\frac{۱}{۲}\right)}=۲\sqrt{۱۳}$$

۳. معادلهٔ قطبی دایره‌ای را بیابید که مرکزش $(r_۱, \theta_۱)$ و شعاع آن a باشد.

فرض کنید (r, θ) نقطه‌ای دلخواه روی دایره باشد. با استفاده از قانون کسینوسها، معادله به‌صورت زیر خواهد بود:

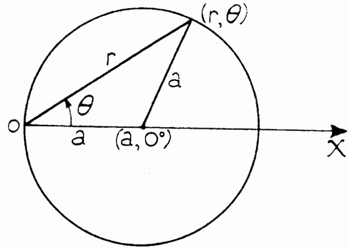
$$a^۲=r^۲+r_۱^۲-۲rr_۱\cos(\theta-\theta_۱)\text{، یا } r^۲-۲r_۱r\cos(\theta-\theta_۱)+r_۱^۲=a^۲$$



۴. معادلهٔ دایره‌ای به‌مرکز $(a, ۰^\circ)$ و شعاع a را بنویسید.

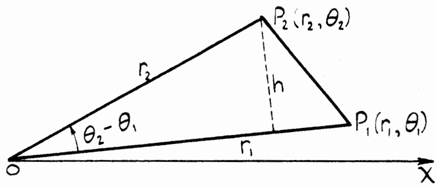
در اینجا $\theta_۱=۰^\circ$. بنا به قانون کسینوسها، $a^۲=r^۲+a^۲-۲ra\cos\theta$. درنتیجه

معادلهٔ مطلوب عبارت است از، $r^{۲} = ۲ar\cos\theta$، یا $r = ۲a\cos\theta$.



۵. مطلوب است محاسبهٔ مساحت مثلثی که رأسهای آن عبارتند از، $(۰, ۰^\circ)$، $(r_۱, \theta_۱)$ و $(r_۲, \theta_۲)$.

$$\text{مساحت} = \frac{۱}{۲}(OP_۱)(h) = \frac{۱}{۲}(r_۱)r_۲\sin(\theta_۲ - \theta_۱) = \frac{۱}{۲}r_۱r_۲\sin(\theta_۲ - \theta_۱)$$

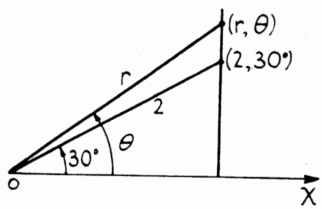


۶. مساحت مثلثی را بیابید که رأسهای آن عبارتند از، $(۰, ۰^\circ)$، $(۶, ۲۰^\circ)$ و $(۹, ۵۰^\circ)$.

$$\text{مساحت} = \frac{۱}{۲}r_۱r_۲\sin(\theta_۲ - \theta_۱)$$

$$= \frac{۱}{۲}(۶)(۹)\sin(۵۰^\circ - ۲۰^\circ) = ۱۳٫۵ \text{ واحد مربع}$$

۷. معادلهٔ قطبی خطی را بیابید که از نقطهٔ $(۲, ۳۰^\circ)$ بگذرد و بر OX عمود باشد.



فرض کنیم (r, θ) نقطه‌ای اختیاری واقع بر خط باشد.

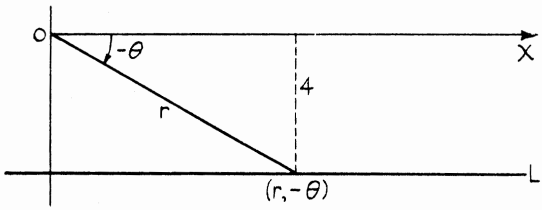
$$r\cos\theta = \sqrt{۳} \text{ یا } ، r\cos\theta = ۲\cos ۳۰^\circ = ۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = \sqrt{۳}$$

۸. معادلهٔ قطبی خط راستی‌را بیابید که با محور قطبی OX موازی و ۴ واحد پایین آن‌باشد.

فرض کنیم $(r, -\theta)$ نقطه‌ای دلخواه بر خط L باشد.

پس $r\sin(-\theta) = ۴$ ، یا $r\sin\theta + ۴ = ۰$.

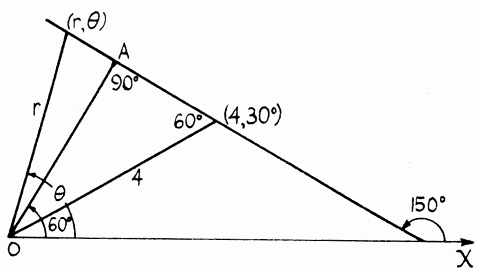
تذکر. $\cos(-\theta) = \cos\theta$ ؛ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.



۹. خطی از نقطهٔ $(۴, ۳۰^\circ)$ می‌گذرد و با محور قطبی، زاویهٔ ۱۵۰° می‌سازد. معادلهٔ آن‌را به‌دست آورید.

فرض کنیم (r, θ) نقطه‌ای اختیاری روی خط مطلوب باشد.

$OA = r\cos(\theta - ۶۰^\circ) = ۴\sin ۶۰^\circ$ ، یا $r\cos(\theta - ۶۰^\circ) = ۲\sqrt{۳}$.



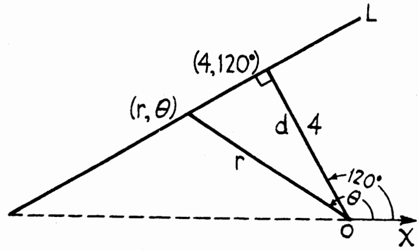
۱۰. معادلهٔ خطی را بیابید که از نقطهٔ $(۴, ۱۲۰^\circ)$ بگذرد و بر خطی که نقطهٔ $(۴, ۱۲۰^\circ)$ و قطب $(۰, ۰)$ را به‌هم متصل می‌سازد عمود باشد.

فرض کنید (r, θ) نقطه‌ای دلخواه روی این‌خط باشد. خط L برخط d عمود است.

پس، $d = r\cos(\theta - ۱۲۰^\circ) = ۴$ ، و معادلهٔ خط L عبارت است از:

$$r\cos(\theta - ۱۲۰^\circ) = ۴$$

معادلهٔ $r\cos(\theta - ۱۲۰^\circ) = ۴$ ، شکل قطبی معادلهٔ نرمال خطی است که در دستگاه مختصات قائم با $p = ۴$ و $\omega = ۱۲۰^\circ$ مشخص می‌شود.



۱۱. مکان هندسی نقطهٔ $P(r,\theta)$ را طوری به‌دست آورید که $\frac{OP}{MP}=e$ باشد (e مقداری ثابت است).

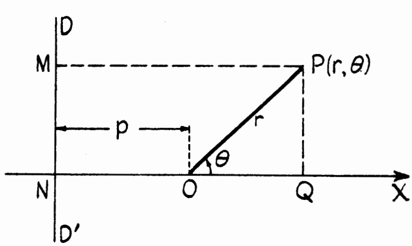
$$MP=NO+OQ=p+r\cos\theta$$

$OP=e(MP)$، پس $r=e(p+r\cos\theta)$، یا $r=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$.

اگر $D'D$ در طرف راست قطب O باشد، این معادله به‌صورت $r=\frac{ep}{1+e\cos\theta}$ درمی‌آید.

چون نقطهٔ $P(r,\theta)$ طوری حرکت می‌کند که نسبت فاصله‌اش از نقطهٔ ثابت O، قطب، به فاصله‌اش از خط ثابت $D'D$ مقداری ثابت و برابر e است، منحنی حاصل مقطعی مخروطی است که نوع آن بستگی به مقدار e دارد.

اگر خط ثابت $D'D$ با محور قطبی موازی باشد، معادله به‌صورت $r=\frac{ep}{1\pm e\sin\theta}$ تبدیل می‌شود.



۱۲. مطلوب است تعیین نوع مقطع مخروطیی که با معادلهٔ $r=\frac{12}{4+3\cos\theta}$ داده شده است.

اگر صورت و مخرج کسر را بر ۴ تقسیم کنیم، معادلهٔ $r=\frac{3}{1+\frac{3}{4}\cos\theta}$ نتیجه می‌شود.

بنا براین $e=\frac{۳}{۴}$ و مکان هندسی، یك بیضی است.

$ep=۳$ یا $\frac{۳}{۴}p=۳$ است. پس $p=۴$ و خط هادی $D'D$ بر محور قطبی عمود و ۴ واحد در طرف راست قطب است.

۰۱۳ معادلهٔ قطبی بیضی $۹x^۲+۴y^۲=۳۶$ را بیابید.

با استفاده از رابطه‌های $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ و قرار دادن آن در معادلهٔ بیضی معادلهٔ مطلوب عبارت است از:

$$۹r^۲\cos^۲\theta+۴r^۲\sin^۲\theta=۳۶ \text{، یا } r^۲(۴+۵\cos^۲\theta)=۳۶$$

۰۱۴ معادلهٔ $r^۲-۲r(\cos\theta-\sin\theta)-۷=۰$ را در شکل مختصات قطبی بنویسید.

اگر مقادیر $r=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و $\theta=\tan^{-۱}\frac{y}{x}$ را درمعادله قراردهیم، معادلهٔمطلوب

$$x^۲+y^۲-۲\sqrt{x^۲+y^۲}\left(\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}}-\frac{y}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\right)-۷=۰$$

یا $x^۲+y^۲-۲x+۲y-۷=۰$،

است، که دایره‌ای به مرکز $(۱, -۱)$ و شعاع ۳ است.

۰۱۵ صورت مختصات قائم معادلهٔ $r=\frac{۴}{۱-\cos\theta}$، یا $r(۱-\cos\theta)=۴$ را بنویسید.

مقادیر $r=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و $\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}}$ را درمعادله قرار می‌دهیم و نتیجه می گیریم، $\sqrt{x^۲+y^۲}\left(۱-\frac{x}{\sqrt{x^۲+y^۲}}\right)=۴$.

پس از ساده کردن، $\sqrt{x^۲+y^۲}-x=۴$، یا $\sqrt{x^۲+y^۲}=x+۴$.

طرفین این تساوی را بـه توان دو می‌رسانیم، $x^۲+y^۲=x^۲+۸x+۱۶$، یـا $y^۲-۸x-۱۶=۰$، که معادلهٔ سهمیی با رأس $(-۲, ۰)$ است و نسبت به محور xها متقارن است.

۰۱۶ معادلهٔ زیر را به‌دستگاه مختصات قائم تبدیل کنید. نوع منحنی را مشخص کنید.

$$r=\frac{۱}{۱-۲\sin\theta}$$

قرارمی‌دهیم، $\sqrt{x^۲+y^۲}=\frac{۱}{۱-\frac{۲y}{\sqrt{x^۲+y^۲}}}$.

پس از ساده کردن، $\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}-2y}$،

یا $\sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-2y-1\right)=0$

اما $\sqrt{x^2+y^2}$ صفر است، اگر و تنها اگر $x=y=0$ باشد.

عبارت $\sqrt{x^2+y^2}-2y-1=0$ را بـه توان دو می‌رسانیم و ساده مـی‌کنیم.

نتیجه می‌شود، $x^2-3y^2-4y-1=0$، که یك هذلولی است.

۱۷. مختصات نقطه‌های تقاطع زوج منحنی زیر را به‌دست آورید:

$$r=1-\cos\theta \qquad (1)$$

$$r=\sin\frac{1}{2}\theta \qquad (2)$$

بنا به‌روابط مثلثاتی، $1-\cos\theta=2\sin^2\frac{1}{2}\theta$.

پس، $2\sin^2\frac{1}{2}\theta=\sin\frac{1}{2}\theta$، یا $\sin\frac{1}{2}\theta\left(2\sin\frac{1}{2}\theta-1\right)=0$. اگر این معادله

راحل کنیم، ریشه‌های آن عبارتنداز: $\frac{1}{2}$، $\sin\frac{1}{2}\theta=0$.

به‌ازای $\sin\frac{1}{2}\theta=0$، داریم $\theta=0^\circ$؛ به‌ازای $\sin\frac{1}{2}\theta=\frac{1}{2}$، داریم $\frac{1}{2}\theta=30^\circ، 150^\circ$

و $\theta=60^\circ، 300^\circ$.

بنا براین مختصات نقطه‌های تقاطع عبارتنداز: $(0, 0^\circ)$، $\left(\frac{1}{2}, 60^\circ\right)$، $\left(\frac{1}{2}, 300^\circ\right)$.

۱۸. مطلوب است تعیین مختصات مرکز و شعاع دایره‌ای به‌معادلهٔ

$$r^2+4r\cos\theta-4\sqrt{3}\,r\sin\theta-20=0$$

از صورت کلی معادلهٔ دایـره در مسئلهٔ ۳ استفاده می‌کنیم. اگـر آن را بسط دهیم به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$r^2-2r(r_1\cos\theta_1\cos\theta+r_1\sin\theta_1\sin\theta)+r_1^2-a^2=0،$$

یا $$r^2-2r_1\cos\theta_1(r\cos\theta)-2r_1\sin\theta_1(r\sin\theta)+r_1^2-a^2=0$$

با مقایسهٔ معادلهٔ داده شده با شکل بسط یافتهٔ معادلهٔ دایره، داریم:

$$-۲r_۱ \cos\theta_۱ = ۴ \qquad (۱)$$

$$۲r_۱ \sin\theta_۱ = ۴\sqrt{۳} \qquad (۲)$$

$$r_۱^۲ - a^۲ = -۲۰ \qquad (۳)$$

اگرمعادلهٔ(۲) رابرمعادلهٔ(۱) تقسیم‌کنیم، داریم $\tan\theta_۱ = -\sqrt{۳}$،یا $\theta_۱ = ۱۲۰^\circ$.
$\theta_۱ = ۱۲۰^\circ$ را در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم، $-۲r_۱\left(-\frac{۱}{۲}\right) = ۴$، یا $r_۱ = ۴$.
آنگاه از رابطهٔ (۳) داریم، $۱۶ - a^۲ = -۲۰$ و $a = ۶$.
بنابراین، دایره دارای مرکز $(۴, ۱۲۰^\circ)$ و شعاع ۶ است.

۱۹. نقطه‌ای‌طوری حرکت می‌کند که حاصل‌ضرب فاصله‌های آن از دو نقطهٔ $(-a, ۰^\circ)$و $(a, ۰^\circ)$ برابر است با $a^۲$. معادلهٔ مکان هندسی نقطه را پیدا کنید.

در مثلث AOP، بنا به قانون کسینوسها داریم:

$$AP = \sqrt{a^۲ + r^۲ - ۲ar\cos(۱۸۰^\circ - \theta)} = \sqrt{a^۲ + r^۲ + ۲ar\cos\theta}$$

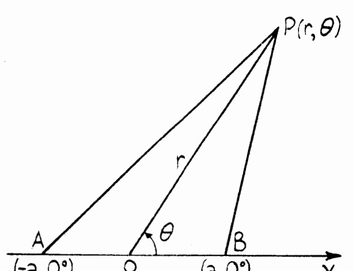
در مثلث BOP، $PB = \sqrt{a^۲ + r^۲ - ۲ar\cos\theta}$.

$$(AP)(PB) = \sqrt{(a^۲ + r^۲)^۲ - ۴a^۲r^۲\cos^۲\theta} = a^۲$$

طرفین‌تساوی را به‌توان‌دومی‌رسانیم، $a^۴ + ۲a^۲r^۲ + r^۴ - ۴a^۲r^۲\cos^۲\theta = a^۴$.
ساده می‌کنیم:

$$r^۴ + ۲a^۲r^۲ - ۴a^۲r^۲\cos^۲\theta = ۰ \text{، یا } r^۲(r^۲ + ۲a^۲ - ۴a^۲\cos^۲\theta) = ۰$$

بنابراین معادلهٔ مطلوب عبارت است از، $r^۲ + ۲a^۲ - ۴a^۲\cos^۲\theta = ۰$، یا $r^۲ = ۲a^۲(۲\cos^۲\theta - ۱) = ۲a^۲\cos ۲\theta$. (معادلهٔ پروانه یا لمنیسکات است. به‌مسئلهٔ ۲۵ مراجعه کنید.)



۲۰. پاره‌خطی به‌طول $۲a$ مفروض است؛ به‌طوری که دو سرآن بر دو خط ثابت و عمود

برهم قرار دارد. مکان هندسی پای قائم از نقطهٔ تقاطع دو خط ثابت برخط مفروض را به‌دست آورید.

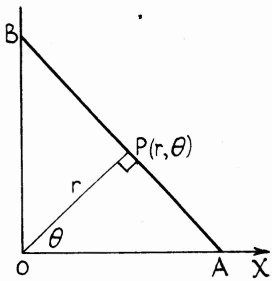
فرض می‌کنیم یکی از دو خط ثابت محور قطبی، و نقطهٔ تلاقی دو خط قطب باشد.

$$OA = OP \sec\theta = AB \cos(۹۰^\circ - \theta)،$$

یا
$$r \sec\theta = ۲a \cos(۹۰^\circ - \theta)،$$

یا
$$\frac{r}{\cos\theta} = ۲a \sin\theta$$

پس $r = ۲a \sin\theta \cos\theta$، یا $r = a \sin ۲\theta$ (رز چهار گلبرگی).



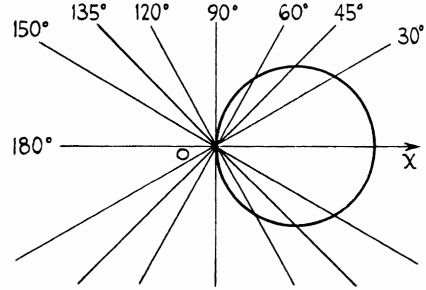
۲۱. مکان هندسی معادلهٔ $r = ۱۰ \cos\theta$ را موردبحث و بررسی قراردهید و نمودار آن‌را رسم کنید.

$\cos(-\theta) = \cos\theta$، بنابراین مکان هندسی نسبت به‌محور قطبی متقارن است.

زاویهٔ θ می‌تواند هر مقدار دلخواهی را اختیارکند، اما حدود تغییرات r از ۰ تا ۱۰± است.

برای تعیین نقطه‌های واقع بر نمودار منحنی، مقادیری به θ نسبت می‌دهیم ومقادیر متناظر را برای r به‌دست می‌آوریم. از مسئلهٔ ۴ می‌دانیم کـه مکان هندسی، دایره‌ای به‌شعاع ۵ است که مرکز آن روی محور قطبی است.

θ	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۱۸۰°
r	۱۰	۸٫۷	۷٫۱	۵	۰	−۵	−۷٫۱	−۸٫۷	−۱۰

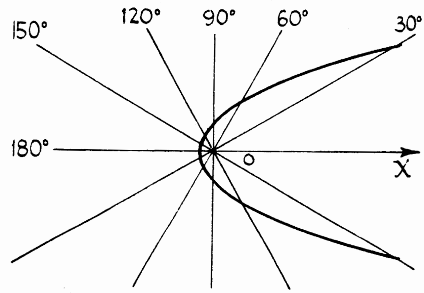


۲۲. نمودار معادلهٔ $r=\frac{۲}{۱-\cos\theta}$ را رسم کنید.

$\cos(-\theta)=\cos\theta$، بنابراین منحنی نسبت به‌محور قطبی متقارن است.

به‌ازای $\theta=۰°$، r بی‌نهایت می‌شود و به‌ازای $\theta=۱۸۰°$، $r=۱$. منحنی، یک‌منحنی باز است.

مکان هندسی معادله، یک سهمی است. به‌مسئلهٔ ۱۱ مراجعه کنید.



θ	۰°	۳۰°	۶۰°	۹۰°	۱۲۰°	۱۵۰°	۱۸۰°	۲۱۰°	۲۴۰°	۲۷۰°	۳۰۰°	۳۳۰°	۳۶۰°
r	∞	۱۴٫۹	۴	۲	۱٫۳	۱٫۱	۱	۱٫۱	۱٫۳	۲	۴	۱۴٫۹	∞

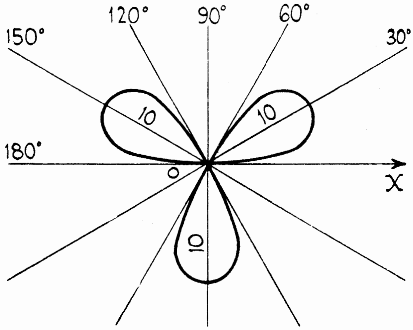
۲۳. نمودار رز سه‌گلبرگی به‌معادلهٔ $r=۱۰\sin ۳\theta$ را رسم کنید.

چون سینوس درناحیهٔ اول و دوم‌مثبت و درناحیهٔ سوم و چهارم منفی‌است،بنابراین منحنی نسبت به‌خطی‌که از قطب می‌گذرد و بر محور قطبی عمود است متقارن است.

r وقتی صفر است که ۳θ، ۰° یا مضرب صحیحی از ۱۸۰° باشد، یعنی $\theta=۰°, ۶۰°, ۱۲۰°, \ldots$. r وقتی بیشترین مقدار عددی خود را دارد که

$3\theta = ۹۰^\circ, ۲۷۰^\circ$ یامضرب فردی‌از ۹۰° باشد، یعنی ... , ۱۵۰° , ۹۰° , $\theta = ۳۰^\circ$.

θ	۰°	۳۰°	۶۰°	۹۰°	۱۲۰°	۱۵۰°	۱۸۰°	۲۱۰°	۲۴۰°	۲۷۰°	۳۰۰°	۳۳۰°
r	۰	۱۰	۰	-۱۰	۰	۱۰	۰	-۱۰	۰	۱۰	۰	-۱۰



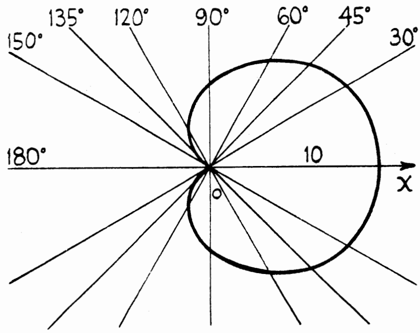
۲۴. معادلهٔ کاردیوئید یا دلنما به‌معادلهٔ $r = ۵(۱ + \cos\theta)$ را رسم کنید.

این منحنی نسبت به‌محور قطبی متقارن است.

چون $\cos\theta$ از ۱ تا ۱ − تغییر می‌کند، r نمی‌تواند منفی باشد.

وقتی θ از ۰° تا ۱۸۰° تغییر می‌کند، مقدار r از ۱۰ تا ۰ تغییر می‌کند.

θ	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۱۸۰°
r	۱۰	۹٫۳	۸٫۵	۷٫۵	۵	۲٫۵	۱٫۵	۰٫۶۷	۰



۲۵. نمودار پراونهٔ زیر را مورد بحث و بررسی قرار دهید و رسم کنید.

$$r^{۲}=۹\cos ۲\theta$$

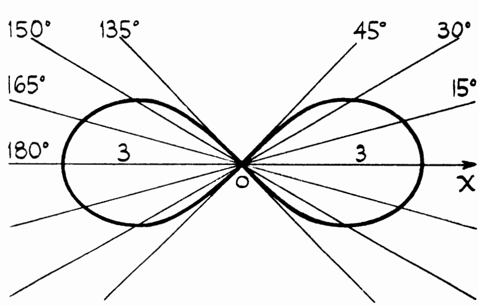
اگر r را بـه $-r$ و θ را به $-\theta$ تبدیل کنیم، چون $\cos ۲\theta=\cos(-۲\theta)$ و $r^{۲}=(-r)^{۲}$، معادله تغییری نمی‌کند. پس مکان‌هندسی نسبت‌به‌قطب و همچنین‌محور قطبی متقارن است.

به‌ازای $\theta=۰^{\circ}$، $\cos\theta=۰$ و $r=۳$، r بیشترین مقدار خود را دارد.

بـه‌ازای $۱۳۵^{\circ}>\theta>۴۵^{\circ}$ و $۳۱۵^{\circ}>\theta>۲۲۵^{\circ}$، r موهومی است. بـه‌ازای $\theta=\pm ۴۵^{\circ}$، داریم $\cos ۲\theta=۰$؛ درنتیجه $r=۰$، و خطهای $\theta=\pm\frac{\pi}{۴}$ درمبدأ، بر منحنی مماس هستند.

$$r=\pm ۳\sqrt{\cos ۲\theta}.$$

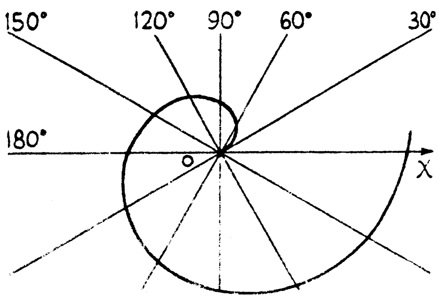
θ	۲θ	$\cos ۲\theta$	r
۰	۰	۱	± ۳
۱۵°	۳۰°	۰٫۸۶۶	$\pm ۲٫۸$
۳۰°	۶۰°	۰٫۵	$\pm ۲٫۱$
۴۵°	۹۰°	۰	۰



۲۶. مکان هندسی نقطه‌ای را به‌دست آورید که شعاع حامل آن متناسب با زاویهٔ حاملش باشد.

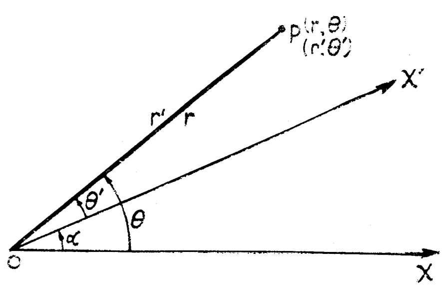
معادلهٔ آن $r=a\theta$ است. این منحنی حلزون ارشمیدس نام دارد.

θ	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
r	۰	۰٫۵۲a	۱٫۰a	۱٫۶a	۳٫۱a	۴٫۷a	۶٫۳a



۲۷. اگر $P(r,\theta)$ نقطه‌ای دلخواه باشد، نشان دهید اگر محور قطبی حول زاویهٔ دلخواه α طوری دوران داده شود که مختصات جدید (r',θ') باشد، آنگاه $r'=r$ و $\theta'=\theta-\alpha$.

دستور دوران در مختصات قطبی عبارت است از، $\theta=\theta'+\alpha$ و $r=r'$.



۲۸. محور قطبی را به‌اندازهٔ زاویهٔ ۹۰° درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران داده‌ایم. ثابت کنید معادلهٔ کاردیوئید مسئلهٔ ۲۴ به‌صورت $r=۵(۱-\sin\theta)$ تبدیل می‌شود.

به‌جای θ مقدار $۹۰^\circ+\theta'$ را قرار می‌دهیم. چون $\cos(۹۰^\circ+\theta')=-\sin\theta'$،

$r'=۵[۱+\cos(۹۰^\circ+\theta')]=۵(۱-\sin\theta')$.

مسئله‌های تکمیلی

۱. با استفاده ازصفحهٔ مختصات قطبی، نقاط زیررا رسم کنید:

$(۲,۳۰^\circ)$، $(-۳,۳۰^\circ)$، $(۵,۷۵^\circ)$، $(۳,۲۱۰^\circ)$، $\left(۲,\frac{\pi}{۲}\right)$، $(-۲,۲۷۰^\circ)$،

$(-۴,۳۰۰^\circ)$، $\left(-۳,-\frac{۵\pi}{۶}\right)$، $(۴,۰)$، $(۰,۳۰^\circ)$، $(۰,۶۰^\circ)$.

۲. فاصلهٔ بین زوج نقطه‌های زیررا تا یك‌دهم تقریب به‌دست‌آورید:

الف) $(۵,۴۵^\circ)$ و $(۸,۹۰^\circ)$. جواب: ۵٫۷.

ب) $(-۵,-۱۲۰^\circ)$ و $(۴,۱۵۰^\circ)$. جواب: ۶٫۴.

ج) $(۵۰,۳۰^\circ)$ و $(۵۰,-۹۰^\circ)$. جواب: ۸۶٫۶.

د) $(۳,۱۵۰^\circ)$ و $(-۲,۶۰^\circ)$. جواب: ۳٫۶.

۳. مساحت مثلثی‌راکه رأسهای آن هریك از زوج نقطه‌های مسئلهٔ ۲ وقطب است پیدا کنید.
جواب: الف) ۱۴٫۱۴؛ ب) ۱۰؛ ج) ۱۰۸۲٫۵؛ د) ۳.

۴. معادلهٔ قطبی خط راستی را بنویسید که از نقطهٔ $(۴,۱۲۰^\circ)$ بگذرد و برمحور OX عمود باشد. جواب: $r\cos\theta+۲=۰$.

۵. معادلهٔ قطبی خط گذرنده ازنقطهٔ $(۳,-۳۰^\circ)$ وموازی با محور OX را بنویسید.
جواب: $۲r\sin\theta+۳=۰$.

۶. معادلهٔ قطبی خط گذرنده ازنقطهٔ $(۲,۱۲۰^\circ)$ وقطب را بنویسید.

جواب: $\theta=\frac{۲\pi}{۳}$.

۷. معادلهٔ قطبی خطی را بیابیدکه ازنقطهٔ $\left(۴,\frac{۲\pi}{۳}\right)$ بگذرد و برخطی که قطب را به‌این نقطه متصل می‌سازد عمود باشد. جواب: $r\cos\left(\theta-\frac{۲\pi}{۳}\right)=۴$.

۸. معادلهٔ قطبی خط گذرنده ازنقطهٔ $(۳,۰^\circ)$ راکه بامحورقطبی زاویهٔ $\frac{۳\pi}{۴}$ می‌سازد بیابید. به‌ازای $\theta=-\frac{\pi}{۴}$ مقدار r را به‌دست‌آورید و دربارهٔ جوابتان توضیح دهید.

جواب: $\sqrt{۲}\,r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{۴}\right)=۳$.

۹. معادلهٔ قطبی خطی را که از نقطهٔ $(۴, ۲۰^\circ)$ می‌گذرد و با محور قطبی، زاویهٔ ۱۴۰° می‌سازد به‌دست آورید. جواب: $r\cos(\theta - ۵۰^\circ) = ۲\sqrt{۳}$.

۱۰. معادلهٔ قطبی دایره‌ای را بیابید که مرکزش درقطب وشعاع آن ۵ باشد.
جواب: $r = ۵$.

۱۱. معادلهٔ قطبی دایره‌ای به‌مرکز $(۴, ۳۰^\circ)$ را به‌دست آورید که شعاع آن ۵ باشد.

جواب: $r^۲ - ۸r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{۶}\right) - ۹ = ۰$.

۱۲. مطلوب است تعیین معادلهٔ دایره‌ای که:
الف) ازقطب بگذرد ومرکز آن $(۳, ۰^\circ)$ باشد.
جواب: $r = ۶\cos\theta$.
ب) ازقطب بگذرد و مرکز آن $(۴, ۴۵^\circ)$ باشد.
جواب: $r = ۸\cos(\theta - ۴۵^\circ)$.
ج) ازقطب بگذرد و مرکز آن $(۵, ۹۰^\circ)$ باشد.
جواب: $r - ۱۰\sin\theta = ۰$.
د) ازقطب و از دو نقطهٔ $(۳, ۹۰^\circ)$ و $(۴, ۰^\circ)$ بگذرد.
جواب: $r = ۴\cos\theta + ۳\sin\theta$.

۱۳. معادلهٔ دایره‌ای را پیدا کنید که مرکز آن نقطهٔ $(۸, ۱۲۰^\circ)$ باشد وازنقطهٔ $(۴, ۶۰^\circ)$ بگذرد. جواب: $r^۲ - ۱۶r\cos(\theta - ۱۲۰^\circ) + ۱۶ = ۰$.

۱۴. مرکز وشعاع دایرهٔ $r^۲ - ۴r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{۴}\right) - ۱۲ = ۰$ را با مقایسه با معادلهٔ مسئلهٔ حل‌شدهٔ ۳ به‌دست آورید. جواب: مرکز $\left(۲, \frac{\pi}{۴}\right)$، شعاع ۴.

۱۵. دایره‌ای به‌معادلهٔ $r^۲ - ۴\sqrt{۳}r\cos\theta - ۴r\sin\theta + ۱۵ = ۰$ مفروض است. مختصات مرکز وشعاع دایره را بیابید. جواب: مرکز $\left(۴, \frac{\pi}{۶}\right)$، شعاع ۱.

۱۶. مطلوب است تعیین معادلهٔ دایره‌ای که مرکز آن نقطهٔ $\left(۸, \frac{\pi}{۴}\right)$ و برمحورقطبی مماس باشد. جواب: $r^۲ - ۱۶r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{۴}\right) + ۳۲ = ۰$.

۱۷. مطلوب است تعیین معادلهٔ دایره‌ای به‌مرکز نقطهٔ $(۴, ۳۰^\circ)$، که برمحور OX مماس

باشد. جواب: $r^{2}-8r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+12=0$.

۱۸. نشان دهید معادلهٔ دایره‌ای کــه از قطب و نقطه‌های $(a, 0^\circ)$ و $(b, 90^\circ)$ می‌گذرد، عبارت است از، $r=a\cos\theta+b\sin\theta$.

۱۹. مطلوب است محاسبهٔ مرکز وشعاع دایرهٔ $r=5\cos\theta-5\sqrt{3}\sin\theta$.
جواب: $(5, -60^\circ)$؛ ۵.

۲۰. درمسئلهٔ حل‌شدهٔ ۱۱، ثابت شد معادلهٔ مقطع مخروطیی که کانونش قطب و خط هادی آن برمحور قطبی عمود و P واحد درطرف چپ قطب باشد، چنین است:

$$r=\frac{eP}{1-e\cos\theta}$$

هرگاه خط هادی P واحد درسمت راست قطب باشد، معادلهٔ آن چنین است:

$$r=\frac{eP}{1+e\cos\theta}$$

نشان دهید معادلهٔ قطبی مقطع مخروطیی که‌کانون آن قطب وخط هادی‌آن به‌موازات محور قطبی و به‌فاصلهٔ p واحدازآن باشد، عبارت است از، $r=\frac{ep}{1\pm e\sin\theta}$.
دراین دستورهرگاه خط هادی بالای محورقطبی باشد علامت مثبت‌است و وقتی‌خط هادی پایین محور قطبی باشد ازعلامت منفی استفاده می‌شود.

۲۱. نوع هریك ازمقاطع مخروطی زیرراکه قطب یکی ازکانونهای آن است تعیین‌کنید. مقدار e را به‌دست‌آورید وموضع خــط هادی را باتوجه به‌جهت‌آن نسبت به‌محور قطبی وفاصله‌اش ازقطب، مشخص‌کنید.

الف) $r=\frac{4}{2-3\cos\theta}$.

جواب: هذلولی است؛ $e=\frac{3}{2}$؛ یك‌خط هادی برمحورقطبی‌عمود وبه‌فاصلهٔ $\frac{4}{3}$ واحد از کانون متناظراست.

ب) $r=\frac{2}{1-\cos\theta}$.

جواب: سهمی است؛ $e=1$؛ خط هادی برمحور قطبی عمــود و ۲ واحد درطـرف چپ‌کانون است.

ج) $r=\dfrac{۶}{۲-\sin\theta}$.

جواب: بیضی است؛ $e=\frac{۱}{۲}$؛ یك خط هادی با محور قطبی موازی و ۶ واحد پایین قطب است.

۲۲. نوع هریك ازمقاطع مخروطی زیررا مشخص ونمودار مکان هندسی آن را رسم کنید.

الف) $r=\dfrac{۴}{۲+\cos\theta}$؛ ب) $r=\dfrac{۵}{۱-\cos\theta}$؛ ج) $r=\dfrac{۲}{۲+۳\sin\theta}$.

۲۳. معادلهٔ قطبی بیضی $۹x^۲+۱۶y^۲=۱۴۴$ را بهدست آورید.

جواب: $r^۲(۹\cos^۲\theta+۱۶\sin^۲\theta)=۱۴۴$.

۲۴. معادلهٔ $۲x^۲-۳y^۲-x+y=۰$ را بهمختصات قطبی تغییردهید.

جواب: $r=\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{۲\cos^۲\theta-۳\sin^۲\theta}$.

هریك ازمعادلات مسئلهٔ ۲۵ تا ۳۰ را بهمختصات قطبی تغییر دهید.

۲۵. $(x^۲+y^۲)^۲=۲a^۲xy$. جواب: $r^۲=a^۲\sin ۲\theta$.

۲۶. $y^۲=\dfrac{x^۳}{۲a-x}$. جواب: $r=۲a\sin\theta\tan\theta$.

۲۷. $(x^۲+y^۲)^۳=۴x^۲y^۲$. جواب: $r^۲=\sin^۲ ۲\theta$.

۲۸. $x-۳y=۰$. جواب: $\theta=\arctan\frac{۱}{۳}$.

۲۹. $x^۴+x^۲y^۲-(x+y)^۲=۰$. جواب: $r=\pm(۱+\tan\theta)$.

۳۰. $(x^۲+y^۲)^۳=۱۶x^۲y^۲(x^۲-y^۲)^۲$. جواب: $r=\pm\csc ۴\theta$.

۳۱. با تبدیل معادلهٔ خط راستی که از دونقطهٔ معلوم میگذرد بهمختصات قطبی، ثابت کنید معادلهٔ قطبی‌خط گذرنده از دونقطهٔ $(r_۱,\theta_۱)$ و $(r_۲,\theta_۲)$ عبارت است از:

$$rr_۱\sin(\theta-\theta_۱)+r_۱r_۲\sin(\theta_۱-\theta_۲)+r_۲r\sin(\theta_۲-\theta)=۰$$

۳۲. معادلهٔ $\dfrac{(x-۴)^۲}{۲۵}+\dfrac{y^۲}{۹}=۱$ را بهمختصات قطبی تبدیل کنید وبا حذف رادیکالها آن را ساده کنید.

جواب: $r=\dfrac{-۹}{۵+۴\cos\theta}$، یا $r=\dfrac{۹}{۵-۴\cos\theta}$. چرا معادلات فوق معادلند؟

درمسائل ۳۳ تا ۳۹، معادلات را به‌مختصات قائم تغییر دهید.

۳۳. $r=۳\cos\theta$. جواب: $x^۲+y^۲-۳x=۰$.

۳۴. $r=۱-\cos\theta$. جواب: $(x^۲+y^۲+x)^۲=x^۲+y^۲$.

۳۵. $r=۲\cos\theta+۳\sin\theta$. جواب: $x^۲+y^۲-۲x-۳y=۰$.

۳۶. $\theta=۴۵^\circ$. جواب: $x-y=۰$.

۳۷. $r=\dfrac{۳}{۲+۳\sin\theta}$. جواب: $۴x^۲-۵y^۲+۱۸y-۹=۰$.

۳۸. $r=a\theta$. جواب: $\sqrt{x^۲+y^۲}=a\tan^{-۱}\dfrac{y}{x}$.

۳۹. $r^۲=۹\cos ۲\theta$. جواب: $(x^۲+y^۲)^۲=۹(x^۲-y^۲)$.

۴۰. نقطه‌های برخورد جفت منحنی زیر را بیابید:

$$r(۱-\cos\theta)=۳ \text{ و } r-۴(۱+\cos\theta)=۰$$

جواب: $(۶,\ ۶۰^\circ)$، $(۲,\ ۱۲۰^\circ)$، $(۲,\ ۲۴۰^\circ)$، $(۶,\ ۳۰۰^\circ)$.

۴۱. نقطه‌های تلاقی منحنیهای $r=\sqrt{۲}\cos\theta$ و $r=\sin ۲\theta$ را به‌دست آورید.

جواب: $(۱,\ ۴۵^\circ)$، $(۰,\ ۹۰^\circ)$، $(-۱,\ ۱۳۵^\circ)$.

۴۲. نقطه‌های تقاطع منحنیهای $r=۱+\cos\theta$ و $r=\dfrac{۱}{۲(۱-\cos\theta)}$ را پیدا کنید.

جواب: $\left(۱+\dfrac{\sqrt{۲}}{۲},\ \pm ۴۵^\circ\right)$، $\left(۱-\dfrac{\sqrt{۲}}{۲},\pm ۱۳۵^\circ\right)$.

۴۳. نقطه‌های برخورد دومنحنی $r=\sqrt{۶}\cos\theta$ و $r^۲=۹\cos ۲\theta$ را تعیین کنید.

جواب: $\left(\dfrac{۳\sqrt{۲}}{۲},\ ۳۰^\circ\right)$، $\left(-\dfrac{۳\sqrt{۲}}{۲},\ ۱۵۰^\circ\right)$، $\left(-\dfrac{۳\sqrt{۲}}{۲},۲۱۰^\circ\right)$،

$\left(\dfrac{۳\sqrt{۲}}{۲},۳۳۰^\circ\right)$.

۴۴. منحنی $r=۴\sin ۲\theta$ را مورد بحث وبررسی قراردهید و نمودارآن را رسم کنید.

۴۵. منحنی $r=\dfrac{9}{4-5\cos\theta}$ را مورد بحث و بررسی قرار دهید و نمودار آن‌را رسم کنید.

۴۶. منحنی $r=2(1+\sin\theta)$ را رسم کنید.

۴۷. منحنی $r^2=4\sin 2\theta$ را رسم کنید.

۴۸. منحنی $r=1+2\sin\theta$ را رسم کنید.

۴۹. مارپیچ $r\theta=4$ را رسم کنید.

۵۰. هرگاه قطب، مرکز بیضی باشد، معادلهٔ قطبی بیضی را به‌دست آورید.

راهنمایی. از قانون کسینوسها و این اصل که مجموع شعاعهای کانونی بیضی برابر $2a$ است استفاده کنید.

جواب: $r^2(1-e^2\cos^2\theta)=b^2$.

۵۱. دوسر پاره‌خطی به‌طول ۲۰ واحد بر دو خط ثابت و عمود بر هم قرار دارد. مکان هندسی پای قائم از نقطهٔ تلاقی دو خط ثابت بر خط به‌طول ثابت را به‌دست‌آورید. یکی از خطهای ثابت را محور قطبی بگیرید.

جواب: $r=10\sin 2\theta$.

۵۲. مطلوب است تعیین مکان هندسی رأس مثلثی که قاعدهٔ آن خط ثابتی به‌طول $2b$ و حاصل‌ضرب دوضلع دیگر مثلث برابر b^2 است. محور قطبی را روی قاعدهٔ مثلث و قطب را وسط قاعده بگیرید.

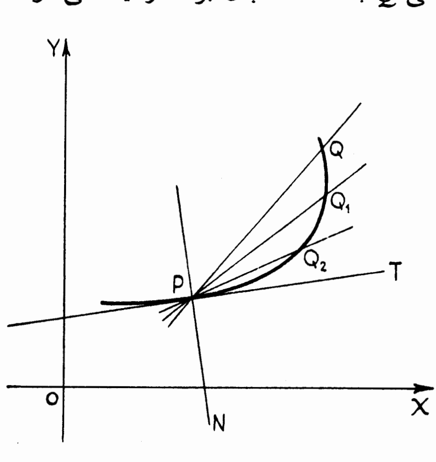
جواب: $r^2=2b^2\cos 2\theta$، که معادلهٔ پروانه یا لمنیسکات است.

۱۰

خطهای مماس و قائم

خطهای مماس و قائم. مماس برمنحنی درهـر نقطهٔ واقع برمنحنی، به صورت زیر تعریف می‌شود.

هرگاه P و Q مطابق شکل دو نقطهٔ دلخواه برمنحنی باشند، خط قاطع PQ را رسم، وفرض می‌کنیم نقطهٔ Q روی منحنی به‌طرف P حرکت کند. خط قاطع PQ نیز حول نقطهٔ P دوران می‌کند. وقتی Q به‌سمت انطباق بر P نزدیك می‌شود، خط‌قاطع PQ نیز به‌سمت



انطباق برخط حدی PT نزدیك می‌شود. خط‌حدی PT، خـط مماس برمنحنی درنقطهٔ P نامیده می‌شود.

قائم برمنحنی، PN. خطی است که برخط مماس برمنحنی درنقطهٔ تماس P عمـود است.

اگر معادلهٔ یـك منحنی داده شده باشد. برای تعیین معادلـهٔ مماس برمنحنی درنقطهٔ $P_1(x_1, y_1)$ واقع برمنحنی. ابتدا باید ضریب زاویهٔ خط مماس را به‌دست آورد.

مثال. ضریب زاویهٔ مماس بردایرهٔ $x^2+y^2=r^2$ را در نقطهٔ $P_1(x_1, y_1)$ واقع برآن به‌دست آورید.

نقطهٔ دیگری مثل $Q(x_1+h, y_1+k)$ را روی منحنی اختیار وخط قاطع P_1Q را رسم می‌کنیم. ضریب زاویهٔ‌خط قاطع برابراست با $\frac{k}{h}$. وقتی خط قاطع حـول نقطهٔ P_1 دوران کند نقطهٔ Q به‌سمت P_1 نزدیك می‌شود و k و h هریك به‌سمت صفر میل می‌کنند. حد نسبت $\frac{k}{h}$ وقتی h و k به‌سمت صفرمیل کنند، ضریب زاویهٔ مماس m را به‌دست‌می‌دهد.

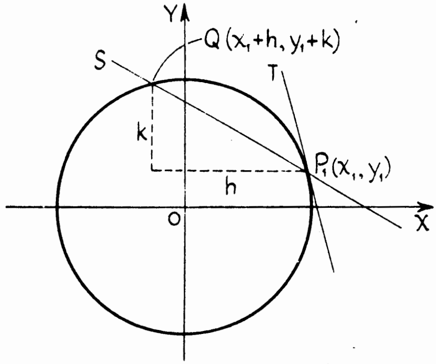
هریك از نقطه‌های (x_1, y_1) و (x_1+h, y_1+k) روی دایرهٔ فوق قرار دارند، بنابراین مختصات این نقطه‌ها باید درمعادلهٔ دایره صدق کنند.

با قراردادن درمعادله، داریم:

$$x_1^2+y_1^2=r^2 \qquad (1)$$

و (2) $\quad (x_1+h)^2+(y_1+k)^2=r^2$، یا $x_1^2+2hx_1+h^2+y_1^2+2ky_1+k^2=r^2$

با تفریق رابطهٔ (1) از (2)، نتیجه می‌گیریم:



$$2hx_1+h^2+2ky_1+k^2=0$$

یا
$$k(2y_1+k)=-h(2x_1+h)$$

پس
$$\frac{k}{h}=-\frac{2x_1+h}{2y_1+k}$$

وقتی h و k هریك به‌طرف صفر میل کنند، حد این عبارت $-\frac{2x_1}{2y_1}$ می‌شود، یا $m=-\frac{x_1}{y_1}$.

چون خط مماس از نقطهٔ $P_1(x_1, y_1)$ می گذرد، معادلهٔ آن عبارت است از:

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

پس ازطرفین وسطین کردن کسرها،

$y_1y-y_1^2=-x_1x+x_1^2$، یا $x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2=r^2$.

معادلهٔ قائم بردایره عبارت است از:

$$y-y_1=\frac{y_1}{x_1}(x-x_1)$$

یا
$$x_1y-y_1x=x_1y_1-x_1y_1=0$$

مسئله‌های حل شده

۱. معادله‌های مماس وقائم بر بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ رادرنقطهٔ $P_1(x_1, y_1)$ به‌دست آورید.

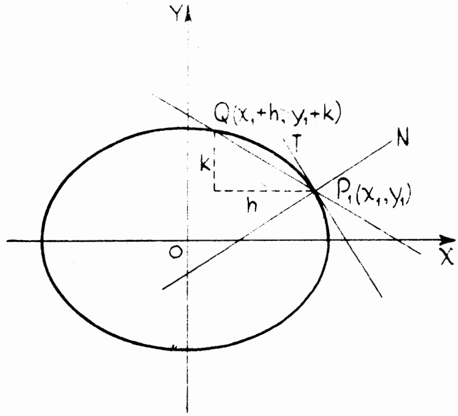
فرض می کنیم مختصات نقطهٔ Q، (x_1+h, y_1+k) باشد. اگرمختصات P_1 و Q را درمعادلهٔ بیضی قراردهیم، داریم:

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

و
$$\frac{(x_1+h)^2}{a^2}+\frac{(y_1+k)^2}{b^2}=1 \tag{2}$$

رابطهٔ (۲) را بسط می‌دهیم. با تفریق رابطهٔ (۱) ازرابطهٔ (۲)،

$$2b^2hx_1+b^2h^2+2a^2ky_1+k^2a^2=0$$



با حل آن، $\frac{k}{h}=-\frac{b^2(2x_1+h)}{a^2(2y_1+k)}$ و

$$\text{حد}\ \frac{k}{h}=-\text{حد}\ \frac{2b^2x_1+b^2h}{2a^2y_1+a^2k}=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

با استفاده از دستور $y-y_1=m(x-x_1)$ داریم:

$$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

یا

$$a^2y_1y-a^2y_1^2=-b^2x_1x+b^2x_1^2$$

چون $b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2$، نتیجه می‌شود، $b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2$، یا

$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$، که معادلهٔ خط مماس است.

ضریب زاویهٔ خط قائم $\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$ است ومعادلهٔ آن عبارت است از:

$$a^2y_1x-b^2x_1y=(a^2-b^2)x_1y_1.$$

۲. معادله‌های مماس و قائم برسهمی $y^2=4ax$ را در نقطهٔ $P_1(x_1,\ y_1)$ به‌دست آورید.

اگر مختصات نقطه‌های $P_1(x_1,\ y_1)$ و $Q(x_1+h,\ y_1+k)$ را درمعادلهٔ سهمی قراردهیم، داریم، $y_1^2=4ax_1$ و $(y_1+k)^2=4a(x_1+h)$.

پس از بسط وحل آنها نسبت به $\frac{k}{h}$، نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{k}{h}=\frac{4a}{2y_1+k} \quad \text{و} \quad \lim\frac{k}{h}=\lim\frac{4a}{2y_1+k}=\frac{2a}{y_1}$$

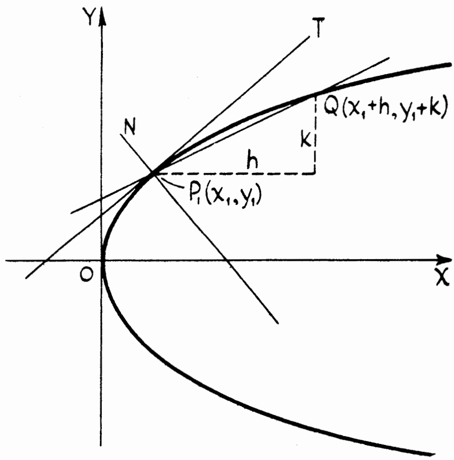
آنگاه معادلهٔ خط مماس عبارت است از:

$$y-y_1=\frac{2a}{y_1}(x-x_1) \text{، یا } y_1y-y_1^2=2ax-2ax_1$$

چون $y_1^2=4ax_1$ ، معادلهٔ مماس را می‌توان به صورت $y_1y=2a(x+x_1)$ نوشت.

ضریب زاویهٔ خط قائم برابر $-\frac{y_1}{2a}$ است ومعادلهٔ قائم عبارت است از:

$$y_1x+2ay=x_1y_1+2ay_1$$



۳. معادلهٔ مماس برمنحنی $xy=a^2$ را درنقطهٔ $P_1(x_1, y_1)$ واقع برمنحنی به‌دست‌آورید.
مختصات نقطه‌های $P_1(x_1, y_1)$ و $Q(x_1+h, y_1+k)$ را درمعادله قرارمی‌دهیم وآن را نسبت به $\frac{k}{h}$ حل می‌کنیم. داریم:

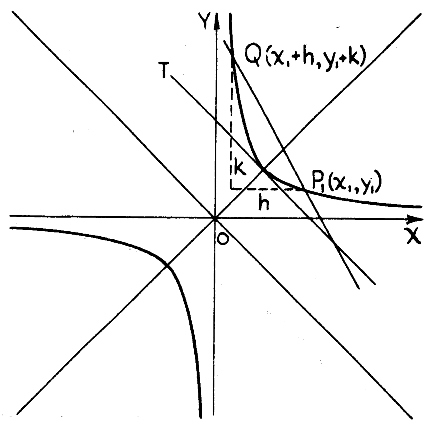
$$\frac{k}{h}=-\frac{y_1+k}{x_1} \quad \text{و} \quad \lim\frac{k}{h}=-\lim\frac{y_1+k}{x_1}=-\frac{y_1}{x_1}$$

بنابراین معادلهٔ خط مماس عبارت است از:

$$y-y_1=-\frac{y_1}{x_1}(x-x_1) \text{ ، یا } x_1y-x_1y_1=-y_1x+x_1y_1 \text{،}$$

یا
$$y_1x+x_1y=2x_1y_1=2a^2$$

این معادله را می‌توان به صورت $\frac{1}{2}(y_1x+x_1y)=a^2$ نوشت. بنابراین نتیجه می‌گیریم که برای نوشتن معادلهٔ مماس برمکان هندسی هرمعادلهٔ درجهٔ دوم درنقطهٔ تماس $P_1(x_1, y_1)$، کافی است که x^2 را به x_1x، y^2 را به y_1y، xy را به $\frac{1}{2}(y_1x+x_1y)$، x را به $\frac{1}{2}(x+x_1)$ و y را به $\frac{1}{2}(y+y_1)$ تبدیل کنیم.

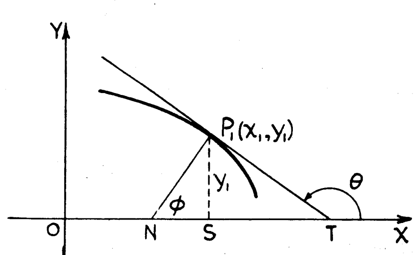


۴. هرگاه P_1T طول مماس و P_1N طول قائم برمنحنی در نقطهٔ P_1 باشد، تصویرهای ST و SN به‌ترتیب تحت مماس و تحت قائم در P_1 نامیده می‌شوند.

اگر m ضریب زاویهٔ مماس درنقطهٔ $P_1(x_1, y_1)$ باشد، آنگاه:

$$\text{طول تحت مماس} = -\frac{y_1}{m}$$

و
$$\text{طول تحت قائم} = y_1m$$



برای اثبات درستی عبارتهای فوق چنین عمل می‌کنیم $\frac{ST}{y_1}=-\cot\theta=-\frac{1}{m}$ و $ST=-\frac{y_1}{m}$، همچنین $\frac{SN}{y_1}=-\cot\varnothing=-\cot(\theta-90^\circ)=\tan\theta=m$ و $SN=my_1$.

تحت مماس و تحت قائم، در جهت مخالف هم اندازه‌گیری می‌شوند، از این‌رو علامتهای مختلف دارند. به‌منظور تعیین طولهای مماس و قائم، قضیهٔ مربوط به‌مثلث قائم‌الزاویه را به‌کار گیرید.

۵. ضریب‌زاویه‌های مماس‌وقائم بردایرهٔ $x^2+y^2=5$ را درنقطهٔ $(1, 2)$ به‌دست آورید.

از رابطهٔ $m=-\frac{x_1}{y_1}$ استفاده می‌کنیم. ضریب زاویهٔ مماس $-\frac{1}{2}$ و ضریب زاویهٔ قائم $\frac{2}{1}$ است.

۶. ضریب زاویهٔ مماس وقائم بر بیضی $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ را در نقطهٔ $\left(2, \frac{4\sqrt{5}}{3}\right)$ به‌دست آورید.

از رابطهٔ $m=-\frac{a^2x_1}{b^2y_1}$ برای تعیین‌ضریب زاویهٔ‌مماس استفاده می‌کنیم‌ومختصات نقطهٔ داده شده را درآن قرار می‌دهیم، $m=-\frac{16(2)}{9\left(\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)}=-\frac{8\sqrt{5}}{15}$. ضریب زاویهٔ قائم نیز $\frac{3\sqrt{5}}{8}$ است.

۷. نشان دهید ضریب‌زاویهٔ مماس برمنحنی $4x^2+4xy+y^2-9=0$ درهر نقطهٔ‌واقع برمنحنی $m=-2$ است.

دونقطهٔ $P_1(x_1, y_1)$ و $Q(x_1+h, y_1+k)$ را به‌کار می‌گیریم وحد $\frac{k}{h}$ راتعیین می‌کنیم.

اگرمختصات دونقطهٔ P_1 و Q را درمعادلهٔ منحنی قراردهیم:

$$4(x_1+h)^2+4(x_1+h)(y_1+k)+(y_1+k)^2-9=0 \quad (1)$$

و (۲)
$$۴x_۱^۲+۴x_۱y_۱+y_۱^۲-۹=۰$$

رابطهٔ (۱) را بسط می‌دهیم و رابطهٔ (۲) را از بسط یافتهٔ رابطهٔ (۱) کم می‌کنیم. داریم:

$$\text{حد}\ \frac{k}{h}=-\frac{۸x_۱+۴y_۱}{۴x_۱+۲y_۱}=-۲$$

روش دیگر. معادلهٔ اصلی را می‌توان به صورت $(۲x+y)^۲-۹=۰$ نوشت. با تجزیهٔ آن به عوامل، $(۲x+y+۳)(۲x+y-۳)=۰$ به دست می‌آید، که معادلهٔ دوخط موازی باضریب زاویهٔ ۲− است.

۸. ضریب‌زاویهٔ مماس برهذلولی $۹x^۲-۴y^۲=۳۶$ را درنقطهٔ $\left(۳,\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}\right)$ به دست آورید.

از دونقطهٔ $P_۱(x_۱, y_۱)$ و $Q(x_۱+h, y_۱+k)$ استفاده و حد $\frac{k}{h}$ را تعیین‌می‌کنیم.

اگرمختصات $P_۱$ و Q را درمعادلهٔ منحنی قراردهیم:

(۱)
$$۹(x_۱+h)^۲-۴(y_۱+k)^۲=۳۶$$

و (۲)
$$۹x_۱^۲-۴y_۱^۲=۳۶$$

پس از بسط وحل دستگاه نسبت به $\frac{k}{h}$، داریم:

$$\frac{۴k}{۹h}=\frac{۲x_۱+h}{۲y_۱+k}\quad \text{و}\quad \text{حد}\ \frac{k}{h}=\frac{۹x_۱}{۴y_۱}=m$$

ضریب زاویهٔ مماس در نقطهٔ $\left(۳,\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}\right)$، $m=\frac{۲۷}{۶\sqrt{۵}}=\frac{۹\sqrt{۵}}{۱۰}$ است.

۹. ضریب زاویه‌های مماس وقائم برمنحنی $y^۲=۲x^۳$ را درنقطهٔ $(۲, ۴)$ به‌دست آورید.

از دونقطهٔ $P_۱(x_۱, y_۱)$ و $Q(x_۱+h, y_۱+k)$ که برمنحنی‌واقعند استفاده‌می‌کنیم.

با قراردادن مختصات این‌نقطه‌ها درمعادلهٔ منحنی،

(۱)
$$(y_۱+k)^۲=۲(x_۱+h)^۳،$$

یا
$$y_۱^۲+۲ky_۱+k^۲=۲x_۱^۳+۶x_۱^۲h+۶x_۱h^۲+۲h^۳$$

و (۲)
$$y_۱^۲=۲x_۱^۳$$

اگررابطهٔ (۲) را از شکل بسط یافتهٔ رابطهٔ (۱) تفریق‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$۲ky_۱+k^۲=۶x_۱^۲h+۶x_۱h^۲+۲h^۳$$

پس
$$\frac{k}{h}=\frac{6x_1^2+6x_1h+2h^2}{2y_1+k} \quad \text{و} \quad \text{حد}\ \frac{k}{h}=\frac{6x_1^2}{2y_1}=\frac{3x_1^2}{y_1}$$

درنقطهٔ $(2, 4)$، $m=\text{حد}\ \frac{k}{h}=\frac{12}{4}=3$. ضریب زاویهٔ قائم $-\frac{1}{3}$ است.

۱۰. معادلات خطهای مماس وقائم برمنحنی $y^2=2x^3$ را درنقطهٔ $(2, 4)$ به‌دست‌آورید.

ضریب زاویهٔ مماس براین منحنی درنقطهٔ $(2, 4)$ را درمسئلهٔ ۹ به‌دست آوردیم که برابراست با ۳.

پس، معادلهٔ خط مماس عبارت است از: $y-4=3(x-2)$، یا $y=3x-2$.

معادلـهٔ خط قائم $y-4=-\frac{1}{3}(x-2)$، یا $x+3y=14$ است.

۱۱. معادله‌های مماس وقائـم برمنحنی $x^2+3xy-4y^2+2x-y+1=0$ را در نقطهٔ $(2, -1)$ بنویسید.

از قاعده‌ای‌که در مسئلهٔ ۳ به‌دست آمد، استفاده می‌کنیم. داریم:

$$x_1x+3\left(\frac{x_1y+y_1x}{2}\right)-4y_1y+2\left(\frac{x+x_1}{2}\right)-\left(\frac{y+y_1}{2}\right)+1=0$$

اگر $x_1=2$ و $y_1=-1$ رادرآن قراردهیم،خواهیم‌داشت، $3x+13y+7=0$،

که معادلهٔ خط مماس با ضریب زاویهٔ $-\frac{3}{13}$ است. معادلهٔ خط قائم عبارت است‌از:

$$y+1=\frac{13}{3}(x-2)\text{، یا } 13x-3y-29=0$$

۱۲. معادلات خطهایی بـا ضریب زاویهٔ m را کـه بربیضی

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \qquad (1)$$

مماسند به‌دست آورید.

معادلات به صورت معادلهٔ (۲) هستند:

$$y=mx+k \qquad (2)$$

پس ازحل دستگاه معادلات (۱) و (۲)، حاصل می‌شود:

$$b^2x^2+a^2(mx+k)^2=a^2b^2$$

با بسط ودسته‌بندی جملات:

$$(b^2+a^2m^2)x^2+2a^2mkx+a^2k^2-a^2b^2=0 \qquad (3)$$

وقتی خطهـا برمنحنی مماس باشند معادلهٔ (۳) بایـد ریشه‌های مضاعف داشته باشد یعنی‌اینکه مبین معادله باید صفرباشد. پس:

$$4a^4m^2k^2-4(b^2+a^2m^2)(a^2k^2-a^2b^2)=0$$ یا $$k^2=a^2m^2+b^2$$

و

$$k=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

معادلات خطهایی که با ضریب زاویهٔ m بر بیضی مماسند عبارتند از:

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

۱۳. معادلات خطهای مماس بر بیضی $x^2+4y^2=100$ را که با خط $3x+8y=7$ موازیند بنویسید.

ضریب زاویهٔ خط داده شده برابر $-\frac{3}{8}$ است. بنابراین معادلات خطهای مماس مطلوب به صورت $y=-\frac{3}{8}x+k$ هستند که در آن k عدد مجهولی است که می‌خواهیم آن را تعیین کنیم.

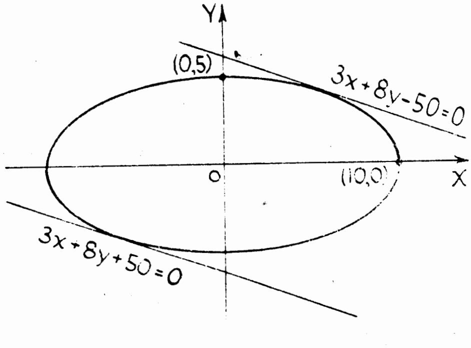
اگر این معادله و معادلهٔ بیضی را باهم حل کنیم و شرط داشتن ریشه‌های مضاعف را در آن اعمال کنیم، قادریم مقدار k را تعیین کنیم. بدین ترتیب:

$$x^2+4\left(-\frac{3}{8}x+k\right)^2-100=0$$

یا

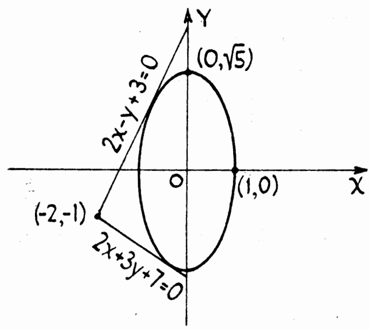
$$25x^2-48kx+(64k^2-1600)=0$$

برای اینکه معادله ریشهٔ مضاعف داشته باشد، باید ممیز معادله صفر باشد، یا $(-48k)^2-4(25)(64k^2-1600)=0$. با حل آن، $16k^2=625$، $k=\pm\frac{25}{4}$. پس معادله‌های مطلوب عبارتند از:



$$\mathsf{3}x+\mathsf{8}y\pm\mathsf{50}=\mathsf{0} \text{ یا } \quad y=-\frac{\mathsf{3}}{\mathsf{8}}x\pm\frac{\mathsf{25}}{\mathsf{4}}$$

۱۴. معادلات خطهای گذرنده از نقطهٔ $(-۲, -۱)$ را که بر بیضی $۵x^۲+y^۲=۵$ مماسند پیدا کنید.



فرض می‌کنیم $p_۱(x_۱, y_۱)$ یک نقطهٔ تماس باشد. معادلهٔ مماس به‌صورت کلی $۵x_۱x+y_۱y=۵$ است و نقطهٔ $(-۲, -۱)$ بر این مماس واقع است؛ پس، $-۱۰x_۱-y_۱=۵$. همچنین نقطهٔ $p_۱(x_۱, y_۱)$ روی بیضی قرار دارد؛ درنتیجه، $۵x_۱^۲+y_۱^۲=۵$. اگر این معادلات را به‌منظور تعیین نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ با هم حل کنیم، دو نقطهٔ تماس $\left(-\frac{۲}{۳}, \frac{۵}{۳}\right)$ و $\left(-\frac{۲}{۷}, -\frac{۱۵}{۷}\right)$ به‌دست می‌آید. اگر این مقادیر را در رابطهٔ $۵x_۱x+y_۱y=۵$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود، $۲x-y+۳=۰$ و $۲x+۳y+۷=۰$.

۱۵. طولهای تحت مماس، تحت قائم، مماس وقائم را به‌ازای نقطهٔ $(-۱ , ۳)$ واقع بر بیضی $۹x^۲+y^۲=۱۸$ به‌دست آورید.

به‌منظور تعیین معادلهٔ خط‌مماس ازصورت کلی $۹x_۱x+y_۱y=۱۸$ استفاده‌می کنیم. اگرمختصات نقطه رادرآن‌قراردهیم، $-۹x+۳y=۱۸$ ، یا $۳x-y+۶=۰$.

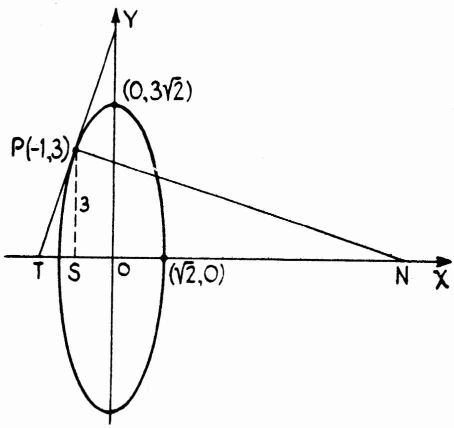
پس $m=۳$.

تحت مماس، $ST=-\frac{y_۱}{m}=-\frac{۳}{۳}=-۱$.

تحت قائم، $SN=my_۱=۳(۳)=۹$.

طول مماس، $PT=\sqrt{۳^۲+۱^۲}=\sqrt{۱۰}$.

طول قائم، $PN=\sqrt{۹^۲+۳^۲}=۳\sqrt{۱۰}$.



تعریف. مکان هندسی نقطه‌های وسط یك دستگاه وترهای موازی هر مقطع مخروطی، قطر مخروطی نام دارد.

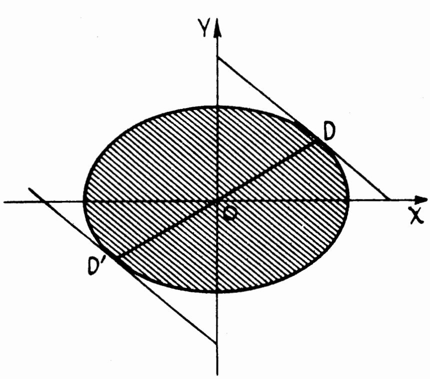
اگر m ضریب زاویهٔ وترهای موازی باشد، معادلهٔ قطری که شامل نقطه‌های وسط این وترهاست، چنین است:

برای بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ، $y=-\frac{b^2x}{a^2m}$.

برای سهمی $y^2=4ax$ ، $y=\frac{2a}{m}$.

برای هذلولی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ، $y=\frac{b^2x}{a^2m}$.

برای هذلولی متساوی‌القطرین $xy=a^2$ ، $y=-mx$.



درحالتی‌که معادلهٔ مخروطی به‌صورت کلی

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

باشد، معادلهٔ قطر به‌صورت $(ax+hy+g)+m(hx+by+f)=0$ است.

۱۶. معادلهٔ قطـری از بیضی $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ را که کلیهٔ وترهای با ضریب زاویهٔ $\frac{1}{3}$ را نصف می‌کند، به‌دست آورید.

با استفاده از دستور $y=-\frac{b^2x}{a^2m}$، معادلهٔ قطرعبارت است از، $y=-\frac{4x}{9\left(\frac{1}{3}\right)}$، یا

$4x+3y=0$.

۱۷. معادلهٔ قطر مقطع مخروطی $3x^2-xy-y^2-x-y=5$ راکه وترهای باضریب زاویهٔ ۴ را نصف می‌کند، به‌دست آورید.

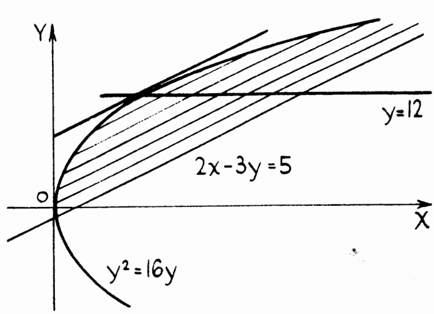
با استفاده‌ازرابطهٔ $(ax+hy+g)+m(hx+by+f)=0$،که درآن $a=3$، $h=-\frac{1}{2}$، $b=-1$، $g=-\frac{1}{2}$، $f=-\frac{1}{2}$ و $c=-5$ است، نتیجـه می‌گیریم:

$$3x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}+4\left(-\frac{1}{2}x-y-\frac{1}{2}\right)=0 \text{ ، یا } 2x-9y-5=0$$

۱۸. معادلهٔ قطر سهمی $y^2=16x$ که وترهای موازی با خـط $2x-3y=5$ را نصف می‌کند، به‌دست آورید.

ضریب زاویهٔ خط $2x-3y-5=0$ برابر است با $\frac{2}{3}$.

برای سهمی $y^2=4ax$، معادلهٔ قطر عبارت است از، $y=\frac{2a}{m}$. بنابراین معادلـهٔ



مطلوب $y=\frac{۸}{\frac{۲}{۳}}$، یا $y-۱۲=۰$ است.

۱۹. معادلهٔ قطر هذلولی $xy=۱۶$ را که وترهایی با ضریب زاویهٔ ۲ را نصف می‌کند، به‌دست آورید.

معادلهٔ قطر هذلولی $xy=a^۲$ که وترهایی با ضریب زاویهٔ m را نصف می‌کند به‌صورت $y=-mx$ است. بنابراین معادلهٔ مطلوب عبارت است از، $y=-۲x$.

مسئله‌های تکمیلی

۱. معادلات مماس وقائم برهریك از دایره‌های زیررا درنقطهٔ داده شده بنویسید:

الف) $x^۲+y^۲=۲۵$، $(۳, ۴)$.

جواب: $۳x+۴y=۲۵$؛ $۴x-۳y=۰$.

ب) $۲x^۲+۲y^۲-۳x+۵y-۲=۰$، $(۲, ۰)$.

جواب: $x+y-۲=۰$؛ $x-y-۲=۰$.

ج) $x^۲+y^۲-۶x+۸y-۲۵=۰$، $(-۲, ۱)$.

جواب: $x-y+۳=۰$؛ $x+y+۱=۰$.

۲. معادلات مماس وقائم بربیضی $۲x^۲+۳y^۲-۳۰=۰$ را درنقطهٔ $(-۳, ۲)$ به‌دست آورید. جواب: $x-y+۵=۰$؛ $x+y+۱=۰$.

۳. معادلات مماس و قائم بر بیضی $۳x^۲+۴y^۲-۶x+۸y-۴۵=۰$ را در نقطهٔ $(-۳, -۲)$ به‌دست آورید. جواب: $۳x+y+۱۱=۰$؛ $x-۳y-۳=۰$.

۴. معادلات مماس وقائم برسهمی $x^۲-۴y=۰$ را درنقطهٔ $(۲, ۱)$ به‌دست آورید.

جواب: $x-y-۱=۰$؛ $x+y-۳=۰$.

۵. معادله‌های مماس وقائم برهریك از هذلولیهای زیررا درنقطهٔ داده شده به‌دست‌آورید.

الف) $۶x^۲-۹y^۲-۸x+۳y+۱۶=۰$، $(-۱, ۲)$.

جواب: $۲۰x+۳۳y-۴۶=۰$؛ $۳۳x-۲۰y+۷۳=۰$.

ب) $x^۲-۲xy-y^۲-۲x+۴y+۴=۰$، $(۲, -۲)$.

جواب: $۳x+۲y-۲=۰$؛ $۲x-۳y-۱۰=۰$.

ج) $xy-۴=۰$، $(۲, ۲)$. جواب: $x+y-۴=۰$؛ $x-y=۰$.

۶. معادله‌های مماس برهذلولی $۵x^۲-۴y^۲=۴$ را در نقطه‌های تقاطع آن با خط

$5x-2y-4=0$ به‌دست آورید. جواب: $5x-2y-4=0$.

۷. معادله‌های مماس برهذلولی $x^2-4y^2-12=0$ را که ازنقطهٔ $(1,4)$ می‌گذرند به‌دست آورید. جواب: $x-y+3=0$؛ $19x+11y-63=0$.

۸. در چه نقطه‌هایی روی هذلولی $x^2-2y^2-8=0$، مماس بر هذلولی برخط $4x+5y-2=0$ عمود است.

جواب: $\left(\frac{10\sqrt{34}}{17},\ \frac{4\sqrt{34}}{17}\right)$؛ $\left(\frac{-10\sqrt{34}}{17},\ \frac{-4\sqrt{34}}{17}\right)$.

۹. مطلوب است تعیین ضریب زاویهٔ منحنی $y^2=x^3+2x^2$ درنقطهٔ $(x_1,\ y_1)$.

جواب: $\frac{k}{h}=\frac{3x_1^2+4x_1}{2y_1}$ حد.

۱۰. معادلات مماس وقائم برمنحنی مسئلهٔ قبل را درنقطهٔ $(2,\ -4)$ به‌دست آورید.

جواب: $5x+2y-2=0$؛ $2x-5y-24=0$.

۱۱. الف) طولهای تحت‌مماس وتحت قائم‌منحنی $y^2=x^3+2x^2$ را درنقطهٔ $(2,\ -4)$ واقع برآن بیابید. جواب: $-\frac{8}{5}$؛ 10.

ب) طولهای مماس وقائم را به‌دست آورید. جواب: $\frac{4\sqrt{29}}{5}$؛ $2\sqrt{29}$.

۱۲. معادله‌های مماسهای برهذلولی $2xy+y^2-8=0$ را که دارای ضریب زاویهٔ $m=-\frac{2}{3}$ هستند به‌دست آورید.

جواب: $2x+3y-8=0$؛ $2x+3y+8=0$.

۱۳. معادلات مماس وقائم، وطول تحت مماس وتحت قائم منحنی

$$y^2-6y-8x-31=0$$

را درنقطهٔ $(-3,\ -1)$ به‌دست آورید.

جواب: $x+y+4=0$؛ $x-y+2=0$؛ -1؛ 1.

۱۴. ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی $4x^2-12xy+9y^2-2x+3y-6=0$ را در نقطهٔ دلخواه $(x_1,\ y_1)$ از منحنی به‌دست آورید.

جواب: $m=\frac{2}{3}$. جواب را تعبیر کنید.

۱۵. معادله‌های خطهای مماس بر منحنی $۴x^۲-۲y^۲-۳xy+۲x-۳y-۱۰=۰$ را که با خط $x-y+۵=۰$ موازیند، به‌دست آورید.
جواب: $x-y-۱=۰$؛ $۴۱x-۴۱y+۳۹=۰$.

۱۶. مطلوب است تعیین معادلات خطهای مماس بر هذلولی $xy=۲$ که بر خط $x-۲y=۷$ عمودند. جواب: $۲x+y-۴=۰$؛ $۲x+y+۴=۰$.

۱۷. در چه نقطه‌هایی از بیضی $x^۲+xy+y^۲-۳=۰$ خطهای مماس بر بیضی با محور xها موازی است؟ با محور yها موازی است؟
جواب: $(۱,-۲)$، $(-۱,۲)$؛ $(۲,-۱)$، $(-۲,۱)$.

۱۸. در چه نقطه‌هایی از منحنی $x^۲-۲xy+y+۱=۰$ خطهای مماس بر منحنی با خط $۲x+y=۵$ موازی است؟ جواب: $(۱,۲)$ و $(-۱,۰)$.

۱۹. معادلات خطهایی را به‌دست آورید که از نقطهٔ $(۵,۶)$ بگذرند و بر سهمی $y^۲=۴x$ مماس باشند. جواب: $x-y+۱=۰$؛ $x-۵y+۲۵=۰$.

۲۰. نشان دهید خطهای مماس بر سهمی $y^۲=۴ax$ در نقطه‌های دوسر وتر کانونی برهم عمودند، یعنی نشان دهید ضریب زاویهٔ دو خط مماس ±۱ است.

۲۱. معادله‌های مماس و قائم بر سهمی $x^۲=۵y$ را در نقطه‌ای از آن به‌طول ۳، به‌دست آورید. جواب: $۶x-۵y-۹=۰$؛ $۲۵x+۳۰y-۱۲۹=۰$.

۲۲. نشان دهید معادلات خطهای مماس بر سهمی $y^۲=۴ax$ با ضریب زاویهٔ m عبارتند از، $(m\neq۰)$، $y=mx+\dfrac{a}{m}$.

۲۳. نشان دهید معادله‌های خطهای مماس بر دایرهٔ $x^۲+y^۲=a^۲$ با ضریب زاویهٔ m عبارتند از، $y=mx\pm a\sqrt{m^۲+۱}$.

۲۴. نشان دهید معادله‌های خطهای مماس بر هذلولی $b^۲x^۲-a^۲y^۲=a^۲b^۲$ با ضریب زاویهٔ m به‌صورت $y=mx\pm\sqrt{a^۲m^۲-b^۲}$ و برای هذلولی

$$b^۲x^۲-a^۲y^۲=-a^۲b^۲$$

به‌صورت $y=mx\pm\sqrt{b^۲-a^۲m^۲}$ هستند.

۲۵. معادلات مماس بر بیضی $۵x^۲+۷y^۲=۳۵$ را که بر خط $۳x+۴y-۱۲=۰$ عمودند، به‌دست آورید. جواب: $۳y=۴x\pm\sqrt{۱۵۷}$.

۲۶. معادلات خطهای مماس برهذلولی $16x^2-9y^2=144$ را که با خط $4x-y-14=0$ موازی هستند، پیدا کنید. جواب: $y=4x\pm 8\sqrt{2}$.

۲۷. سهمی $y^2=4ax$ از نقطهٔ $(-8,4)$ می‌گذرد. معادلهٔ مماس براین سهمی راکه با $3x+2y-6=0$ موازی است به‌دست آورید. جواب: $9x+6y=2$.

۲۸. معادلهٔ مماس برمنحنی $x^3+y^3=3axy$ را در نقطهٔ $p_1(x_1,y_1)$ به‌دست آورید.
جواب: $(y_1^2-ax_1)y+(x_1^2-ay_1)x=ax_1y_1$.

۲۹. هرگاه‌خط $y=mx+b$ برسهمی $x^2=4ay$ مماس باشد، مقدار b رابه‌دست آورید.
جواب: $b=-am^2$.

۳۰. با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۲۹، معادلهٔ مماس برسهمی $x^2=-2y$ را که با خط $x-2y-4=0$ موازی است، تعیین کنید. جواب: $4x-8y+1=0$.

۳۱. معادلهٔ قطری از هذلولی $x^2-4y^2=9$ را به‌دست آورید که:

الف) وترهای با ضریب زاویهٔ ۴ را نصف کند.

جواب: $x-16y=0$.

ب) وترهای موازی با خط $3x-5y-2=0$ رانصف کند.

جواب: $5x-12y=0$.

ج) وترهای موازی با خط مماس در نقطهٔ $(5,2)$ را نصف کند.

جواب: $2x-5y=0$.

د) وترهای موازی با مجانبی که ضریب زاویهٔ مثبت دارد را نصف کند.

جواب: $x-2y=0$.

۳۲. معادلهٔ قطر مزدوج با قطر $x-16y=0$ را درمسئلهٔ ۳۱ (الف) به‌دست آورید.

جواب: $4x-y=0$.

۳۳. مطلوب است معادلهٔ قطری از بیضی $9x^2+25y^2=225$ که وترهایی با ضریب زاویهٔ ۳ را نصف کند.

جواب: $3x+25y=0$.

۳۴. معادلهٔ قطری از سهمی $y^2=8x$ را به‌دست‌آورید که وترهایی با ضریب زاویهٔ $\frac{2}{3}$ را نصف کند.

جواب: $y=6$.

۳۵. معادلهٔ قطری از بیضی $x^۲+۴y^۲=۴$، که مزدوج قطر $y=۳x$ است را به‌دست آورید.

جواب: $x+۱۲y=۰$.

۳۶. معادلهٔ قطری از مقطع مخروطی $xy+۲y^۲-۴x-۲y+۶=۰$، که وترهایی با ضریب زاویهٔ $\frac{۲}{۳}$ را نصف می‌کند را به دست آورید.

جواب: $۲x+۱۱y=۱۶$.

۳۷. قطری از مقطع مخروطی $x^۲-۳xy-۲y^۲-x-۲y-۱=۰$، که وترهایی با ضریب زاویهٔ ۳ را نصف می‌کند را مشخص کنید.

جواب: $۷x+۱۵y+۷=۰$.

۳۸. معادلهٔ قطری از بیضی $۴x^۲+۵y^۲=۲۰$ را به‌دست آورید که:

الف) وترهایی با ضریب زاویهٔ $-\frac{۲}{۳}$ را نصف کند.

جواب: $۶x-۵y=۰$.

ب) وترهای موازی با خط $۳x-۵y=۶$ را نصف کند.

جواب: $۴x+۳y=۰$.

۳۹. معادلهٔ قطری از هذلولی $xy=۱۶$ را به‌دست آورید که وترهای موازی با خط $x+y=۱$ را نصف کند.

جواب: $y=x$.

۱۱

منحنیهای مسطحهٔ عالی

منحنیهای مسطحهٔ عالی. اگر بتوان یك منحنی را بهوسیلهٔ یك چندجملهای برحسب متغیرهای x و y که مساوی صفر قرار داده میشود، نمایش داد آنرا منحنی جبری میگویند. منحنیهای دیگری هستند که نمیتوان معادلات آنها را بهاینصورت نشان داد، بهعنوانمثال $y=\sin x$، $y=e^x$، $y=\log x$ که منحنی متعالی یا غیرجبری نامیده میشوند.

منحنیهایجبری بالاتر از درجهٔدوم و منحنیهای غیرجبری را منحنیهای مسطحهٔعالی مینامند.

در زمینهٔ بحث و بررسی نقطههای تقاطع منحنی با محورهای مختصات، تقارن و دامنهٔ تغییرات یك منحنی، بهفصل ۲ مراجعه کنید.

مسئلههای حل شده

۱. نمودار منحنی $y^۲=(x-۱)(x-۳)(x-۴)$ را رسم کنید.

اگر y به $-y$ تبدیل شود معادلهٔ منحنی بدون تغییر باقی میماند، پس این منحنی نسبت بهمحور xها متقارن است.

طول نقطههای تقاطع منحنی بامحور xها ۱، ۳و۴ است. بهازای $x=۰$، $y^۲=-۱۲$،

پس منحنی محور yها را قطع نمی‌کند.

به‌ازای $x<۱$ هر یك از عوامل ضرب عبارت سمت راست، منفی و y موهومی می‌شود.

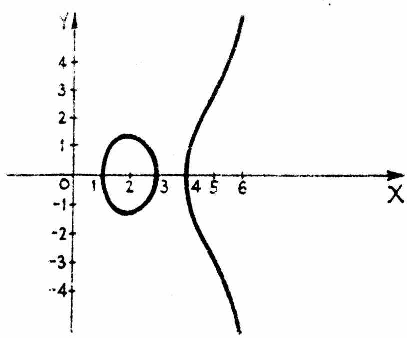
به‌ازای $۱\leqq x\leqq ۳$، y عددی حقیقی است. به‌ازای $۳<x<۴$، $y^۲$ منفی‌می‌شود و در نتیجه y عددی موهومی است.

به‌ازای $x\geqq ۴$، $y^۲$ مثبت و y حقیقی است و وقتی x بدون حد افزایش یابد، مقدار y نیز بدون داشتن حد معین افزایش می یابد.

حال جدول مقادیری برای تعیین نقطه‌های روی منحنی تشکیل می‌دهیم.

$$y=\pm\sqrt{(x-۱)(x-۳)(x-۴)}.$$

x	۱	۱٫۵	۲	۲٫۵	۳	۴	۴٫۵	۵	۵٫۵	۶
y	۰	$\pm$۱٫۳۷	$\pm$۱٫۴۱	$\pm$۱٫۰۶	۰	۰	$\pm$۱٫۶۲	$\pm$۲٫۸۳	$\pm$۴٫۱۱	$\pm$۵٫۴۸



۲. نمودار منحنی $x^۲y-۲x^۲-۱۶y=۰$ را رسم کنید.

نقطه‌های تقاطع با محورهای مختصات. اگر $y=۰$، $x=۰$؛ و اگر $x=۰$، $y=۰$ است.

تقارن. اگر $-x$ جانشین x شود معادله ثابت باقی‌می‌ماند، پس منحنی نسبت به محور yها متقارن است. منحنی نسبت به محور xها یا مبدأ مختصات متقارن نیست.

با حل معادلهٔ منحنی نسبت به y و x، به‌دست می‌آید:

$$y=\frac{۲x^۲}{x^۲-۱۶}=\frac{۲x^۲}{(x-۴)(x+۴)} \qquad (۱)$$

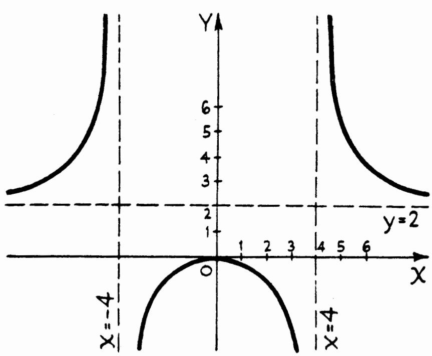
و $$x=\pm 4\sqrt{\frac{y}{y-2}} \qquad (2)$$

از رابطهٔ (۱) ملاحظه می‌شود که وقتی x چه از سمت مقادیر بزرگتر و چه ازسمت مقادیر کوچکتر از ۴ و ۴− بـه ۴ و ۴− میل کند y بی‌نهایت می‌شود. هیچیك از مقادیر x مستثنی نیست.

از رابطهٔ (۲)، مقادیر $2>y>0$ باید از منحنی خـارج شود. وقتی y از مقادیر بزرگتر از ۲ به‌سمت ۲ میل کند، x بی‌نهایت می‌شود.

خطهای $x=\pm 4$ و $y=2$ مجانبهای منحنی هستند.

x	۰	±۱	±۲	±۳	±۴	±۵	±۶	±۷	±۸	±∞
y	۰	−۰٫۱۳	−۰٫۶۷	−۲٫۶	±∞	۵٫۶	۳٫۶	۳٫۰	۲٫۷	۲



۳. بررسی تغییرات و رسم نمودار $x^3-x^2y+y=0$.

معادله را نسبت به y حل می‌کنیم، $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

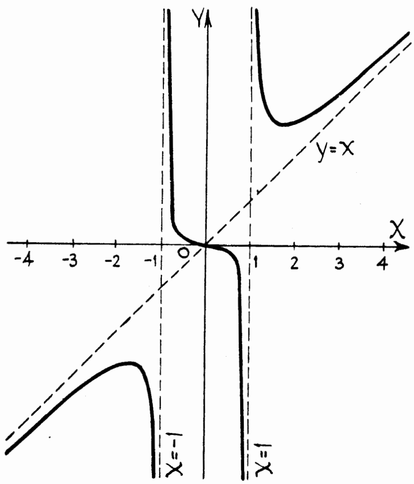
به‌ازای $x=\pm 1$، y بی‌نهایت‌می‌شود؛ پس‌خطهای $x=1$ و $x=-1$ مجانبهای قائم منحنی هستند.

عبارت $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ را به‌صورت $y=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ بیان‌می‌کنیم. وقتیx بی‌آنکه حدی داشته باشد صعود کند، y نیز بدون داشتن حـد صعود می‌کند و کسر $\dfrac{x}{x^2-1}$

به‌سمت صفر میل می‌کند. پس منحنی به‌سمت خط $y=x$ که مجانب آن است میل می‌کند. وقتی $x>1$ باشد، یك‌شاخهٔ منحنی بالای خط $y=x$ قرار دارد، و به‌ازای $x<-1$ شاخهٔ دیگر منحنی پایین خط $y=x$ قرار می‌گیرد.

منحنی از مبدأ مختصات می‌گذرد و نسبت به‌مبدأ مختصات متقارن است. تعدادی از مقادیر x و y در جدول زیر آمده است:

x	$\pm\frac{۱}{۲}$	۰	$\pm$۱	$\pm$۱٫۵	$\pm$۲	$\pm$۲٫۵	$\pm$۳	$\pm$۴
y	$\mp\frac{۱}{۶}$	۰	∞	$\pm$۲٫۷	$\pm$۲٫۶۷	$\pm$۳٫۰	$\pm$۳٫۴	$\pm$۴٫۳



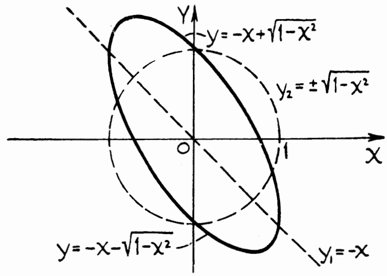
این‌منحنی را به‌روش جمع عرضها نیز می‌توان رسم کرد. برای‌انجام این‌کار، فرض می‌کنیم $y_۱=x$ و $y_۲=\frac{x}{x^۲-۱}$. نمودارهای این دومعادله را در یك دستگاه محورها رسم و عرضهای $y_۱$ و $y_۲$ متناظر با یك طول را با هم جمع می‌کنیم.

۴. بیضی به‌معادلهٔ $۲x^۲+۲xy+y^۲-۱=۰$ را از طریق جمع عرضها رسم کنید.

معادله را نسبت به y حل می‌کنیم:

$$y=\frac{-۲x\pm\sqrt{۴x^۲-۸x^۲+۴}}{۲}=-x\pm\sqrt{۱-x^۲}$$

خط $y_1=-x$ و دایرهٔ $y_2=\pm\sqrt{1-x^2}$ یا $x^2+y_2^2=1$ را رسم می‌کنیم. بیضی حاصل نسبت به‌مبدأ مختصات متقارن است.

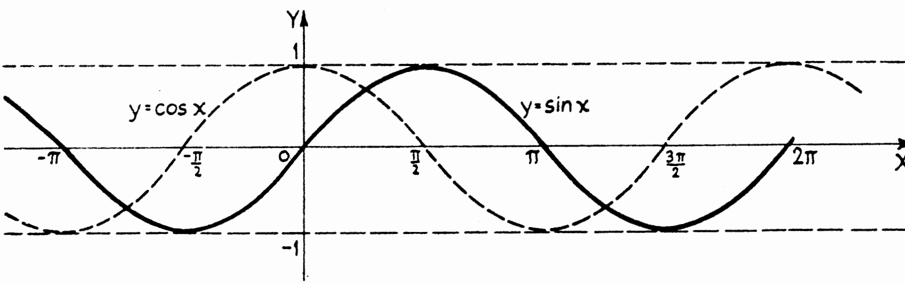


۵. تابع مثلثاتی. نمودار $y=\sin x$ را رسم کنید.

زاویهٔ x را برحسب رادیان بیان می‌کنیم ($\pi=180^\circ$ رادیان).

x	۰	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	$\pm\pi$	$\pm\frac{7\pi}{6}$	$\pm\frac{4\pi}{3}$	$\pm\frac{3\pi}{2}$	$\pm\frac{5\pi}{3}$	$\pm\frac{11\pi}{6}$	$\pm 2\pi$
$\sin x$	۰	$\pm$۰٫۵	$\pm$۰٫۸۷	$\pm$۱	$\pm$۰٫۸۷	$\pm$۰٫۵	۰	$\mp$۰٫۵	$\mp$۰٫۸۷	$\mp$۱	$\mp$۰٫۸۷	$\mp$۰٫۵	۰

چون مقادیر $\sin x$ پیاپی تکرار می‌شود، $\sin x$ تابعی متناوب با دورهٔ تناوب 2π است؛ بنابراین نمودار $y=\sin x$ در هر فاصله‌ای دقیقاً مشابه نمودار در فاصلهٔ 2π رادیان است. چون $\sin(-x)=-\sin x$، نمودار منحنی نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. هیچ‌مقداری از x مستثنی نیست، ولی‌منحنی بین دوخط $y=1$ و $y=-1$ قرار دارد.



نمودار $y=\cos x$ را می‌توان مانند حالت $y=\sin x$ ازطریق نقطه‌یابی به‌دست آورد. نمودار خطچین شکل بالا را ببینید.

x	۰	$\pm\frac{\pi}{۶}$	$\pm\frac{\pi}{۳}$	$\pm\frac{\pi}{۲}$	$\pm\frac{۲\pi}{۳}$	$\pm\frac{۵\pi}{۶}$	$\pm\pi$	$\pm\frac{۷\pi}{۶}$	$\pm\frac{۴\pi}{۳}$	$\pm\frac{۳\pi}{۲}$	$\pm\frac{۵\pi}{۳}$	$\pm۲\pi$
$\cos x$	۱	۰٫۸۷	۰٫۵	۰	−۰٫۵	−۰٫۸۷	−۱	−۰٫۸۷	−۰٫۵	۰	۰٫۵	۱

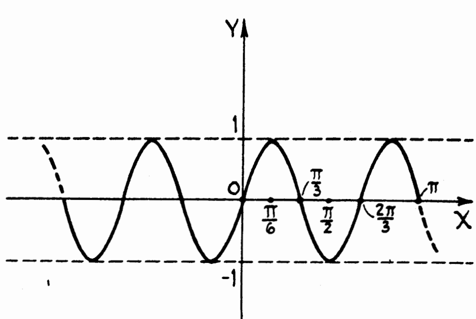
چون $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{۲}\right)$، هر نقطه روی منحنی کسینوس، دارای همان عرضی است که نقطه‌ای روی منحنی سینوس $\frac{\pi}{۲}$ در سمت راست نقطهٔ اول داراست. چون $\cos(-x)=\cos x$، نمودار منحنی نسبت به‌محور قائم متقارن است.

۶. نمودار منحنی $y=\sin ۳x$ را رسم کنید.

چون $\sin x$، وقتی x از ۰ تا ۲π تغییر کند کلیهٔ مجموعهٔ مقادیر خود را اختیار می‌کند، تابع $\sin nx$ (که n مقداری ثابت است) وقتی nx از ۰ تا ۲π یا وقتی x از ۰ تا $\frac{۲\pi}{n}$ تغییر کند، کلیهٔ مقادیر خود را اختیار می‌کند.

در اینجا $n=۳$ است؛ پس دورهٔ تناوب $\sin ۳x$ برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ است.

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π
$\sin ۳x$	۰	۱	۰	−۱	۰	۱	۰



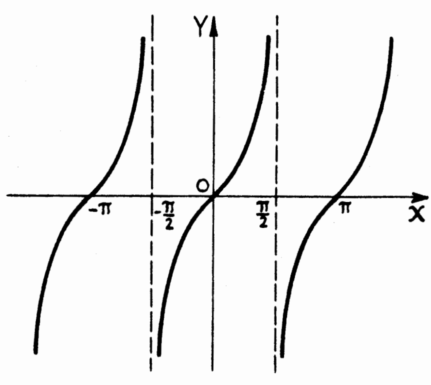
منحنی نسبت به‌مبدأ مختصات متقارن است. برد y عبارت است‌از، $-۱ \leqq y \leqq ۱$ و هیچ مقداری از x مستثنی نیست.

۰۷ نمودار $y = \tan x$ را رسم کنید.

چون $\tan(-x) = -\tan x$ است، منحنی نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. دورهٔ تناوب تابع π است.

وقتی x مضرب فردی از $\frac{\pi}{۲}$ باشد، مقدار تابع بی‌نهایت می‌شود و منحنی از همهٔ مقادیر y که بین $x = -\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}$ باشد می‌گذرد. هیچیك از مقادیر x یا y را نباید از منحنی خارج کرد.

x	$-\frac{\pi}{۲}$	$-\frac{\pi}{۴}$	$-\frac{\pi}{۶}$	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$
$\tan x$	∞	-۱	$-۰٫۵۸$	۰	۰٫۵۸	۱	۱٫۷۳	∞



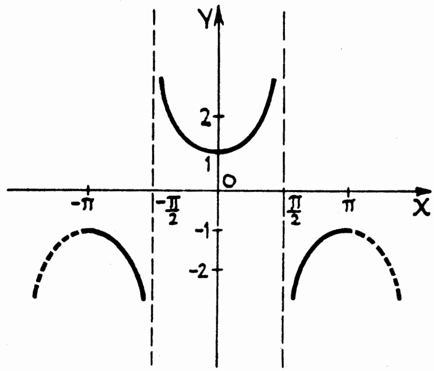
۰۸ نمودار $y = \sec x$ را رسم کنید.

چون $\sec(-x) = \sec x$، منحنی نسبت به‌محور yها متقارن است و دورهٔ تناوب تابع ۲π است.

چون $\sec x = \frac{۱}{\cos x}$، مقادیر $\sec x$ رامی‌توان به‌راحتی ازجدول $\cos x$ به‌دست

آورد. چون برد $\cos x$ بین ۱ − و ۱ + است، بـرد $\sec x$ کلیهٔ مقادیر از $-\infty$ تا ۱ − و از ۱ تا $+\infty$ خواهد بود.

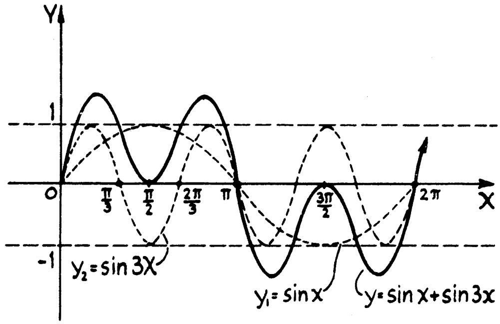
x	۰	$\frac{\pi}{۳}$	$\pm\frac{\pi}{۲}$	$\pm\frac{۲\pi}{۳}$	$\pm\pi$
$\sec x$	۱	۲	∞	۲−	۱−



۹. با استفاده از روش جمع عرضها، نمودار $y=\sin x+\sin 3x$ را رسم کنید.

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π
$\sin x$	۰	۰٫۵	۰٫۸۷	۱	۰٫۸۷	۰٫۵	۰
$\sin 3x$	۰	۱	۰	۱−	۰	۱	۰

x	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
$\sin x$	۰٫۵−	۰٫۸۷−	۱−	۰٫۸۷−	۰٫۵−	۰
$\sin 3x$	۱−	۰	۱	۰	۱−	۰



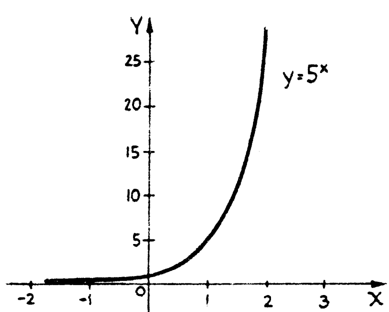
۰۱۰ تابع نمایی. مطلوب است رسم نمودار $y=a^x$، که در آن a مقداری مثبت وثابت دلخواه بزرگتر از واحد است.

مشخصاً فرض می‌کنیم $a=5$ باشد. آنگاه معادلهٔ $y=5^x$ حاصل می‌شود.

به‌ازای $x=0$، $y=5^0=1$. وقتی x افزایش یابد، y صعود می‌کند. به‌ازای مقادیرمنفی x، 5^x عددی مثبت می‌شود، ولی با افزایش مقدار مطلق x، کاهش می‌یابد. پس منحنی کاملاً بالای محور xها قرار دارد.

منحنی نسبت به‌هیچیک از محورها یا مبدأ مختصات متقارن نیست. به‌ازای مقادیر منفی x، وقتی مقدار مطلق x افزایش یابد، منحنی به‌سوی قسمت منفی محور xها که مجانب منحنی محسوب می‌شود میل می‌کند.

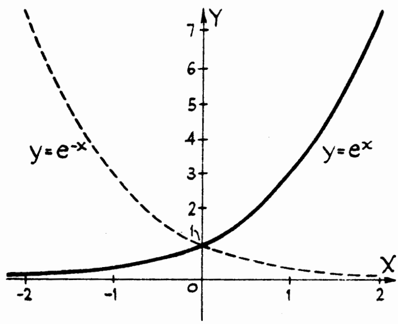
x	۰	۱	۲	۱−	۲−	۳−	۴−
y	۱	۵	۲۵	۰٫۲	۰٫۰۴	۰٫۰۰۸	۰٫۰۰۱۶



۰۱۱ مطلوب است رسم نمودار $y=e^x$.

عدد $e=$ ۲٫۷۱۸۲۸۱ مبنا یا پایهٔ لگاریتم طبیعی یا نپری است.

x	−۳	−۲	−۱	−۰٫۵	۰	۰٫۵	۱	۲
e^x	۰٫۰۵۰	۰٫۱۳۵	۰٫۳۶۸	۰٫۶۰۶	۱	۱٫۶۵	۲٫۷۲	۷٫۳۹



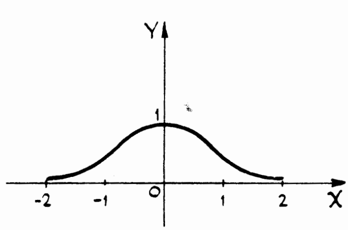
نمودار $y=e^{-x}$ را همان‌طور که درشکل بالا نشان داده‌شده است، می‌توان به‌عنوان قرینهٔ منحنی $y=e^x$ نسبت به‌محور yها توصیف کرد.

۱۲. معادلهٔ منحنی احتمال، $y=e^{-x^2}$، را مورد بحث و بررسی قراردهید و نمودارآن‌را رسم کنید.

نقطهٔ تقاطع منحنی بامحور yها، عرض واحد دارد. منحنی نقطهٔ برخوردی بامحور xها ندارد.

منحنی نسبت به‌محور yها متقارن است. محور xها مجانب منحنی است، چون‌وقتی $x \to \pm\infty$، $y \to 0$.

چون به‌ازای کلیهٔ مقادیر x، $e^{-x^2}>0$ است، منحنی کاملاً بالای محور xها قرار دارد.

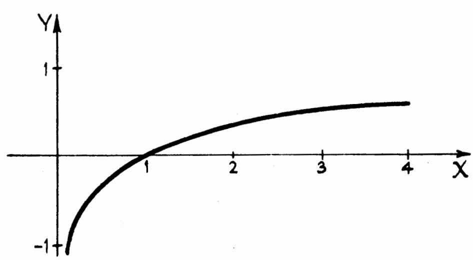


x	۰	$\pm$۰ر۵	$\pm$۱	$\pm$۱ر۵	$\pm$۲
y	۱	۰ر۷۸	۰ر۳۷	۰ر۱۱	۰ر۰۲

۱۳. تابع لگاریتمی. مکان هندسی معادلهٔ $y=\log_a x$، منحنی لگاریتمی نامیده می‌شود، که با مکان هندسی $y=a^x$، تنها در رابطه با محورهـای مختصات تفاوت دارد. در واقع هر دو معادله را می‌توان به‌صورت نمایی یا به‌شکل لگاریتمی نوشت. با فرض $a=10$، نمودار $y=\log_{10} x$ (یا $x=10^y$) را رسم می‌کنیم.

چون x نمی‌تواند مقادیر منفی را اختیار کند، منحنی کاملاً در طرف راست محور yها خواهد بود. به‌ازای مقادیر مثبت $x<1$، y منفی می‌شود. به‌ازای $x=1$، $y=0$. وقتی مقدار x افزایش یابد، y نیز افزایش می‌یابد. هیچ گونه تقارنی وجود ندارد. نیمهٔ منفی محور yها مجانب منحنی است.

x	۰ر۱	۰ر۵	۱	۲	۳	۴	۵	۱۰
y	−۱	−۰ر۳۰	۰	۰ر۳۰	۰ر۴۸	۰ر۶۰	۰ر۷۰	۱

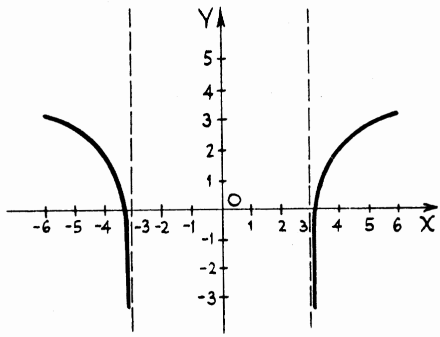


۱۴. معادلهٔ $y=\log_e(x^2-9)$ را بررسی و نمودار آن‌را رسم کنید.

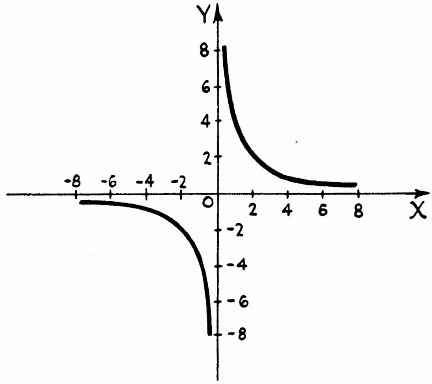
اگر $y=0$، $\log_e(x^2-9)=0$، یا $x^2-9=1$، و $x=\pm\sqrt{10}$. منحنی از محور yها نمی‌گذرد.

به‌ازای $|x|<3$، y موهومی می‌شود. اگـر $|x|>\sqrt{10}$ بـاشد، y مثبت است. به‌ازای $3<|x|<\sqrt{10}$، y منفی است. خطهای $x=\pm 3$ مجانب منحنی هستند. منحنی نسبت به‌محور yها متقارن است.

x	$\pm$۳٫۱	$\pm$۳٫۲	$\pm$۳٫۵	$\pm$۴	$\pm$۵	$\pm$۶
y	−۰٫۴۹	۰٫۲۲	۱٫۱۸	۱٫۹۵	۲٫۷۷	۳٫۲۹



۱۵. معادلات پارامتری. گاهی اوقات بهتر است که هریك از متغیرهای x و y را برحسب متغیر سومی بیان کنیم. متغیر سوم به‌متغیر کمکی یا پارامتر موسوم است. دومعادله که‌در آنها x و y برحسب پارامتر بیان شود، معادلات پارامتری نامیده می‌شود. با تخصیص مقادیر متوالی به‌پارامتر، زوج مقادیر متوالی x و y به‌دست می‌آید. اگر هنگام رسم، این نقطه‌ها را به‌وسیلهٔ قوسی هموار به‌هم متصل کنیم، منحنی حاصل مکان هندسی معادله‌های پارامتری‌را ارائه می‌دهد. مطلوب است رسم منحنی $x=۲t$، $y=\frac{۲}{t}$.



منحنی نسبت به‌مبدأ مختصات متقارن است. محورهای x و y مجانبهای آن هستند. هر گاه پارامتر t را حذف کنیم، معادلهٔ منحنی در دستگاه مختصات قائم، یعنی $xy=۴$،

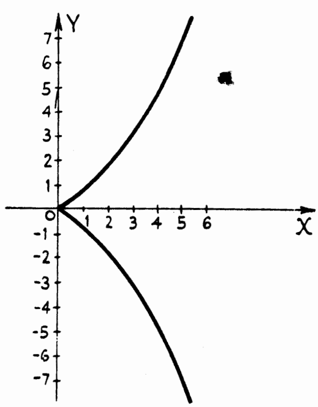
به‌دست می‌آید که معادلهٔ هذلولی متساوی‌القطرین یا هذلولی قائم است، که محورهای مختصات، مجانبهای آن است.

به‌منظور حذف پارامتر t، $t=\frac{x}{2}$ را در رابطهٔ $y=\frac{2}{t}$ قرار می‌دهیم، نتیجه می‌شود:

$$y=\frac{2}{\frac{x}{2}} \text{ ، یا } xy=4$$

t	$\pm\frac{1}{4}$	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	± 2	± 3	± 4
x	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	± 2	± 4	± 6	± 8
y	± 8	± 4	± 2	± 1	$\pm\frac{2}{3}$	$\pm\frac{1}{2}$

۱۶. مطلوب است رسم منحنیی که معادلات پارامتری آن عبارتند از، $x=\frac{1}{2}t^2$ و $y=\frac{1}{4}t^3$.



پس از حذف t، معادلهٔ منحنی در دستگاه مختصات قائم، $x^3=2y^2$ می‌شود، که سهمی نیم‌مکعبی نام دارد. منحنی نسبت به‌محور xها متقارن است.

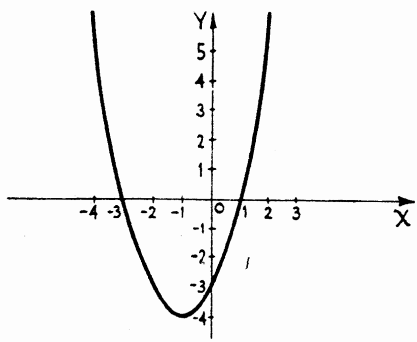
برای حذف پارامتر t، از رابطهٔ $x=\frac{1}{2}t^2$، یا $2x=t^2$ نتیجه می‌گیریم،

$(t^2)^3=(2x)^3$. ازرابطهٔ $y=\frac{1}{4}t^3$، یا $4y=t^3$، نتیجه‌می‌گیریم، $(t^3)^2=(4y)^2$.

بنابراین $(2x)^3=t^6=(4y)^2$، یا $x^3=2y^2$.

t	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳
x	۴٫۵	۲	۰٫۵	۰	۰٫۵	۲	۴٫۵
y	−۶٫۷۵	−۲	−۰٫۲۵	۰	۰٫۲۵	۲	۶٫۷۵

۱۷. مطلوب است رسم منحنیی کـه معادله‌هـای پارامتری آن عبارتنداز، $x=t+1$ و $y=t(t+4)$.



هرگاه پارامتر t را از دو رابطه حذف کنیم، معادلهٔ‌سهمی در دستگاه مختصات‌قائم، به‌صورت $y=x^2+2x-3$ به‌دست می‌آید.

t	−۵	−۴	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲
x	−۴	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳
y	۵	۰	−۳	−۴	−۳	۰	۵	۱۲

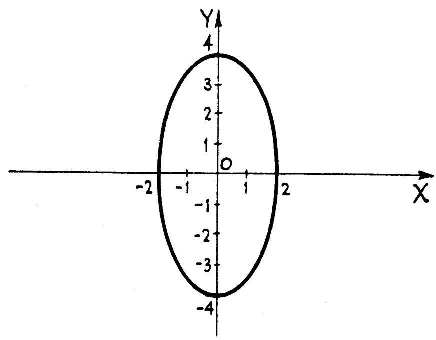
۱۸. مطلوب است رسم منحنیی‌که معادله‌های پارامترهای آن عبارتند از، $x=2\cos\theta$ و $y=4\sin\theta$.

θ	°۰	°۳۰	°۶۰	°۹۰	°۱۲۰	°۱۵۰	°۱۸۰	°۲۱۰	°۲۴۰	°۲۷۰	°۳۰۰	°۳۳۰	°۳۶۰
x	۲	۱٫۷	۱	۰	۱−	۱٫۷−	۲−	۱٫۷−	۱−	۰	۱	۱٫۷	۲
y	۰	۲	۳٫۵	۴	۳٫۵	۲	۰	۲−	۳٫۵−	۴−	۳٫۵−	۲−	۰

اگر پارامتر θ را از دو رابطه حذف کنیم، معادلهٔ بیضی در دستگاه مختصات قائـم، $\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۱۶}=۱$ به‌دست می‌آید.

برای حذف پارامتر θ چنین عمل می‌کنیم:

$\cos\theta=\frac{x}{۲}$ و $\sin\theta=\frac{y}{۴}$، پس $\cos^۲\theta+\sin^۲\theta=۱=\frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۱۶}$.



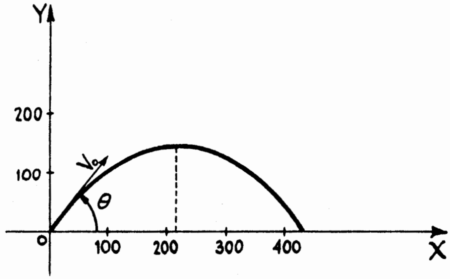
۱۹. هر گاه گلوله‌ای نسبت به‌افق با زاویهٔ θ و بـا سرعت اولیهٔ $V_\circ$ شلیک شود، مکان آن در هر لحظهٔ t به‌وسیلهٔ معادله‌های $x=(V_\circ\cos\theta)t$ و $y=(V_\circ\sin\theta)t-\frac{۱}{۲}gt^۲$ مشخص می‌شود، که در آن g معمولاً ۳۲ فوت بر مجذور ثانیه اختیار می‌شود. x و y برحسب فوت و t برحسب ثانیه بیان می‌شود.

اگر $\theta=\arc\cos\frac{۳}{۵}$ و ثانیه/فوت ۱۲۰ $=V_\circ$ باشد، منحنی مسیر حرکت گلولـه را رسم کنید.

چون $\sin\theta=\frac{۴}{۵}$، داریم $x=۷۲t$، $y=۹۶t-۱۶t^۲$.

پس از حذف پارامتر t داریم، $y=\frac{۴x}{۳}-\frac{x^۲}{۳۲۴}$، کـه معادلهٔ یك سهمی، و نسبت

به محور عمودی متقارن است. ارتفاع اوج ۱۴۴ فوت و برد گلوله $x=۴۳۲$ ft است.



t	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
x	۰	۷۲	۱۴۴	۲۱۶	۲۸۸	۳۶۰	۴۳۲
y	۰	۸۰	۱۲۸	۱۴۴	۱۲۸	۸۰	۰

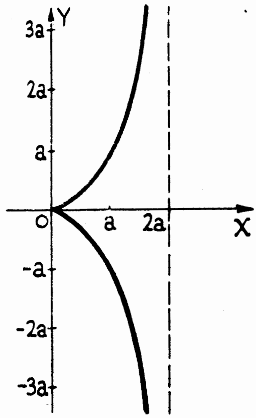
۰۲۵ مطلوب است بررسی تغییرات و رسم منحنیی که معادلات پارامتری آن عبارتند از:

$$x=\frac{۲at^{۲}}{t^{۲}+۱},\quad y=\frac{۲at^{۳}}{t^{۲}+۱}$$

وقتی که $t=۰$، $x=۰$ و $y=۰$ است. به‌ازای تمام مقادیر مثبت یا منفی t، x مثبت یا صفر است؛ اما بـه‌ازای $t>۰$، y مثبت و بـه‌ازای $t<۰$، y منفی است. منحنی نسبت به‌محور xها متقارن است.

اگر بنویسیم $x=\frac{۲at^{۲}}{t^{۲}+۱}=۲a-\frac{۲a}{t^{۲}+۱}$، دیده می‌شود که وقتی مقدار t بی آنکه حدی داشته باشد افزایش یابد، x به‌سمت مقدار $۲a$ میل می‌کند ولی مقدار y بدون داشتن حد صعود می‌کند. بنابراین خط $x=۲a$ مجانب قائم منحنی است.

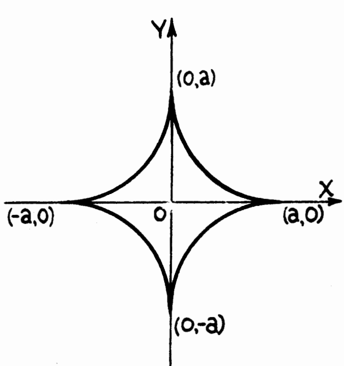
پس از حذف t، این معادله در دستگاه مختصات قائم به‌صورت $y^{۲}(۲a-x)=x^{۳}$ درمی‌آید که پیچک‌نمای دیوکلس نام دارد.



t	۰	±۱	±۲	±۳	±۴
x	۰	a	۱٫۶a	۱٫۸a	۱٫۹a
y	۰	±a	±۳٫۲a	±۵٫۴a	±۷٫۵a

۲۱. منحنی $x=a\cos^3\theta$، $y=a\sin^3\theta$ را بررسی و نمودار آن‌را رسم کنید.

این‌منحنی نسبت به‌محور xها متقارن است، چون $\cos(-\theta)=\cos\theta$، درحالی که $\sin(-\theta)=-\sin\theta$. این منحنی نسبت به‌محور yها متقارن است، چون $\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$، اما $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$. چون مقدار عددی سینوس و کسینوس هرگز نمی‌تواند بزرگتر از یك شود، $-a\leqq x\leqq a$ و $-a\leqq y\leqq a$.



θ	۰°	۳۰°	۶۰°	۹۰°	۱۲۰°	۱۵۰°	۱۸۰°
x	a	۰٫۶۵a	۰٫۱۳a	۰	$-$۰٫۱۳a	$-$۰٫۶۵a	$-a$
y	۰	۰٫۱۳a	۰٫۶۵a	a	۰٫۶۵a	۰٫۱۳a	۰

وقتی θ از دو رابطه حذف شود، معادلهٔ این منحنی در دستگاه مختصات قائم عبارت است از، $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$، که به درون چرخنما با چهار نقطهٔ عطف موسوم است.

برای حذف پارامتر θ چنین عمل می‌کنیم:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{۲}{۳}}+\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{۲}{۳}}=(\cos^{۳}\theta)^{\frac{۲}{۳}}+(\sin^{۳}\theta)^{\frac{۲}{۳}}=\cos^{۲}\theta+\sin^{۲}\theta=۱$$

یا

$$x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$$

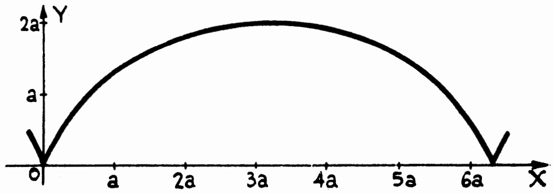
۲۲. منحنی زیر را مورد بحث و بررسی قرار دهید و نمودار آن‌را رسم کنید:

$$x=a(\theta-\sin\theta)$$
$$y=a(۱-\cos\theta)$$

به‌ازای $\theta=۰°$، $x=۰$ و $y=۰$.

وقتی $\theta=۱۸۰°$، $x=\pi a$ و $y=۲a$.

اگر $\theta=۳۶۰°$ باشد، $x=۲\pi a$ و $y=۰$.



اگر θ حذف شود، معادلهٔ این منحنی عبارت است از، $x=a\cos^{-۱}\frac{a-y}{a}-\sqrt{۲ay-y^{۲}}$، که چرخنما نام دارد.

θ	۰°	۳۰°	۶۰°	۹۰°	۱۲۰°	۱۵۰°	۱۸۰°	۲۱۰°	۲۴۰°	۲۷۰°	۳۰۰°	۳۳۰°	۳۶۰°
x	۰	۰٫۰۲a	۰٫۱۸a	۰٫۵۷a	۱٫۲a	۲٫۱a	πa	۴٫۲a	۵٫۱a	۵٫۷a	۶٫۱a	۶٫۳a	۲πa
y	۰	۰٫۱۳a	۰٫۵a	a	۱٫۵a	۱٫۹a	۲a	۱٫۹a	۱٫۵a	a	۰٫۵a	۰٫۱۳a	۰

برای حذف پارامتر θ:

از رابطهٔ $y=a(1-\cos\theta)$ به‌دست می‌آید، $\cos\theta=\dfrac{a-y}{a}$. در نتیجه:

$$\theta=\cos^{-1}\frac{a-y}{a} \quad \text{و} \quad \sin\theta=\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a}$$

با قرار دادن آنها در رابطهٔ $x=a\theta-a\sin\theta$، داریم:

$$x=a\cos^{-1}\frac{a-y}{a}-\sqrt{2ay-y^2}$$

۲۳. معادلهٔ زیر را به‌صورت معادلات پارامتری تبدیل کنید:

$$x^2+3xy+3y^2-ax=0$$

فرض‌کنید $y=tx$. آنگاه $x^2+3x^2t+3x^2t^2-ax=0$. اگر طرفین تساوی را بر x تقسیم‌کنیم، $x+3xt+3xt^2-a=0$ حاصل می‌شود.

با حل‌آن نسبت به x، $x=\dfrac{a}{3t^2+3t+1}$، $y=tx=\dfrac{at}{3t^2+3t+1}$.

مسئله‌های تکمیلی

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۱۴، معادلهٔ داده شده را مورد بحث و بررسی قرار دهید و نمودار آن‌را رسم کنید.

۱. $(y^2-4)x-9y=0$.

۲. $y=(x+1)(x+2)(x-2)$.

۳. $y^2=(x+1)(x+2)(x-2)$.

۴. $y^2(4-x)=x^3$. پیچک نما.

۵. $x^3 - x^2y + 4y = 0$.

۶. $x^2y - 3x^2 - 9y = 0$.

۷. $x^2y + 4y - 8 = 0$. حلقهٔ آنزا.

۸. $x^2 + 2xy - 4 + y^2 = 0$.

۹. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 4}$.

۱۰. $y^2 = \dfrac{x - 4}{x^2 + 2x - 8}$.

۱۱. $4x^2 - 12x - 4xy + y^2 + 6y - 7 = 0$.

۱۲. $x^3 + 4x^2 + xy^2 - 4y^2 = 0$. چرخ تیز نما.

۱۳. $xy^2 - xy - 2x - 4 = 0$.

۱۴. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. درون چرخنما با چهار نقطهٔ عطف.

در هر یک از مسئله‌های ۱۵ تا ۲۲، نمودار معادلهٔ داده شده را رسم کنید.

۱۵. $y = 2 \sin 3x$.

۱۶. $y = 2 \sin \dfrac{x}{3}$.

۱۷. $y = \tan 2x$.

۱۸. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

۱۹. $y = 2 \sec \dfrac{x}{2}$.

۲۰. $y = \cot\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

۲۱. $y = 3 \cos \dfrac{\pi}{2}(x - 1)$.

۲۲. $y = \dfrac{1}{3} \csc 3x$.

در هر یک از مسئله‌های ۲۳ تا ۲۸، نمودار معادلهٔ داده شده را رسم کنید.

۲۳. $y = \arcsin x$.

۲۴. $y = 2 \arctan 2x$.

۲۵. $y = 3 \arccos \dfrac{x}{3}$.

۲۶. $y = \operatorname{arc\,sec} x$.

۲۷. $y = \operatorname{arc\,csc} 2x$.

۲۸. $y = \operatorname{arc\,cot} \dfrac{x}{2}$.

در هر یك از مسئله‌های ۲۹ تا ۳۵، نمودار معادلهٔ داده شده را رسم کنید.

۲۹. $y=2e^{\frac{x}{2}}$.

۳۰. $y=4^{-x}$.

۳۱. $y=10^{\frac{x}{3}}$.

۳۲. $y=\log_e(3+x)$.

۳۳. $y=\log_{10}\sqrt{x^2-16}$.

۳۴. $y=\log_e\sqrt{27-x^3}$.

۳۵. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$. منحنی زنجیری.

در هر یك از مسئله‌های ۳۶ تا ۴۹، معادلهٔ داده شده را از طریق جمع عرضها رسم کنید، در مسئله‌های ۴۶، ۴۷، ۴۸ قوسهای مرزی را نشان دهید.

۳۶. $4x^2-4xy+y^2-x=0$.

۳۷. $x^2-2xy+y^2+x-1=0$.

۳۸. $3x^2-2xy+y^2-5x+4y+3=0$.

۳۹. $x^2+2xy+y^2-4x-2y=0$.

۴۰. $2x^2+y^2-2xy-4=0$.

۴۱. $y=2\cos x+\sin 2x$.

۴۲. $y=e^{\frac{x}{2}}+x^2$.

۴۳. $y=\dfrac{x}{2}+\cos 2x$.

۴۴. $y=e^{-x}+2e^{\frac{x}{2}}$.

۴۵. $y=\sin 2x+2\cos x$.

۴۶. $y=x\sin x$.

۴۷. $y=e^{-\frac{x}{2}}\cos\dfrac{\pi x}{2}$.

۴۸. $y=xe^{-x^2}$.

۴۹. $y = x - \sin\frac{\pi x}{۳}$.

مطلوب است معادلات پارامتری مسئله‌های ۵۰ تا ۵۵. از مقادیر داده شده برای x یا y استفاده کنید.

۵۰. $x - xy = ۲$، $y = ۱ - t$.

جواب: $x = \frac{۲}{t}$، $y = ۱ - t$.

۵۱. $x^۲ - ۴y^۲ = K^۲$، $x = K\sec\theta$.

جواب: $x = K\sec\theta$ ، $y = \frac{K\tan\theta}{۲}$.

۵۲. $x^۳ + y^۳ = ۶xy$، $y = tx$.

جواب: $x = \frac{۶t}{۱+t^۳}$، $y = \frac{۶t^۲}{۱+t^۳}$.

۵۳. $x^۲ - ۲xy + ۲y^۲ = ۲a^۲$، $x = ۲a\cos t$.

جواب: $x = ۲a\cos t$، $y = a(\cos t \pm \sin t)$.

۵۴. $x^۲y + b^۲y - a^۲x = ۰$، $x = b\cot\frac{t}{۲}$.

جواب: $x = b\cot\frac{t}{۲}$، $y = \frac{a^۲}{۲b}\sin t$.

۵۵. $x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = a^{\frac{۲}{۳}}$، $y = a\sin^۳\theta$.

جواب: $x = a\cos^۳\theta$، $y = a\sin^۳\theta$.

در هر یک از مسئله‌های ۵۶ تا ۵۹، پارامتر را حذف کنید و معادله را در دستگاه مختصات قائم به‌دست آورید.

۵۶. $x = a\sec\theta$، $y = b\tan\theta$. جواب: $\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$.

۵۷. $x = ۲\cos\theta - ۱$، $y = ۳\sin\theta - ۲$. جواب: $\frac{(x+۱)^۲}{۴} + \frac{(y+۲)^۲}{۹} = ۱$.

۵۸. $x=\frac{1}{2}\cos t$، $y=\cos 2t$. جواب: $y=8x^2-1$.

۵۹. $x=\frac{3am}{1+m^3}$، $y=\frac{3am^2}{1+m^3}$. جواب: $x^3+y^3=3axy$.

۶۰. گلوله‌ای از نقطهٔ A با سرعت اولیهٔ ۳۰۰۰ فوت بر ثانیه با زاویهٔ $35°$ نسبت به‌افق شلیك می‌شود. فاصلهٔ افقی از A تا نقطهٔ B، کـه گلوله به‌سطح زمین اصابت می‌کند، را تا سه رقم معنی‌دار بیابید. ضمناً زمان طی شده را نیز به‌دست آورید.

جواب: ۲۶۴,۰۰۰ فوت، ۱۰۸ ثانیه.

۶۱. هر گاه سرعت گلوله‌ای هنگام خروج از دهانـهٔ تفنگ برابر ۱۲۰۰ فوت بـر ثانیه باشد، با چه زاویه‌ای باید تفنگ را بالا نگه داشت تا گلوله به‌هدفی که روی زمین به‌فاصلهٔ $7500\sqrt{3}$ یارد قرار دارد اصابت کند؟ زمان حرکت گلولـه در فضا چقدر است؟

جواب: $30°$، ۳۷٫۵ ثانیه.

۶۲. پرتابه‌ای با زاویهٔ فراز $60°$ و با سرعت اولیهٔ ۲۵۰۰ فوت برثانیه پرتاب می‌شود. برد و ارتفاع اوج پرتابه را به‌دست آورید.

جواب: ۱۶۹,۰۰۰ فوت، ۷۳,۲۰۰ فوت.

منحنی هر یك از معادلات پارامتری مسئله‌های ۶۳ تا ۷۰ را رسم کنید.

۶۳. $x=4\cos t$، $y=4\sin t$.

۶۴. $x=t+\frac{1}{t}$، $y=t-\frac{1}{t}$.

۶۵. $x=t^2+2$، $y=t^3-1$.

۶۶. $x=4\tan\theta$، $y=4\sec\theta$.

۶۷. $x=\frac{1}{1+t}$، $y=\frac{1}{1+t^2}$.

۶۸. $x=1+t^2$، $y=4t-t^3$.

۶۹. $x=\sin t+\cos t$، $y=\cos 2t$.

۷۰. $x=\theta-\sin\theta$، $y=1-\cos\theta$.

۷۱. مطلوب است رسم منحنیی که معادلات پارامتری آن عبارتند از:

$$x=8\cos^3\theta \quad , \quad y=8\sin^3\theta$$

۷۲. مطلوب است رسم منحنیی که معادلات پارامتری آن عبارتند از:

$$x=\frac{6t}{1+t^{3}} \quad , \quad y=\frac{6t^{2}}{1+t^{3}}$$

۷۳. نمودار منحنیی را رسم کنید که معادلات پارامتری آن عبارتند از:

$$x=4\tan\theta \quad , \quad y=4\cos^{2}\theta$$

۷۴. مطلوب است رسم نمودار منحنیی که معادله‌های پارامتری آن عبارتند از:

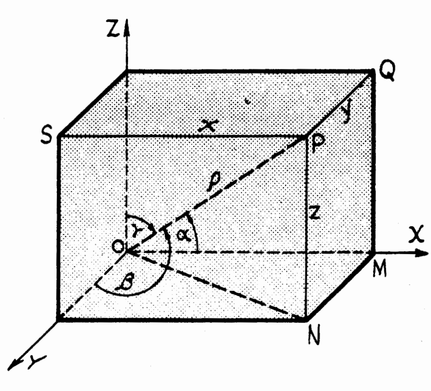
$$x=4\sin\theta \quad , \quad y=4\tan\theta(1+\sin\theta)$$

۱۲

مدخلی بر هندسهٔ تحلیلی فضایی

مختصات دکارتی. در هندسهٔ تحلیلی مسطحه موضع هرنقطهٔ دلخواه در صفحه، با توجه به‌فاصله‌های قائم آن نقطه از دو خط متقاطع که معمولاً متعامدند تعیین می‌شود. در هندسهٔ تحلیلی فضایی یك روش برای مشخص کردن مکان هرنقطه این است که مکان آن را برحسب فاصله‌های قائم آن ازسه صفحه که دو به‌دو برهم عمودند معین کنیم. این صفحات به‌صفحه‌های مختصات موسومند، وفاصله‌های قائم، مختصات نقطه نامیده می‌شود.

فصل مشترك این صفحات مختصاتی، سه‌محور OX، OY و OZ است که به‌محورهای مختصات‌موسومند وجهت مثبت آنها باعلامت پیکان نشان داده شده است. صفحات‌مختصات



تمام فضا را به‌هشت ناحیه موسوم به یك‌هشتم تقسیم می‌کنند، که به‌طریق زیر شماره‌گذاری می‌شود. شمارهٔ I ناحیه‌ای است که یالهای مرزی آن‌جهتهای مثبت سه‌محور مختصات‌هستند. آنگاه شماره‌های II، III و IV بالای صفحهٔ xy و درخلاف جهت حرکت عقربهٔ‌ساعت، دور محور OZ قرار دارند. ناحیهٔ V، VI، VII و VIII پایین صفحهٔ xy و ناحیهٔ V زیر ناحیهٔ I قراردارد.

مطابق شکل فاصله‌های SP، QP و NP به ترتیب برابر x، y و z یعنی مختصات نقطهٔ P هستند ونقطه به‌صورت (x, y, z) یا $P(x, y, z)$ نمایش داده می‌شود.

OP، فاصلهٔ نقطهٔ P تا مبدأ مختصات، عبارت است از:

$$OP=\sqrt{\overline{ON}^2+\overline{NP}^2}=\sqrt{\overline{OM}^2+\overline{MN}^2+\overline{NP}^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

پس، اگر $OP=\rho$ باشد، آنگاه، $\rho^2=x^2+y^2+z^2$.

زاویه‌های هادی و کسینوسهای هادی. اگر زاویه‌های بین OP و محورهای OX، OY و OZ به‌ترتیب برابر α، β و γ باشد، آنگاه:

$$x=\rho\cos\alpha\,,\ y=\rho\cos\beta\,,\ z=\rho\cos\gamma$$

این رابطه‌ها را به‌توان‌دو می‌رسانیم وباهم جمع می‌کنیم:

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2=\rho^2\cos^2\alpha+\rho^2\cos^2\beta+\rho^2\cos^2\gamma$$

یا

$$1=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$$

همچنین روابط زیر برقرار است:

$$\cos\alpha=\frac{x}{\rho},\ \cos\beta=\frac{y}{\rho},\ \cos\gamma=\frac{z}{\rho}$$

یا

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

α، β و γ را زاویه‌های هادی خط OP وکسینوس این زاویه‌ها راکسینوسهای هادی OP می‌نامند.

اگر یك خط از مبدأ مختصات عبور نکند، آنگاه α، β و γ زاویه‌های هادی آن، زاویه‌های بین محورهای مختصات وخطی است که از مبدأ مختصات، موازی خط مفروض

رسم شده و دارای همان جهت خط است.

پارامتر هادی. هر سه عدد a، b و c که باکسینوسهای هادی یک خط متناسب باشند، پارامترهای هادی خط نامیده می‌شوند. اگر a، b و c پارامترهای هادی خطی معلوم باشد، به‌منظور تعیین کسینوسهای هادی‌خط، پارامترها را بر $\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ تقسیم‌می‌کنیم. علامت $(\pm)$ جلوی رادیکال را به‌کار می‌بریم تاکسینوسهای هادی علامت مناسب داشته باشند.

فاصلهٔ بین دو نقطه. فاصلهٔ بین هردو نقطهٔ دلخواه $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ عبارت است از:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

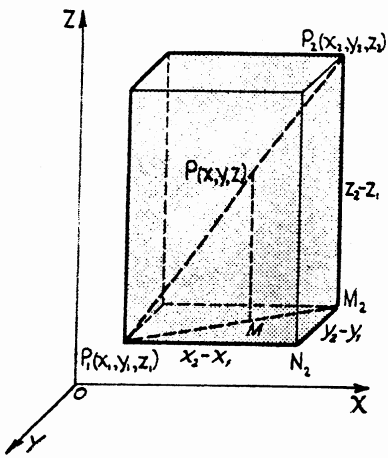
جهت یک خط. کسینوسهای هادی خط P_1P_2 عبارتند از:

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

نقطهٔ تقسیم. اگر نقطهٔ $P(x, y, z)$، پاره خط از $P_1(x_1, y_1, z_1)$ تا $P_2(x_2, y_2, z_2)$



را به‌نسبت $\frac{r}{1}=\frac{P_1P}{PP_2}$ تقسیم کند، آنگاه:

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}, \quad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}, \quad z=\frac{z_1+rz_2}{1+r}$$

زاویهٔ بین دوخط. زاویهٔ بین دوخط، درصورتی که متقاطع نباشند، بنا به تعریف، زاویهٔ بین دوخط متقاطعی است که هریك ازخطهای متقاطع موازی خطهای مفروض باشد.

فرض می‌کنیم OP_1 و OP_2 دوخطی باشندکه ازمبدأ مختصات موازی دو خط مفروض رسم شده‌اند و θ زاویهٔ بین دوخط باشد. بنا به‌قانون کسینوسها:

$$\cos\theta=\frac{\rho_1^2+\rho_2^2-d^2}{2\rho_1\rho_2}$$

حال: $\rho_1^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$ ، $\rho_2^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2$

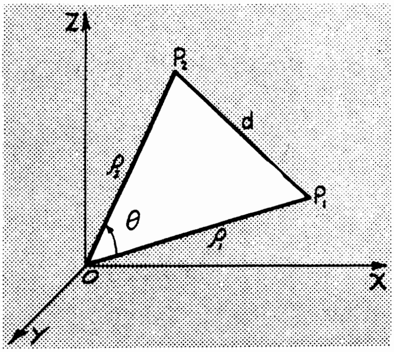
و $d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$

با قرار دادن آنها در رابطهٔ بالا وساده‌کردن آن، داریم:

$$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\rho_1\rho_2}$$

اما $\cos\alpha_1=\frac{x_1}{\rho_1}$، $\cos\alpha_2=\frac{x_2}{\rho_2}$ و غیره. بنابراین:

$$\cos\theta=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2$$



اگر دوخط موازی باشند، $\cos\theta=1$ و درنتیجه:

$$\alpha_1=\alpha_2,\ \beta_1=\beta_2,\ \gamma_1=\gamma_2$$

اگر دوخط برهم عمود باشند، $\cos\theta=0$ و درنتیجه:

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0$$

مسئله‌های حل شده

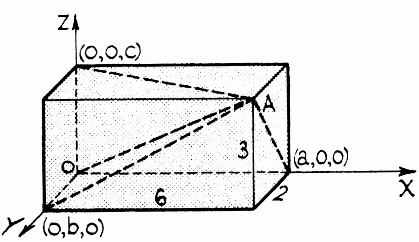
۱. نقطه‌های $A(6, 2, 3)$ و $B(8, -2, 4)$ را رسم کنید وفاصلهٔ هریك ازنقطه‌ها را از مبدأ مختصات وفواصل قائم آنها را ازمحورهای مختصات به‌دست‌آورید.

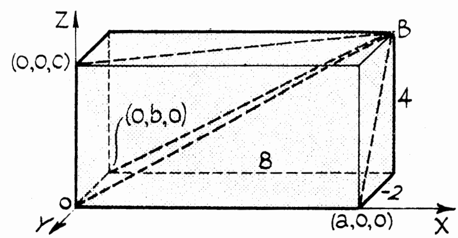
$$OB = \sqrt{8^2 + (-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{21} \qquad OA = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = 7$$

$$Ba = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5} \qquad Aa = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$Bb = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5} \qquad Ab = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$$

$$Bc = \sqrt{8^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{17} \qquad Ac = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$$



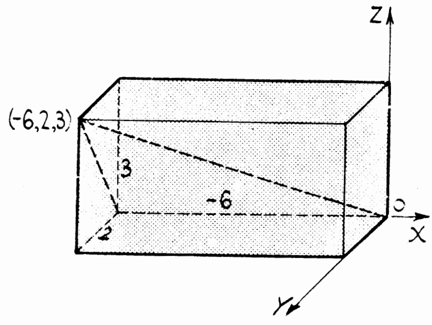


۲. فاصلهٔ بین دونقطهٔ $P_1(5, -2, 3)$ و $P_2(-4, 3, 7)$ را به‌دست‌آورید.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-4-5)^2 + (3+2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{122}$$

۳. کسینوسهای هادی و زاویه‌های هادی خط از مبدأ مختصات به‌نقطهٔ $(-6, 2, 3)$ را به‌دست آورید.



$$\cos\alpha=\frac{x_۲-x_۱}{\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲+(z_۲-z_۱)^۲}}$$

$$=\frac{-۶-۰}{\sqrt{(-۶-۰)^۲+(۲-۰)^۲+(۳-۰)^۲}}=\frac{-۶}{۷}$$

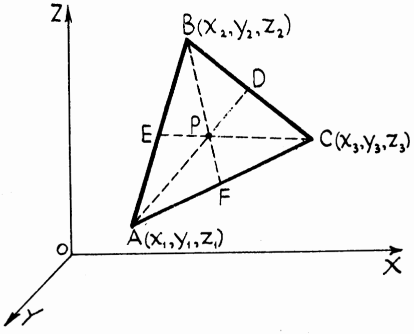
و $\alpha=۱۴۹^\circ$

$\cos\beta=\frac{y_۲-y_۱}{۷}=\frac{۲-۰}{۷}=\frac{۲}{۷}$ و $\beta=۷۳^\circ ۲۴'$.

$\cos\gamma=\frac{z_۲-z_۱}{۷}=\frac{۳-۰}{۷}=\frac{۳}{۷}$ و $\gamma=۶۴^\circ ۳۷'$.

۴. ثابت کنید مرکز هندسی یا گرانیگاه یا مرکز سطح، یعنی نقطهٔ تلاقی میانه‌های هرمثلث به‌مختصات $A(x_۱, y_۱, z_۱)$، $B(x_۲, y_۲, z_۲)$ و $C(x_۳, y_۳, z_۳)$ عبارت است از:

$$\left(\frac{x_۱+x_۲+x_۳}{۳}, \frac{y_۱+y_۲+y_۳}{۳}, \frac{z_۱+z_۲+z_۳}{۳}\right)$$



میانه‌های مثلث ABC یکدیگررا درنقطهٔ $P(x, y, z)$ قطع می‌کنند، به‌طوری‌که :

$$\frac{AP}{PD}=\frac{BP}{PF}=\frac{CP}{PE}=\frac{۲}{۱}=۲$$

مختصات نقطهٔ D عبارتند از ، $\left(\frac{x_۲+x_۳}{۲}, \frac{y_۲+y_۳}{۲}, \frac{z_۲+z_۳}{۲}\right)$.

مختصات نقطهٔ P که پاره‌خط AD را به‌نسبت $r=\frac{AP}{PD}=\frac{۲}{۱}$ تقسیم می‌کند عبارت است از:

$$x=\frac{x_۱+r\left(\frac{x_۲+x_۳}{۲}\right)}{۱+r}=\frac{x_۱+x_۲+x_۳}{۳}\text{،}$$

$$z=\frac{z_۱+z_۲+z_۳}{۳}\text{،}\ y=\frac{y_۱+y_۲+y_۳}{۳}$$

۵. کسینوسهای هادی وزاویه‌های هادی خط جهت داری به طرف بالا را طوری به دست آورید که پارامترهای هادی آن ۲، −۳، ۶ باشد.

$$\cos\alpha=\frac{۲}{\sqrt{۴+۹+۳۶}}=\frac{۲}{۷}\text{،}\ \alpha=۷۳^\circ ۲۴'.\quad \cos\beta=\frac{-۳}{۷}\text{،}\ \beta=۱۱۵^\circ ۲۳'.$$

$$\cos\gamma=\frac{۶}{۷}\text{،}\ \gamma=۳۱^\circ.$$

۶. نشان دهید خطهای گذرنده از $A(۵, ۲, -۳)$ و $B(۶, ۱, ۴)$، و همچنین $C(-۳, -۲, -۱)$ و $D(-۱, -۴, ۱۳)$ موازیند.

پارامترهای هادی AB عبارتند از، ۶−۵، ۱−۲ و ۴+۳، یا ۱، −۱ و ۷.

پارامترهای هادی CD عبارتند از، −۱+۳، −۴+۲ و ۱۳+۱، یا ۲، −۲ و ۱۴.

اگر دوخط با پارامترهای هادی a، b، c و a'، b'، c' موازی باشند، آنگاه، $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$. پس چون $\frac{۲}{۱}=\frac{-۲}{-۱}=\frac{۱۴}{۷}$، این دوخط موازیند.

۷. اگر $A(-۱۱, ۸, ۴)$، $B(-۱, -۷, -۱)$ و $C(۹, -۲, ۴)$، ثابت کنید خطهای AB و BC بریکدیگر عمودند.

پارامترهای هادی AB عبارتند از، −۱+۱۱، −۷−۸ و −۱−۴، یا ۱۰، −۱۵ و −۵، یا ۲، −۳ و −۱.

پارامترهای هادی BC عبارتند از ۹+۱، −۲+۷ و ۴+۱، یا ۱۰، ۵ و ۵، یا ۲، ۱ و ۱.

اگر دو خط با پارامترهای هادی a، b، c و a'، b'، c' برهم عمود باشند، آنگاه، $aa'+bb'+cc'=۰$. با قرار دادن پارامترهای هادی در رابطهٔ فوق،

$$(۲)(۲)+(-۳)(۱)+(-۱)(۱)=۰.$$

بنابراین خطهای AB و BC برهم عمودند.

۸. زاویهٔ θ بین خط‌های $A(-۳,\ ۲,\ ۴)$، $B(۲,\ ۵,\ -۲)$ و $C(۱,\ -۲,\ ۲)$، $D(۴,\ ۲,\ ۳)$ را به‌دست آورید.

پارامترهای هادی AB عبارتند از، ۲+۳، ۲−۵ و ۴−۲−، یا ۵، ۳ و ۶−.

پارامترهای هادی CD عبارتند از، ۱−۴، ۲+۲ و ۲−۳، یا ۳، ۴ و ۱.

کسینوسهای هادی AB عبارتند از:

$$\cos\alpha=\frac{۵}{\sqrt{۲۵+۹+۳۶}}=\frac{۵}{\sqrt{۷۰}}\ ,\ \cos\beta=\frac{۳}{\sqrt{۷۰}}\ ,\ \cos\gamma=\frac{-۶}{\sqrt{۷۰}}$$

کسینوسهای هادی CD عبارتند از:

$$\cos\alpha_۱=\frac{۳}{\sqrt{۹+۱۶+۱}}=\frac{۳}{\sqrt{۲۶}}\ ,\ \cos\beta_۱=\frac{۴}{\sqrt{۲۶}},\ \cos\gamma_۱=\frac{۱}{\sqrt{۲۶}}$$

بنابراین:

$$\cos\theta=\cos\alpha\cos\alpha_۱+\cos\beta\cos\beta_۱+\cos\gamma\cos\gamma_۱$$

$$=\frac{۵}{\sqrt{۷۰}}\times\frac{۳}{\sqrt{۲۶}}+\frac{۳}{\sqrt{۷۰}}\times\frac{۴}{\sqrt{۲۶}}-\frac{۶}{\sqrt{۷۰}}\times\frac{۱}{\sqrt{۲۶}}=۰٫۴۹۲۲۵$$

و $\theta=۶۰^\circ ۳۰٫۷'$.

۹. اگر رأسهای مثلثی نقطه‌های $A(۳,\ -۱,\ ۴)$، $B(۱,\ ۲,\ -۴)$ و $C(-۳,\ ۲,\ ۱)$ باشند، زاویه‌های داخلی مثلث را به‌دست آورید.

کسینوسهای هادی AB، $\left(\frac{-۲}{\sqrt{۷۷}},\ \frac{۳}{\sqrt{۷۷}},\ \frac{-۸}{\sqrt{۷۷}}\right)$.

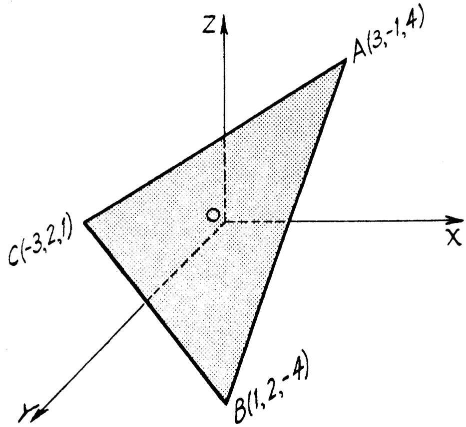
کسینوسهای هادی BC، $\left(\frac{-۴}{\sqrt{۴۱}},\ ۰,\ \frac{۵}{\sqrt{۴۱}}\right)$.

کسینوسهای هادی AC، $\left(\frac{-۲}{\sqrt{۶}},\ \frac{۱}{\sqrt{۶}},\ \frac{-۱}{\sqrt{۶}}\right)$.

تذکر. کسینوسهای هادی AB قرینهٔ کسینوسهای هادی BA است.

$$\cos A=\frac{-۲}{\sqrt{۷۷}}\times\frac{-۲}{\sqrt{۶}}+\frac{۳}{\sqrt{۷۷}}\times\frac{۱}{\sqrt{۶}}+\frac{-۸}{\sqrt{۷۷}}\times\frac{-۱}{\sqrt{۶}}=\frac{۱۵}{\sqrt{۴۶۲}}،$$

$A=۴۵^\circ ۴۴٫۷'$.



$$\cos B=\frac{۲}{\sqrt{۷۷}}\times\frac{-۴}{\sqrt{۴۱}}+\frac{-۳}{\sqrt{۷۷}}\times ۰+\frac{۸}{\sqrt{۷۷}}\times\frac{۵}{\sqrt{۴۱}}=\frac{۳۲}{\sqrt{۳۱۵۷}}$$

$B=۵۵°۱۶ر۹'$.

$\cos C=\frac{۴}{\sqrt{۴۱}}\times\frac{۲}{\sqrt{۶}}+۰+\frac{-۵}{\sqrt{۴۱}}\times\frac{۱}{\sqrt{۶}}=\frac{۳}{\sqrt{۲۴۶}}$، $C=۷۸°۵۸ر۴'$.

$A+B+C=۱۸۰°$.

۱۰. مطلوب است تعیین مساحت مثلث مسئلهٔ ۹.

بنا به‌مثلثات، اگر دوضلع وزاویهٔ بین آنها از مثلثی معلوم باشد، مثلاً، اگر اضلاع b و c وزاویهٔ A معلوم باشد، $\frac{۱}{۲}bc\sin A=$ مساحت مثلث. طول AB، یا c برابر $\sqrt{۷۷}$ وطول AC، یا b برابر $۳\sqrt{۶}$ است.

واحد سطح ۲۳ر۱ $=\frac{۱}{۲}(۳\sqrt{۶})(\sqrt{۷۷})\sin ۴۵°۴۴ر۷'=$ مساحت مثلث.

۱۱. معادلهٔ مکان‌هندسی نقطه‌ای را به‌دست‌آورید که به‌فاصلهٔ r واحدازنقطهٔ $(x_۰, y_۰, z_۰)$ است.

$$\sqrt{(x-x_۰)^۲+(y-y_۰)^۲+(z-z_۰)^۲}=r$$

یا
$$(x-x_۰)^۲+(y-y_۰)^۲+(z-z_۰)^۲=r^۲$$

که معادلهٔ کره‌ای به‌مرکز $(x_۰, y_۰, z_۰)$ و به‌شعاع r است.

صورت کلی معادلهٔ کره عبارت است از:

$$x^۲+y^۲+z^۲+dx+ey+fz+g=۰$$

۰۱۲ معادلهٔ کره‌ای را به‌دست آورید که بر صفحهٔ xy مماس و مرکز آن $(۲, -۲, ۳)$ باشد.

چون کره بر صفحهٔ xy مماس است، بنابراین شعاع آن برابر ۳ است. پس:

$$\sqrt{(x-۲)^۲+(y+۲)^۲+(z-۳)^۲}=۳$$

اگر طرفین تساوی را به‌توان‌دو برسانیم وسپس ساده کنیم، داریم:

$$x^۲+y^۲+z^۲-۴x+۴y-۶z+۸=۰$$

۰۱۳ مختصات مرکز و شعاع کره به‌معادلهٔ $x^۲+y^۲+z^۲-۶x+۴y-۸z=۷$ را به‌دست آورید.

عبارت را به‌صورت مربع کامل درمی‌آوریم:

$$x^۲-۶x+۹+y^۲+۴y+۴+z^۲-۸z+۱۶=۳۶$$

یا

$$(x-۳)^۲+(y+۲)^۲+(z-۴)^۲=۳۶$$

پس از مقایسه با رابطهٔ $(x-x_۰)^۲+(y-y_۰)^۲+(z-z_۰)^۲=r^۲$، نتیجه می‌گیریم که مرکز کره نقطهٔ $(۳, -۲, ۴)$ وشعاع آن ۶ است.

۰۱۴ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را به‌دست آورید که فاصلهٔ آن از نقطهٔ $(۲, -۳, ۴)$ دوبرابر فاصله‌اش از نقطهٔ $(-۱, ۲, -۲)$ باشد.

فرض می‌کنیم $P(x, y, z)$ نقطه‌ای دلخواه روی مکان موردنظر باشد. آنگاه:

$$\sqrt{(x-۲)^۲+(y+۳)^۲+(z-۴)^۲}=۲\sqrt{(x+۱)^۲+(y-۲)^۲+(z+۲)^۲}$$

طرفین تساوی را به‌توان‌دو می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$۳x^۲+۳y^۲+۳z^۲+۱۲x-۲۲y+۲۴z+۷=۰$$

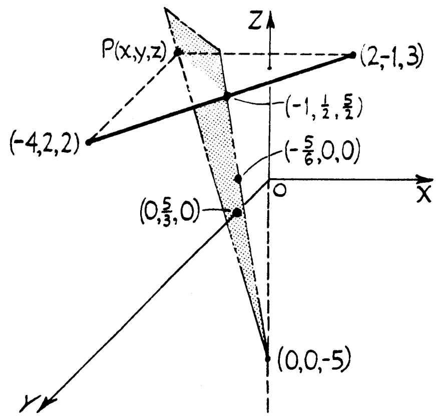
که کره‌ای است به‌مرکز $\left(-۲, \frac{۱۱}{۳}, -۴\right)$ وشعاع $r=\frac{۲}{۳}\sqrt{۷۰}$.

۰۱۵ مطلوب است معادلهٔ عمودمنصف خطی که از اتصال دونقطهٔ $(۲, -۱, ۳)$ و $(-۴, ۲, ۲)$ به‌وجود می‌آید.

اگر $P(x, y, z)$ نقطه‌ای دلخواه روی مکان مطلوب باشد:

$$\sqrt{(x+۴)^۲+(y-۲)^۲+(z-۲)^۲}=\sqrt{(x-۲)^۲+(y+۱)^۲+(z-۳)^۲}$$

طرفین تساوی را به‌توان‌دو می‌رسانیم و ساده می‌کنیم، $۶x-۳y+z+۵=۰$.

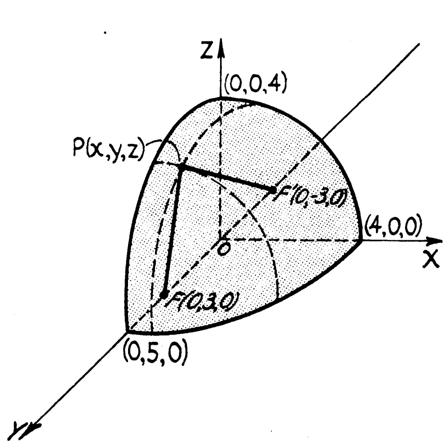


این معادلهٔ صفحه‌ای است که هرنقطهٔ واقع بر آن از دونقطهٔ داده شده به یک فاصله است، صفحه، محورهای مختصات را درنقطه‌های $\left(-\frac{۵}{۶}, ۰, ۰\right)$، $\left(۰, \frac{۵}{۳}, ۰\right)$ و $(۰, ۰, -۵)$ و خط را در نقطهٔ $\left(-۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۲}\right)$ قطع می‌کند.

۱۶. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را به‌دست آورید که مجموع فاصله‌های آن از دونقطهٔ $(۰, ۳, ۰)$ و $(۰, -۳, ۰)$ برابر ۱۰ باشد.

فرض می‌کنیم $P(x, y, z)$ نقطه‌ای دلخواه واقع برمکان هندسی باشد. آنگاه، $FP+PF'=۱۰$، یا:

$$\sqrt{(x-۰)^۲+(y-۳)^۲+(z-۰)^۲}+\sqrt{(x-۰)^۲+(y+۳)^۲+(z-۰)^۲}=۱۰$$



با انتقال یك رادیکال به‌طرف دیگر تساوی و مربع نمودن و دسته‌بندی جملات، نتیجه می‌شود، $۳y+۲۵=۵\sqrt{x^۲+y^۲+۶y+۹+z^۲}$.

عبارت فوق را به‌توان‌دو می‌رسانیم وسپس ساده می‌کنیم:

$$۲۵x^۲+۱۶y^۲+۲۵z^۲=۴۰۰$$

معادلهٔ بالا، معادلهٔ یك بیضیگون به‌مرکز مبدأ مختصات است.

۱۷. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را به‌دست‌آورید که تفاضل فاصله‌های آن از نقطهٔ $(۴, ۰, ۰)$ ونقطهٔ $(-۴, ۰, ۰)$ برابر ۶ باشد.

فرض‌کنید (x, y, z) نقطه‌ای دلخواه روی مکان هندسی باشد. آنگاه:

$$\sqrt{(x-۴)^۲+(y-۰)^۲+(z-۰)^۲}-\sqrt{(x+۴)^۲+(y-۰)^۲+(z-۰)^۲}=۶$$

یا $$\sqrt{x^۲-۸x+۱۶+y^۲+z^۲}=۶+\sqrt{x^۲+۸x+۱۶+y^۲+z^۲}$$

اگر عبارتهای فوق را به‌توان دو برسانیم وساده‌کنیم:

$$۴x+۹=-۳\sqrt{x^۲+۸x+۱۶+y^۲+z^۲}$$

مجدداً به‌توان‌دو می‌رسانیم وسپس ساده می‌کنیم، $۷x^۲-۹y^۲-۹z^۲=۶۳$، که معادلهٔ یك هذلولیگون دوار حول محور xهاست.

۱۸. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را به‌دست‌آورید که فاصله‌اش از محور zها سه‌برابر فاصله‌اش از نقطهٔ $(-۱, ۲, -۳)$ است.

$$\sqrt{x^۲+y^۲}=۳\sqrt{(x+۱)^۲+(y-۲)^۲+(z+۳)^۲}$$

با توان‌دو رساندن و ساده‌کردن آن:

$$۸x^۲+۸y^۲+۹z^۲+۱۸x-۳۶y+۵۴z+۱۲۶=۰$$

که معادلهٔ یك بیضیگون است.

۱۹. ثابت‌کنید سه‌نقطهٔ $A(-۲, ۰, ۳)$، $B(۳, ۱۰, -۷)$ و $C(۱, ۶, -۳)$ بر یك استقامتند.

پارامترهای هادی AB برابراست با ۵، ۱۰ و ۱۰-، یا ۱، ۲ و ۲-.

پارامترهای هادی BC برابر است با ۲ −، ۴ − و۴، یا ۱ −، ۲ − و ۲.

چون پارامترهای هادی با هم متناسبند، خطها یا با هم موازیند یا بریک استقامتند. اما نقطهٔ B در هردوخط مشترک است، بنابراین AB به BC متصل است وسه نقطه بریک استقامتند.

۲۰. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را به‌دست آورید که از نقطه‌های $(۱ ,۳ ,۸)$، $(−۶ ,−۴ ,۲)$ و $(۳ ,۲ ,۱)$ به‌یك فاصله باشد.

فرض کنید (x, y, z) نقطه‌ای دلخواه صادق درشرایط مسئله باشد. آنگاه:

$$(x-۱)^۲+(y-۳)^۲+(z-۸)^۲=(x+۶)^۲+(y+۴)^۲+(z-۲)^۲ \quad (۱)$$

$$(x-۱)^۲+(y-۳)^۲+(z-۸)^۲=(x-۳)^۲+(y-۲)^۲+(z-۱)^۲ \quad (۲)$$

اگر عبارتها را بسط دهیم و ساده‌کنیم، نتیجه می گیریم:

$$۷x+۷y+۶z-۹=۰ \quad (۱)$$

$$۲x-y-۷z+۳۰=۰ \quad (۲)$$

جواب: $۷x+۷y+۶z-۹=۰$ و $۲x-y-۷z+۳۰=۰$.

۲۱. نشان دهید مثلث $A(۳, ۵, -۴)$، $B(-۱, ۱, ۲)$، $C(-۵, -۵, -۲)$ متساوی‌الساقین است.

$$\text{طول } AB=\sqrt{(۳+۱)^۲+(۵-۱)^۲+(-۴-۲)^۲}=۲\sqrt{۱۷}$$

$$\text{طول } BC=\sqrt{(-۵+۱)^۲+(-۵-۱)^۲+(-۲-۲)^۲}=۲\sqrt{۱۷}$$

$$\text{طول } AC=\sqrt{(-۵-۳)^۲+(-۵-۵)^۲+(-۲+۴)^۲}=۲\sqrt{۴۲}$$

چون $AB=BC=۲\sqrt{۱۷}$، مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۲۲. با دو روش مختلف، ثابت کنید نقطه‌های $A(۵, ۱, ۵)$، $B(۴, ۳, ۲)$ و $C(-۳, -۲, ۱)$ رأسهای مثلثی قائم‌الزاویه هستند.

۱. بااستفاده از قضیهٔ فیثاغورث:

$$AB=\sqrt{(۵-۴)^۲+(۱-۳)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۱۴}$$

$$BC=\sqrt{(۴+۳)^۲+(۳+۲)^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۷۵}$$

$$CA=\sqrt{(-۳-۵)^۲+(-۲-۱)^۲+(۱-۵)^۲}=\sqrt{۸۹}$$

$$(AB)^۲+(BC)^۲=(CA)^۲ \text{، یا } ۱۴+۷۵=۸۹$$

۲. ثابت می‌کنیم AB بر BC عمود است.

کسینوسهای هادی AB، $\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}$، $\frac{-۲}{\sqrt{۱۴}}$ و $\frac{۳}{\sqrt{۱۴}}$ و همچنین کسینوسهای هادی BC، $\frac{۷}{۵\sqrt{۳}}$، $\frac{۵}{۵\sqrt{۳}}$ و $\frac{۱}{۵\sqrt{۳}}$ هستند.

$$\cos B=\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}\times\frac{۷}{۵\sqrt{۳}}-\frac{۲}{\sqrt{۱۴}}\times\frac{۵}{۵\sqrt{۳}}+\frac{۳}{\sqrt{۱۴}}\times\frac{۱}{۵\sqrt{۳}}=\frac{۷-۱۰+۳}{۵\sqrt{۴۲}}=۰$$

به‌عبارت دیگر مجموع حاصلضربهای پارامترهای هادی دوخط برابراست باصفر.

$$۷(۱)+۵(-۲)+۱(۳)=۰$$

مسئله‌های تکمیلی

۱. نقطه‌های (۳,۲,۲)، (۲,۱,−۴)، (۴,۲,−۳)، (۳,۴,−۵)، (۲,−۳,−۴)، (۴,۴,۰)، (۲,۰,۴)، (۳,۰,۰)، (۲,۰,−۴) و (۳,۴,۰) را رسم کنید.

۲. فاصلهٔ هریك ازنقطه‌های مسئلهٔ یك را ازمبدأ مختصات تعیین کنید.

جواب: $\sqrt{۱۷}$، $\sqrt{۲۱}$، $\sqrt{۲۹}$، $۵\sqrt{۲}$، $\sqrt{۲۹}$، $۴\sqrt{۲}$، $۲\sqrt{۵}$، ۳، $۲\sqrt{۵}$، ۵.

۳. فاصلهٔ بین زوج نقطه‌های زیررا پیدا کنید.

الف) (۳, ۵, ۲) و (۱, ۲, −۳). جواب: $\sqrt{۳۸}$.

ب) (۰, ۳, ۰) و (۲, ۰, ۶). جواب: ۷.

ج) (۳, ۲−, ۴−) و (۵, ۳, ۳). جواب: $\sqrt{۷۸}$.

۴. محیط هریك از مثلثهای زیررا تعیین کنید.

الف) (۱, ۶, ۴)، (۰, ۴, ۶)، (۳, ۳, ۲−). جواب: $۱۰+\sqrt{۷۴}$.

ب) (۲−, ۱, ۳−)، (۳−, ۵, ۵)، (۱−, ۱−, ۴−).

جواب: $۲۰+\sqrt{۶}$.

ج) (۱, ۴, ۸)، (۳, ۳, ۶)، (۵, ۹, ۳−). جواب: $۱۴+۹\sqrt{۲}$.

۵. نقطه‌های زیررا رسم کنید وشعاع حامل ازمبدأ مختصات وکسینوسهای هادی هر نقطه را به‌دست آورید.

الف) $(۳\,,۲\,,۶-)$. جواب: ۷، $\cos\alpha=\frac{-۶}{۷}$، $\cos\beta=\frac{۲}{۷}$، $\cos\gamma=\frac{۳}{۷}$.

ب) $(۹\,,۲-\,,۶)$. جواب: ۱۱، $\cos\alpha=\frac{۶}{۱۱}$، $\cos\beta=\frac{-۲}{۱۱}$، $\cos\gamma=\frac{۹}{۱۱}$.

ج) $(۸\,,۴\,,۸-)$. جواب: ۱۲، $\cos\alpha=\frac{-۲}{۳}$، $\cos\beta=\frac{۱}{۳}$، $\cos\gamma=\frac{۲}{۳}$.

د) $(۰\,,۴\,,۳)$. جواب: ۵، $\cos\alpha=\frac{۳}{۵}$، $\cos\beta=\frac{۴}{۵}$، $\cos\gamma=۰$.

ه) $(۴\,,۴\,,۴)$. جواب: $۴\sqrt{۳}$، $\cos\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$، $\cos\beta=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$، $\cos\gamma=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$.

۶. زاویه‌های هادی نقطه‌های (الف)، (د) و (ه) مسئلهٔ ۵ را به‌دست آورید.

جواب: الف) $\alpha=۱۴۸^\circ ۵۹{,}۸'$، $\beta=۷۳^\circ ۲۳{,}۹'$، $\gamma=۶۴^\circ ۳۷{,}۴'$.

د) $\alpha=۵۳^\circ ۷{,}۸'$، $\beta=۳۶^\circ ۵۲{,}۲'$، $\gamma=۹۰^\circ$.

ه) $\alpha=\beta=\gamma=۵۴^\circ ۴۴{,}۱'$.

۷. طول میانه‌های مثلثهای زیر را به‌دست آورید. (جوابها به‌ترتیب برای میانه‌های مرسوم از رأسهای A، B و C بیان شده است.)

الف) $A(۱\,,۳-\,,۲)$، $B(۳\,,۵\,,۶-)$، $C(۷-\,,۷\,,۸)$.

جواب: $\sqrt{۹۱}$، $\sqrt{۱۶۶}$، $\sqrt{۲۱۷}$.

ب) $A(۴-\,,۵\,,۷)$، $B(۲-\,,۹-\,,۳)$، $C(۶\,,۳\,,۵-)$.

جواب: $۲\sqrt{۴۱}$، $\sqrt{۱۸۲}$، $\sqrt{۲۰۶}$.

ج) $A(۶\,,۴\,,۷-)$، $B(۲-\,,۶\,,۳)$، $C(۸\,,۸-\,,۱)$.

جواب: $\sqrt{۱۱۵}$، $\sqrt{۱۸۱}$، $\sqrt{۲۱۴}$.

۸. درهریك از تمرینهای زیر کسینوسهای هادی خطی را که از نقطهٔ اول به‌نقطهٔ دوم رسم می‌شود، به‌دست آورید.

الف) $(۷\,,۱\,,۴-)$ $(۲\,,۳-\,,۲)$.

جواب: $\frac{۶\sqrt{۷۷}}{۷۷}$، $-\frac{۴\sqrt{۷۷}}{۷۷}$، $-\frac{۵\sqrt{۷۷}}{۷۷}$.

ب) $(۴-\,,۱\,,۷)$، $(۳-\,,۲-\,,۵)$.

جواب: $-\frac{\sqrt{۱۴}}{۷}$، $-\frac{۳\sqrt{۱۴}}{۱۴}$، $\frac{\sqrt{۱۴}}{۱۴}$.

ج) $(۴-\,,۵\,,۶-)$، $(۴-\,,۲-\,,۵-)$.

جواب: $\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$، $-\frac{۷\sqrt{۲}}{۱۰}$، ۰.

د) $(۵, -۲, ۳)$، $(-۲, ۳, ۷)$.

جواب: $-\frac{۷\sqrt{۱۰}}{۳۰}$، $\frac{\sqrt{۱۰}}{۶}$، $\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۱۵}$.

ه) $(۳, -۵, ۴)$، $(-۶, ۱, ۲)$.

جواب: $-\frac{۹}{۱۱}$، $\frac{۶}{۱۱}$، $-\frac{۲}{۱۱}$.

۹. یک مجموعه پارامترهای هادی برای خط گذرنده از هر جفت نقطه‌های زیر به‌دست آورید.

الف) $(۴, ۷, ۳)$، $(-۵, -۲, ۶)$. جواب: ۳، ۳، -۱.

ب) $(-۲, ۳, -۴)$، $(۱, ۳, ۲)$. جواب: -۳، ۰، -۶.

ج) $(۱۱, ۲, -۳)$، $(۴, -۵, ۴)$. جواب: ۱، ۱، -۱.

۱۰. زاویهٔ نابزرگتر از ۹۰° بین خطهای حاصل از اتصال زوج نقطه‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $(۸, ۲, ۰)$، $(۴, ۶, -۷)$؛ $(-۳, ۱, ۲)$، $(-۹, -۲, ۴)$.

جواب: ۸۸° ۱۰ر۸′.

ب) $(۴, -۲, ۳)$، $(۶, ۱, ۷)$؛ $(۴, -۲, ۳)$، $(۵, ۴, -۲)$.

جواب: ۹۰°.

ج) $(۶, -۲, ۰)$، $(۵, ۴, ۲\sqrt{۳})$؛ $(۵, ۳, ۱)$، $(۷, -۱, ۵)$.

جواب: ۷۳° ۱۱ر۶′.

۱۱. زاویه‌های داخلی مثلثی را به‌دست آورید که رأسهای آن عبارتند از،

$(-۱, -۳, -۴)$، $(۴, -۲, -۷)$ و $(۲, ۳, -۸)$.

جواب: ۸۶° ۲۷ر۷′، ۴۴° ۲۵ر۴′، ۴۹° ۶ر۹′.

۱۲. مساحت مثلث مسئلهٔ ۱۱ را تعیین کنید. جواب: ۱۷ر۱۶ واحد سطح.

۱۳. نقطهٔ تلاقی میانه‌های هریک از مثلثهای زیر را بیابید.

الف) $(-۱, -۳, -۴)$، $(۴, -۲, -۷)$، $(۲, ۳, -۸)$.

جواب: $\left(\frac{۵}{۳}, -\frac{۲}{۳}, -\frac{۱۹}{۳}\right)$.

ب) $(۲, ۱, ۴)$، $(۳, -۱, ۲)$، $(۵, ۰, ۶)$.

جواب: $\left(\frac{۱۰}{۳}, ۰, ۴\right)$.

ج) $(۴, ۳, -۲)$، $(۷, -۱, ۴)$، $(-۲, ۱, -۴)$.

جواب: $\left(۳, ۱, -\frac{۲}{۳}\right)$.

۱۴. نشان دهید مثلثی با رأسهای $(۶, ۱۰, ۱۰)$، $(۱, ۰, -۵)$ و $(۶, -۱۰, ۰)$ مثلثی قائم‌الزاویه است. مساحت مثلث را محاسبه کنید.

جواب: $۲۵\sqrt{۲۱}$ واحد سطح

۱۵. ثابت کنید مثلثی با رأسهای $(۴, ۴, ۶)$، $(۱۰, -۲, ۴)$ و $(-۲, ۰, ۲)$، مثلث متساوی‌الساقین است. مساحت مثلث را تعیین کنید.

جواب: $۶\sqrt{۱۹}$ واحد سطح

۱۶. از دو طریق ثابت کنید نقطه‌های $(-۱۱, ۸, ۴)$، $(-۱, -۷, -۱)$ و $(۹, -۲, ۴)$ رأسهای یك مثلث قائم‌الزاویه هستند.

۱۷. ثابت کنید نقطه‌های $(۲, -۱, ۰)$، $(۰, -۱, -۱)$، $(۱, ۱, -۳)$ و $(۳, ۱, -۲)$ رأسهای یك مستطیل هستند.

۱۸. ثابت کنید نقطه‌های $(۴, ۲, ۴)$، $(۱۰, ۲, -۲)$ و $(۲, ۰, -۴)$ رأسهای یك مثلث متساوی‌الاضلاع هستند.

۱۹. با دو روش متفاوت نشان دهید نقطه‌های $(۱, -۱, ۳)$؛ $(۲, -۴, ۵)$ و $(۵, -۱۳, ۱۱)$ بریك استقامتند.

۲۰. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را به‌دست آورید که از نقطه‌های $(۱, -۲, ۳)$ و $(-۳, ۴, ۲)$ به‌یك فاصله باشد.

جواب: $۸x - ۱۲y + ۲z + ۱۵ = ۰$.

۲۱. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را به‌دست آورید که فاصله‌اش ازنقطهٔ $(-۲, ۳, ۴)$ دو برابر فاصله‌اش ازنقطهٔ $(۳, -۱, -۲)$ باشد.

جواب: $۳x^{۲} + ۳y^{۲} + ۳z^{۲} - ۲۸x + ۱۴y + ۲۴z + ۲۷ = ۰$، یك کره است.

۲۲. معادلهٔ کره‌ای به‌شعاع ۵ ومرکز $(-۲, ۳, ۵)$ را پیدا کنید.

جواب: $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} + ۴x - ۶y - ۱۰z + ۱۳ = ۰$.

۲۳. پارامترهای هادی دوخط ۲، -۱، ۴ و -۳، ۲، ۲ هستند. ثابت کنید این دوخط برهم عمودند.

۲۴. مقدار k را طوری تعیین کنید که خطهایی که از اتصال نقطه‌های $P_1(k, 1, -1)$ و $P_2(2k, 0, 2)$ به‌وجود می‌آید، بر خط گذرنده از P_2 و $P_3(2+2k, k, 1)$ عمود شود. جواب: $k=3$.

۲۵. پارامترهای هادی خطی که بردو خط با پارامترهای هادی a_1، b_1، c_1 و a_2، b_2، c_2 عمود است به‌کمک سه دترمینان زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}،\quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}،\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

پارامترهای هادی خط عمود بردوخط با پارامترهای هادی زیررا به‌دست آورید:

الف) ۱، ۳، −۲ و −۲، ۲، ۴. جواب: ۱۶، ۰، ۸ یا ۲، ۰، ۱.

ب) −۳، ۴، ۱ و ۲، −۶، ۵. جواب: ۲۶، ۱۷، ۱۰.

ج) ۰، −۲، ۱ و ۴، ۰، −۳. جواب: ۳، ۲، ۴.

د) ۵، ۳، −۳ و −۱، ۱، −۲. جواب: −۳، ۱۳، ۸.

۲۶. پارامترهای هادی خط عمود بردو خط، که به‌وسیلهٔ زوج نقطه‌های $(2, 3, -4)$، $(-3, 3, -2)$ و $(-1, 4, 2)$، $(3, 5, 1)$، معین می‌شوند را به‌دست آورید.
جواب: −۲، ۳، −۵.

۲۷. کسینوسهای هادی خط عمود برهریک از دوخط با پارامترهای هادی ۳، ۴، ۱ و ۶، ۲، −۱ را به‌دست آورید. جواب: $\frac{2}{7}$، $-\frac{3}{7}$، $\frac{6}{7}$.

۲۸. زاویهٔ بین خط L_1 با پارامترهای هادی x، ۳، ۵ و خط L_2 با پارامترهای هادی ۲، −۱، ۲ برابر 45° است، مقدار x را تعیین کنید. جواب: ۴، ۵۲.

۲۹. به‌ازای چه مقداری از x خط مرسوم از دونقطهٔ $(2, 1, 4)$ و $(0, x, 5)$ با خط گذرنده ازنقطه‌های $(1, 1, 2)$ و $(-1, 3, 3)$ موازی است.
جواب: $x=3$.

۳۰. به‌ازای چه مقدار از x خطهای مسئلهٔ ۲۹ برهم عمودند.
جواب: $x=-\frac{3}{2}$.

۳۱. نشان‌دهید نقطه‌های $(3, 3, 3)$، $(-1, 2, 1)$، $(1, 1, 4)$ و $(5, 2, 6)$ رأسهای یك متوازی‌الاضلاع هستند.

۳۲. نشان‌دهید نقطه‌های $(۴, ۲, -۶)$، $(۵, -۳, ۱)$، $(۱۲, ۴, ۵)$ و $(۱۱, ۹, -۲)$ رأسهای یك مستطیل هستند.

۳۳. ثابت کنید خط گذرنده از دونقطهٔ $(۵, ۱, -۲)$ و $(۱۳, -۵, -۴)$ عمودمنصف پاره‌خطی است که نقطه‌های $(-۵, ۲, ۰)$ و $(۹, -۴, ۶)$ را به‌هم مرتبط می‌کند.

۳۴. زاویهٔ بین دو خطی را که نقطه‌های $(۳, ۱, -۲)$، $(۴, ۰, -۴)$ و نقطه‌های $(۴, -۳, ۳)$، $(۶, -۲, ۲)$ را به‌هم متصل می‌کند، حساب کنید.

جواب: $\frac{\pi}{۳}$ رادیان.

۳۵. پارامترهای هادی دوخط، ۳، ۲−، k و ۲−، k، ۴ است. اگرخطها برهم عمود باشند مقدار k را به‌دست آورید. جواب: $k=۳$.

۳۶. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را به‌دست آورید که فاصله‌اش از محور yها برابر فاصله‌اش از نقطهٔ $(۲, ۱, -۱)$ است.

جواب: $y^۲-۲y-۴x+۲z+۶=۰$.

۳۷. مطلوب است معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای که فاصلهٔ آن ازصفحهٔ xy برابر فاصله‌اش ازنقطهٔ $(-۱, ۲, -۳)$ است:

جواب: $x^۲+y^۲+۲x-۴y+۶z+۱۴=۰$.

۳۸. نقطه‌ای چنان حرکت می‌کندکه تفاضل مربعات فاصله‌هایش از محور xها و yها مقداری ثابت است. معادلهٔ مکان هندسی آن را به‌دست‌آورید.

جواب: $y^۲-x^۲=a$.

۳۹. مطلوب است معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای که فاصله‌اش از محور zها برابر فاصله‌اش ازصفحهٔ xy است.

جواب: $x^۲+y^۲-z^۲=۰$، که یك مخروط است.

۴۰. معادلهٔ کره‌ای رابه‌دست‌آوریدکه برصفحهٔ yz مماس ومرکزش $(۳, -۱, ۲)$است.

جواب: $x^۲+y^۲+z^۲-۶x+۲y-۴z+۵=۰$.

۴۱. معادلهٔ کره‌ای به‌شعاع a رابیابیدکه برهرسه‌صفحهٔ مختصات مماس ومرکز آن‌درناحیهٔ اول باشد.

جواب: $x^۲+y^۲+z^۲-۲ax-۲ay-۲az+۲a^۲=۰$.

۴۲. معادلهٔ کره‌ای به‌مرکز (۲, ۲−, ۳) را که از نقطهٔ (۷, ۳−, ۵) می‌گذرد به دست آورید.

جواب: $x^۲+y^۲+z^۲-۴x+۴y-۶z-۱۳=۰$.

۴۳. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را به‌دست آورید که از نقطه‌های (۲−, ۱, ۲−) و (۲, ۲−, ۳) به‌یك فاصله است.

جواب: $۴x-۳y+۵z-۴=۰$.

۴۴. مطلوب است تعیین معادلهٔ صفحه‌ای که عمود منصف پاره‌خطی است که دو نقطهٔ (۲, ۳, ۲−) و (۶, ۵, ۶−) را به‌هم وصل می‌کند.

جواب: $۴x+y-۴z-۲۰=۰$.

۴۵. نقطه‌های $A(۳, ۲, ۰)$ و $B(۲, ۱, -۵)$ مفروضند. نقطهٔ $P(x, y, z)$ طوری حرکت می‌کند که PA بر PB عمود است. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ P.

جواب: $x^۲+y^۲+z^۲-۵x-۳y+۵z+۸=۰$.

۴۶. اگر فاصلهٔ نقطهٔ (x, y, z) تا نقطهٔ (۳, ۱−, ۲) برابر ۴ باشد، مختصات نقطهٔ (x, y, z) درچه معادله‌ای صدق می‌کند.

جواب: $x^۲+y^۲+z^۲-۴x+۲y-۶z-۲=۰$.

۴۷. نقطهٔ (x, y, z) طوری حرکت می‌کند که فاصله‌اش از نقطهٔ (۲, ۳, ۱) سه‌برابر فاصله‌اش ازصفحهٔ xz است، معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ (x, y, z) را به‌دست آورید.

جواب: $x^۲-۸y^۲+z^۲-۲x-۶y-۴z+۱۴=۰$.

۴۸. مرکز وشعاع کره به‌معادلهٔ $x^۲+y^۲+z^۲-۲x+۶y+۲z-۱۴=۰$ را تعیین کنید. جواب: مرکز (۱−, ۳−, ۱)، شعاع ۵.

۴۹. مختصات مرکز وشعاع کره به‌معادلات زیررا تعیین کنید.

الف) $۱۶x^۲+۱۶y^۲+۱۶z^۲-۲۴x+۴۸y-۵=۰$.

جواب: مرکز $\left(\frac{۳}{۴}, -\frac{۳}{۲}, ۰\right)$، $r=\frac{۵\sqrt{۲}}{۴}$.

ب) $x^۲+y^۲+z^۲-۲x-۶y+۴z+۱۴=۰$.

جواب: مرکز (۲−, ۳, ۱)، $r=۰$.

ج) $x^۲+y^۲+z^۲+۴x-۲y-۶z=۰$.

جواب: مرکز (۳, ۱, ۲−)، $r=\sqrt{۱۴}$.

۵۰. معادلهٔ کره‌ای را به‌دست آورید که بر صفحهٔ $x+2=0$ مماس و مرکز آن $(4, -3, 2)$ باشد.
جواب: $x^2+y^2+z^2-8x+6y-4z-7=0$.

۵۱. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بنویسید که طوری حرکت می‌کند که به‌فاصلهٔ
الف) ۴ واحد جلوی صفحهٔ xz قراردارد. جواب: $y=4$.
ب) ۶ واحد پشت صفحهٔ yz قراردارد جواب: $x=-6$.
ج) ۳ واحد پشت صفحهٔ $y-1=0$ قراردارد. جواب: $y+2=0$.
د) ۳ واحد ازمحور zها قراردارد. جواب: $x^2+y^2=9$.

۵۲. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که مجموع فاصله‌های آن از دونقطهٔ $(3, 0, 0)$ و $(-3, 0, 0)$ برابر ۸ است.
جواب: $7x^2+16y^2+16z^2=112$، بیضیگون است.

۵۳. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را تعیین کنید که فاصله‌اش ازنقطهٔ $(-1, 2, -2)$ برابر فاصله‌اش ازمحور zهاست.
جواب: $z^2+4z+2x-4y+9=0$، سهمیگون است.

۵۴. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را به‌دست آورید که فاصله‌اش از $(3, -2, 1)$، سه برابر فاصله‌اش ازصفحهٔ xy است.
جواب: $x^2+y^2-8z^2-6x+4y-2z+14=0$، هذلولیگون است.

۵۵. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را به‌دست آورید که تفاضل فاصله‌های آن از دونقطهٔ $(0, 0, 4)$ و $(0, 0, -4)$ برابر ۶ است.
جواب: $9x^2+9y^2-7z^2+63=0$، هذلولیگون است.

۵۶. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که فاصلهٔ آن ازصفحهٔ yz دوبرابر فاصله‌اش از نقطهٔ $(4, -2, 1)$ است.
جواب: $3x^2+4y^2+4z^2-32x+16y-8z+84=0$، بیضیگون است.

۵۷. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را به دست آورید که فاصله‌اش از نقطهٔ $(0, 0, -2)$ یک‌سوم فاصله‌اش ازصفحهٔ $z+18=0$ است.
جواب: $9x^2+9y^2+8z^2-288=0$، بیضیگون است.

۵۸. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را به‌دست آورید که از صفحهٔ $z=5$ ونقطهٔ $(0, 0, 3)$ به‌یک فاصله است.
جواب: $x^2+y^2+4z-16=0$، سهمیگون است.

۱۳

صفحه

هر صفحه به‌وسیلهٔ معادله‌ای درجه اول برحسب یك یا چند متغیر x، y و z مشخص می‌شود. عکس گزاره نیز درست است، یعنی هر معادلهٔ درجهٔ اول برحسب یك یا چند متغیر x، y و z، معرف یك صفحه است.

معادلهٔ کلی هر صفحه به‌صورت $Ax+By+Cz+D=0$ است، مشروط بر اینکه A، B و C همگی صفر نباشند.

معادلهٔ دسته صفحه‌های گذرنده از نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) عبارت است از:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

خط قائم بر صفحه. اگر a، b و c پارامترهای هادی یك خط باشند، خط بر صفحهٔ $Ax+By+Cz+D=0$ عمود است، اگر وفقط اگر پارامترهای هادی خط متناسب با ضریبهای x، y و z معادلهٔ صفحه باشد. اگر a، b و c، A، B و C همگی مخالف صفر باشند، اگر خط وصفحه برهم عمود باشند، آنگاه رابطهٔ $\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}$ برقرار است.

صفحه‌های موازی و عمود برهم. دو صفحهٔ $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ و

$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ باهم موازیند اگر و فقط اگـــر ضریبهای x، y و z در معادلات مربوط به‌دو صفحه متناسب باشند، یعنی، اگر و فقط اگر $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

دو صفحـــهٔ $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ و $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ بر یکدیگر عمودند اگر وفقط اگر، $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

صورت نرمال معادلهٔ صفحه. صورت نرمال معادلهٔ هرصفحه به‌قرار زیراست:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-P=0$$

که در دستور فوق P فاصلهٔ قائم از مبدأ تـــا صفحه و α، β و γ زاویه‌های هادی خـــط عمود برصفحه هستند.

صورت نرمال معادلهٔ صفحهٔ $Ax+By+Cz+D=0$ عبارت است از:

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

علامت رادیکال مخالف علامت D اختیار می‌شود، به‌قسمی‌که فاصلهٔ قائم P، مثبت گردد.

معادلهٔ صفحه‌ای که نقطه‌های تقاطع آن با محورهای مختصات معلوم باشد. معادلـــهٔ صفحه برحسب‌فاصلهٔ نقاط تقاطع آن بامحورها تا مبدأ مختصات به‌صورت $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ است که‌در آن a، b و c به‌ترتیب‌فاصلهٔ نقطهٔ‌تقاطع صفحه‌بامحور xها، yها و zها تامبدأ‌مختصات است.

فاصلهٔ نقطه از یك‌صفحه. فاصلهٔ عمود بین نقطهٔ (x_1, y_1, z_1) وصفحهٔ

$$Ax+By+Cz+D=0$$

عبارت است از:

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

زاویهٔ بین دوصفحه. زاویهٔ حـــادهٔ θ بیـــن دو صفحهٔ $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ و $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ مطابق دستور زیر تعیین می‌شود:

$$\cos\theta=\left|\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\right|$$

صفحه‌های ویژه. صفحه‌های

$$Ax+By+D=\circ$$

$$By+Cz+D=\circ$$

$$Ax+Cz+D=\circ$$

به‌ترتیب صفحه‌های عمود برصفحه‌های xy، yz و xz را نشان می‌دهند.

صفحه‌های $Ax+D=\circ$، $By+D=\circ$ و $Cz+D=\circ$ به ترتیب نمایشگر صفحه‌های عمود برمحور xها، yها و zها هستند.

مسئله‌های حل شده

۱. معادلهٔ صفحه‌ای را به‌دست آورید که ازنقطهٔ $(۴, -۲, ۱)$ بگذرد و برخطی که پارامترهای هادیش ۷، ۲، ۳− است عمود باشد.

بااستفاده ازرابطهٔ $A(x-x_\circ)+B(y-y_\circ)+C(z-z_\circ)=\circ$ و با این شرط که ضریبها با پارامترهای هادی متناسبند، داریم:

$$۷(x-۴)+۲(y+۲)-۳(z-۱)=\circ$$

یا

$$۷x+۲y-۳z-۲۱=\circ$$

۲. معادلهٔ صفحه‌ای را به‌دست‌آورید که برپاره‌خط از $(-۳, ۲, ۱)$ تا $(۹, ۴, ۳)$ در وسط آن عمود است.

پارامترهای هادی پاره‌خط، ۱۲، ۲، ۲ یا ۶، ۱، ۱ هستند. وسط پاره‌خط نقطهٔ $(۳, ۳, ۲)$ است. پس معادلهٔ صفحه عبارت است از:

$$۶(x-۳)+(y-۳)+(z-۲)=\circ$$

یا

$$۶x+y+z-۲۳=\circ$$

۳. مطلوب است تعیین معادلهٔ صفحه‌ای که از نقطهٔ $(۱, -۲, ۳)$ می‌گذرد وبا صفحهٔ $x-۳y+۲z=\circ$ موازی است.

صفحهٔ مطلوب باید معادله‌ای به‌صورت $x-۳y+۲z=k$ داشته باشد. چون نقطهٔ $(۱, -۲, ۳)$ برصفحهٔ موردنظر قراردارد، بنابراین برای تعیین مقدار k مختصات نقطهٔ $(۱, -۲, ۳)$ را در معادله قرار می‌دهیم. $k=(۳)۲+(۲-)۳-۱$، یا $k=۱۳$. معادلهٔ صفحهٔ مطلوب عبارت است از، $x-۳y+۲z=۱۳$.

۴. معادلهٔ صفحه‌ای را به‌دست آورید که از نقطهٔ $(۱, ۰, -۲)$ بگذرد و بر هریك از صفحه‌های $۲x+y-z=۲$ و $x-y-z=۳$ عمود باشد.

معادلهٔ دسته صفحه‌هایی که از نقطهٔ $(۱, ۰, -۲)$ می‌گذرند به‌صورت:

$$A(x-۱)+B(y-۰)+C(z+۲)=۰$$

است. برای اینکه این صفحه بردو صفحهٔ فوق عمود باشد باید $۲A+B-C=۰$ و $A-B-C=۰$. پس ازحل دستگاه $A=-۲B$ و $C=-۳B$.

معادلهٔ‌مطلوب‌عبارت‌است‌از، $-۲B(x-۱)+B(y-۰)-۳B(z+۲)=۰$، یا $۲x-y+۳z+۴=۰$.

۵. معادلهٔ صفحهٔ گذرنده از نقطه‌های $(۱, ۱, -۱)$، $(-۲, -۲, ۲)$ و $(۱, -۱, ۲)$ را به‌دست آورید.

بااستفاده از رابطهٔ $Ax+By+Cz+D=۰$ وبا قراردادن مختصات نقطه‌ها در آن، داریم:

$$A+B-C+D=۰$$

$$-۲A-۲B+۲C+D=۰$$

$$A-B+۲C+D=۰$$

پس ازحل‌دستگاه‌نسبت به A، B، C و D، نتیجه‌می‌گیریم، $D=۰$، $A=-\frac{C}{۲}$، $B=\frac{۳C}{۲}$ و $C=C$. این مقادیررا درمعادلهٔ صفحه قرار می‌دهیم وطرفین تساوی را بر C تقسیم می‌کنیم، معادلهٔ $x-۳y-۲z=۰$ حاصل می‌شود.

روش دیگر. معادلهٔ هرصفحه که از سه‌نقطهٔ $(x_۱, y_۱, z_۱)$، $(x_۲, y_۲, z_۲)$ و $(x_۳, y_۳, z_۳)$ می‌گذرد، با بسط دترمینان زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & ۱ \\ x_۱ & y_۱ & z_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & z_۲ & ۱ \\ x_۳ & y_۳ & z_۳ & ۱ \end{vmatrix}=۰$$

۶. مکان هندسی معادلهٔ $۲x+۳y+۶z=۱۲$ را مورد بحث وبررسی قراردهید.

چون معادله از درجهٔ اول است، بنابراین نمایشگر یك صفحه است.

پارامترهای هادی خط قائم بر صفحه عبارتند از، ۲، ۳، ۶. کسینوسهای هادی خط قائم $\cos\alpha=\frac{۲}{۷}$، $\cos\beta=\frac{۳}{۷}$، $\cos\gamma=\frac{۶}{۷}$ هستند.

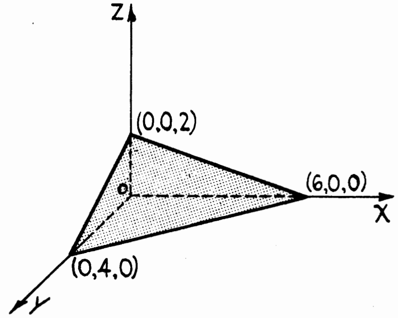
نقطه‌های $(۶,\ ۰,\ ۰)$، $(۰,\ ۴,\ ۰)$، $(۰,\ ۰,\ ۲)$ محل برخورد صفحه با محورهای مختصات هستند.

خطهایی که در آنها صفحه، صفحه‌های مختصات را قطع می‌کند ردها یا اثرهای صفحه نامیده می‌شوند. برای تعیین معادلات ردهای صفحه، چنین عمل می‌کنیم: در صفحهٔ xy، $z=۰$ است؛ پس، معادلهٔ رد در صفحهٔ xy، $۲x+۳y=۱۲$ است. به‌همین ترتیب، برای یافتن رد واقع بر صفحهٔ xz، y را مساوی صفر قرار می‌دهیم؛ درنتیجه، این رد به صورت $۲x+۶z=۱۲$، یا $x+۳z=۶$ است. معادلهٔ رد در صفحهٔ yz نیز $۳y+۶z=۱۲$، یا $y+۲z=۴$ است. نقطهٔ تقاطع صفحه با صفحه‌های مختصات و ردهای صفحه درشکل زیر نشان داده شده است.

طول خط عمود ازمبدأ یعنی فاصلهٔ ازمبدأ مختصات تا صفحه را از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آوریم:

$$d=\frac{Ax_۱+By_۱+Cz_۱+D}{\pm\sqrt{A^۲+B^۲+C^۲}}$$

$$|d|=\left|\frac{۲(۰)+۳(۰)+۶(۰)-۱۲}{۷}\right|=\frac{۱۲}{۷}$$



۷. فاصلهٔ عمود ازنقطهٔ $(-۲,\ ۲,\ ۳)$ را تا صفحهٔ $۸x-۴y-z-۸=۰$ به دست آورید.

صورت نرمال معادله عبارت است از:

$$\frac{۸x-۴y-z-۸}{\sqrt{۶۴+۱۶+۱}}=\frac{۸x-۴y-z-۸}{۹}=۰$$

با قراردادن مختصات نقطه، $d=\frac{۸(-۲)-۴(۲)-۱(۳)-۸}{۹}=-\frac{۳۵}{۹}$

علامت منفی نشان می‌دهد که نقطهٔ $(۳ ,۲ ,۲-)$ ومبدأ مختصات دریك طرف صفحه قرار دارند.

۸. کوچکترین زاویهٔ بین دوصفحهٔ

$$۳x+۲y-۵z-۴=۰ \qquad (۱)$$

$$۲x-۳y+۵z-۸=۰ \qquad (۲)$$

را محاسبه کنید.

کسینوسهای هادی خطهای قائم برصفحه‌ها عبارتند از:

$$\cos\alpha_۱=\frac{۳}{\sqrt{۳۸}},\ \cos\beta_۱=\frac{۲}{\sqrt{۳۸}},\ \cos\gamma_۱=-\frac{۵}{\sqrt{۳۸}}$$

$$\cos\alpha_۲=\frac{۲}{\sqrt{۳۸}},\ \cos\beta_۲=\frac{-۳}{\sqrt{۳۸}},\ \cos\gamma_۲=\frac{۵}{\sqrt{۳۸}}$$

اگر θ زاویهٔ بین دوخط قائم باشد، آنگاه:

$$\cos\theta=\left|\frac{۳}{\sqrt{۳۸}}\times\frac{۲}{\sqrt{۳۸}}-\frac{۲}{\sqrt{۳۸}}\times\frac{۳}{\sqrt{۳۸}}-\frac{۵}{\sqrt{۳۸}}\times\frac{۵}{\sqrt{۳۸}}\right|=\frac{۲۵}{۳۸}$$

و $\theta=۴۸^\circ ۵۱' ۶'$

۹. نقطهٔ تقاطع صفحه‌های $x+۲y-z=۶$ ، $۲x-y+۳z=-۱۳$ و $۳x-۲y+۳z=-۱۶$ را به‌دست آورید.

در اینجا سه‌معادلهٔ خطی داریم. حل این دستگاه، مختصات نقطهٔ تلاقی سه‌صفحه را به‌دست می‌دهد.

نقطهٔ مطلوب $(۳- ,۲ ,۱-)$ است.

۱۰. معادلهٔ صفحه‌ای را به‌دست آورید که ازفصل مشترك صفحه‌های $۳x+y-۵z+۷=۰$ و $x-۲y+۴z-۳=۰$ ونقطهٔ $(۳- ,۲ ,۴-)$ بگذرد.

معادلهٔ هرصفحه‌ای که ازفصل مشترك دوصفحهٔ فوق می‌گذرد عبارت است از:

$$۳x+y-۵z+۷+k(x-۲y+۴z-۳)=۰$$

برای تعیین صفحه‌ای از این دسته صفحه که از نقطهٔ $(-۳, ۲, -۴)$ می‌گذرد، مختصات نقطه یعنی -۳، ۲ و -۴ را به‌ترتیب به‌جای x، y و z دررابطهٔ بالاقرار می‌دهیم. $-۹+۲+۲۰+۷+k(-۳-۴-۱۶-۳)=۰$، درنتیجه $k=\frac{۱۰}{۱۳}$ به‌دست می‌آید.

اگرمقدار k را در معادلهٔ دسته صفحه قرار دهیم وساده‌کنیم، داریم:

$$۴۹x-۷y-۲۵z+۶۱=۰$$

۱۱. معادلهٔ صفحه‌هایی را بیابیدکه زاویهٔ‌کنج محصور بین سطوح صفحه‌های $۶x-۶y+۷z+۲۱=۰$ و $۲x+۳y-۶z-۱۲=۰$ را نصف‌کنند.

فرض می‌کنیم $(x_۱, y_۱, z_۱)$ نقطه‌ای روی صفحهٔ موردنظر باشد. بنابراین:

$$\frac{۶x_۱-۶y_۱+۷z_۱+۲۱}{-۱۱}=\pm\frac{۲x_۱+۳y_۱-۶z_۱-۱۲}{۷}$$

باساده‌کردن کسرهای بالا معادلات صفحه‌های موردنظر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$۶۴x-۹y-۱۷z+۱۵=۰$$

و

$$۲۰x-۷۵y+۱۱۵z+۲۷۹=۰$$

۱۲. معادلهٔ صفحه‌ای را بیابیدکه ازنقطه‌های $(۱, -۲, ۲)$ و $(-۳, ۱, -۲)$ بگذرد وبرصفحهٔ $۲x+y-z+۶=۰$ عمود باشد.

فرض‌کنید $Ax+By+Cz+D=۰$ صفحهٔ موردنظر باشد.

چون دونقطه درصفحهٔ مطلوب قراردارند، مختصات آنها را در معادلهٔ صفحه قرار می‌دهیم:

$$A-۲B+۲C+D=۰$$

$$-۳A+B-۲C+D=۰$$

چون صفحهٔ موردنظر باید برصفحهٔ $۲x+y-z+۶=۰$ عمود باشد، داریم:

$$۲A+B-C=۰$$

اگر دستگاه را نسبت به A، B و D برحسب C حل کنیم، $A=-\frac{C}{۱۰}$، $B=\frac{۶C}{۵}$ و $D=\frac{۵C}{۱۰}$ حاصل می‌شود.

این مقادیر را در معادلهٔ صفحه قرار می‌دهیم وطرفین تساوی را بر C تقسیم می‌کنیم، معادلهٔ مطلوب $x-۱۲y-۱۰z-۵=۰$ است.

۱۳. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطه‌ای که از $(۲,-۱,۳)$ و $۲x-۲y+z-۶=۰$ به‌یك فاصله است.

اگر (x, y, z) نقطهٔ مطلوب باشد، آنگاه:

$$\sqrt{(x-۲)^۲+(y+۱)^۲+(z-۳)^۲}=\frac{۲x-۲y+z-۶}{۳}$$

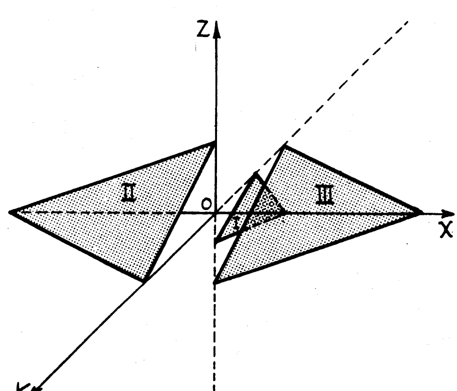
طرفین تساوی را به‌توان دو می‌رسانیم وساده می‌کنیم:

$$۵x^۲+۵y^۲+۸z^۲+۸xy-۴xz+۴yz-۱۲x-۶y-۴۲z+۹۰=۰$$

۱۴. معادلهٔ صفحه‌هایی را به‌دست آورید که با صفحهٔ $۲x-۳y-۶z-۱۴=۰$ موازی باشند و ۵ واحد ازمبدأ مختصات فاصله داشته‌باشند.

معادلهٔ $۲x-۳y-۶z-k=۰$ دسته صفحه‌هایی را نشان می‌دهد که باصفحهٔداده‌شده موازی هستند.

فاصلهٔ هرنقطـهٔ دلخواه $(x_۱, y_۱, z_۱)$ از صفحهٔ $۲x-۳y-۶z-k=۰$ برابر



است با، $.d=\frac{۲x_۱-۳y_۱-۶z_۱-k}{۷}$

چون $d=\pm ۵$، فاصله ازمبدأ مختصات $(۰,۰,۰)$ است:

$$\pm ۵=\frac{۲(۰)-۳(۰)-۶(۰)-k}{۷}$$

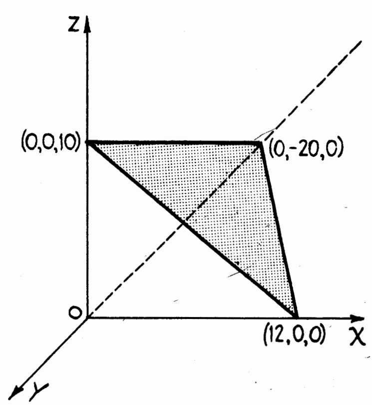
یا
$$k=\pm ۳۵$$

بنابراین معادلهٔ مطلوب $۲x-۳y-۶z\pm ۳۵=۰$ است.

درشکل صفحهٔ قبل صفحهٔ I صفحهٔ مفروض وصفحه‌های II و III صفحه‌های مطلوب هستند.

۱۵. معادلهٔ صفحهٔ $۵x-۳y+۶z=۶۰$ را برحسب نقطه‌های تقاطع آن بـا محورهای مختصات بنویسید.

اگـر طرفین تساوی را بـر ۶۰ تقسیم کنیم، معادلهٔ $\frac{x}{۱۲}-\frac{y}{۲۰}+\frac{z}{۱۰}=۱$ بـه دست می‌آیدکه برحسب نقطه‌های تقاطع بامحورهای مختصات است. نقطه‌های تقاطع‌صفحه با محورهای مختصات ۱۲، ۲۰ــ و ۱۰ هستند.



۱۶. نشان دهید صفحه‌های
$$۷x+۴y-۴z+۳۰=۰$$
$$۳۶x-۵۱y+۱۲z+۱۷=۰$$
$$۱۴x+۸y-۸z-۱۲=۰$$
و
$$۱۲x-۱۷y+۴z-۳=۰$$

چهاروجه، یك متوازی‌السطوح‌قائم (یا مکعب مستطیل) را تشکیل می‌دهند.

صفحه‌های اول وسوم موازیند، چون $\frac{-۴}{-۸}=\frac{۴}{۸}=\frac{۷}{۱۴}$.

صفحه‌های دوم‌وچهارم نیز باهم موازیند، چون $\frac{۱۲}{۴}=\frac{-۵۱}{-۱۷}=\frac{۳۶}{۱۲}$.

علاوه براین، صفحهٔ اول ودوم برهم عمودند، چون:

$$۷(۳۶)+۴(-۵۱)-۴(۱۲)=۲۵۲-۲۰۴-۴۸=۰$$

۱۷. مکان هندسی معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲xy-۴z^۲=۰$ را مشخص کنید.

این معادله را بدین‌صورت می‌نویسیم:

$$x^۲-۲xy+y^۲-۴z^۲=(x-y-۲z)(x-y+۲z)=۰$$

مکان هندسی، دوصفحه است که ازمبدأ مختصات می گذرند:

$$x-y-۲z=۰$$

و

$$x-y+۲z=۰$$

مسئله‌های تکمیلی

۱. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که:

الف) با صفحهٔ xy موازی و ۳ واحد پایین آن باشد.

جواب: $z=-۳$.

ب) با صفحهٔ yz موازی و دارای طول ازمبدأ ۴ باشد.

جواب: $x=۴$.

ج) برمحور zها درنقطهٔ $(۰, ۰, ۶)$ عمود باشد.

جواب: $z=۶$.

د) با صفحهٔ xz موازی و ۶ واحد پشت آن باشد.

جواب: $y=-۶$، یا $y+۶=۰$.

۲. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که افقی باشد وازنقطهٔ $(۳, -۲, -۴)$ بگذرد.

جواب: $z=-۴$ یا $z+۴=۰$.

۳. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که با محور zها موازی ومحل برخوردآن با محور xها،

$x=2$ و با محور yها، $y=-3$ باشد. جواب: $3x-2y-6=0$.

۴. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که با محور zها موازی و دارای رد xy به‌صورت $x+y-2=0$ باشد. جواب: $x+y-2=0$.

۵. معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که:

الف) از نقطهٔ $(3, -2, 4)$ می‌گذرد و برخطی با پارامترهای هادی ۲، ۲، ۳− عمود است. جواب: $2x+2y-3z+10=0$.

ب) از نقطهٔ $(-1, 2, -3)$ می‌گذردو برپاره‌خط از $(-3, 2, 4)$ تا $(5, 4, 1)$ عمود است. جواب: $8x+2y-3z-5=0$.

ج) از نقطهٔ $(2, -3, 4)$ می‌گذردو برپاره‌خطی که این نقطه را به‌نقطهٔ $(4, 4, -1)$ متصل می‌کند عمود است. جواب: $2x+7y-5z+37=0$.

د) برپاره‌خط از $(-3, 2, -2)$ تا $(5, 4, 6)$ درنقطهٔ وسط آن عمود است.

جواب: $4x+y+4z-15=0$.

۶. معادلهٔ صفحه‌ای را به‌دست آورید که:

الف) از نقطهٔ $(-1, 2, 4)$ می‌گذرد و باصفحهٔ $2x-3y-5z+6=0$ موازی‌است.

جواب: $2x-3y-5z+28=0$.

ب) از نقطهٔ $(2, -3, 6)$ می‌گذرد و با صفحهٔ $2x-5y+7=0$ موازی است.

جواب: $2x-5y-19=0$.

ج) از نقطهٔ $(0, 0, 0)$ می‌گذرد وباصفحهٔ $3x+7y-6z+3=0$ موازی‌است.

جواب: $3x+7y-6z=0$.

د) با صفحهٔ $6x+3y-2z-14=0$ موازی و فاصله‌اش از مبدأ نصف فاصلهٔ این صفحه از مبدأ است. جواب: $6x+3y-2z\pm 7=0$.

ه) با صفحهٔ $3x-6y-2z-4=0$ موازی و به‌فاصلهٔ ۳ ازمبدأ مختصات‌است.

جواب: $3x-6y-2z\pm 21=0$.

۷. معادلهٔ صفحه‌ای را بیابید که:

الف) با صفحهٔ $6x-6y+7z-44=0$ موازی ونسبت به‌آن ۲واحد دورتر از مبدأ مختصات است. جواب: $6x-6y+7z\pm 66=0$.

ب) با صفحهٔ $4x-4y+7z-3=0$ موازی و به‌فاصلهٔ ۴ واحد از نقطهٔ

$(4, 1, -2)$ است.

جواب: $4x-4y+7z-34=0$، $4x-4y+7z+38=0$.

ج) با صفحهٔ $2x-3y-5z+1=0$ موازی و به‌فاصلهٔ ۳ واحد از نقطهٔ $(-1, 3, 1)$ است. جواب: $2x-3y-5z+16\pm 3\sqrt{38}=0$.

۸. معادلهٔ صفحه‌ای را به‌دست آورید که از نقطهٔ $(3, -2, 4)$ می‌گذرد و بر هریك از صفحه‌های $7x-3y+z-5=0$ و $4x-y-z+9=0$ عمود است.

جواب: $4x+11y+5z-10=0$.

۹. معادلهٔ صفحه‌ای را به‌دست آورید که از $(4, -3, 2)$ می‌گذرد و بر فصل مشترك دو صفحهٔ $x-y+2z-3=0$ و $2x-y-3z=0$ عمود است.

جواب: $5x+7y+z-1=0$.

۱۰. مطلوب است معادلهٔ صفحه‌ای که از نقطهٔ $(1, -4, 2)$ می‌گذرد و بر هریك از صفحه‌های $2x+5y-z-12=0$ و $4x-7y+3z+8=0$ عمود است.

جواب: $4x-5y-17z+10=0$.

۱۱. معادلهٔ صفحه‌ای را بیابید که از نقطهٔ $(7, 0, 3)$ می‌گذرد و بر هریك از صفحه‌های $2x-4y+3z=0$ و $7x+2y+z-14=0$ عمود است.

جواب: $10x-19y-32z+26=0$.

۱۲. معادلهٔ صفحه‌ای را به‌دست آورید که از نقطهٔ $(4, 1, 0)$ می‌گذرد و بر هریك از صفحه‌های $2x-y-4z-6=0$ و $x+y+2z-3=0$ عمود است.

جواب: $2x-8y+3z=0$.

۱۳. معادلهٔ صفحه‌ای را به‌دست آورید که از نقطهٔ $(1, 1, 2)$ می‌گذرد و بر هریك از صفحه‌های $2x-2y-4z-6=0$ و $3x+y+6z-4=0$ عمود است.

جواب: $x+3y-z-2=0$.

۱۴. معادلهٔ صفحه‌ای را به‌دست آورید که بر هریك از صفحه‌های $3x-y+z=0$ و $x+5y+3z=0$ عمود و به‌فاصلهٔ $\sqrt{6}$ از مبدأ مختصات است.

جواب: $x+y-2z\pm 6=0$.

۱۵. مطلوب است معادلهٔ صفحه‌ای که بر هریك از صفحه‌های $x-4y+z=0$ و $3x+4y+z-2=0$ عمود و به‌فاصلهٔ یك از مبدأ مختصات است.

جواب: $4x-y-8z\pm 9=0$.

۱۶. معادلهٔ صفحه‌ای را بیابید که از نقطه‌های $(2, 2, 2)$ و $(0, -2, 0)$ می‌گذرد و برصفحهٔ $x-2y+3z-7=0$ عمود است.

جواب: $4x-y-2z-2=0$.

۱۷. معادلهٔ صفحهٔ گذرنده از نقطه‌های $(2, 1, 1)$ و $(3, 2, 2)$ و عمود برصفحهٔ $x+2y-5z-3=0$ را به‌دست آورید.

جواب: $7x-6y-z-7=0$.

۱۸. معادلهٔ صفحه‌ای را به‌دست آورید که از $(2, -1, 6)$ و $(1, -2, 4)$ می‌گذرد و برصفحهٔ $x-2y-2z+9=0$ عمود است.

جواب: $2x+4y-3z+18=0$.

۱۹. معادلهٔ صفحه‌ای را به‌دست آورید که از دونقطهٔ $(1, 2, -2)$ و $(2, 0, -2)$ می‌گذرد و برصفحهٔ $3x+y+2z=0$ عمود است.

جواب: $4x+2y-7z-22=0$.

۲۰. معادلهٔ صفحه‌ای را تعیین کنید که ازنقطه‌های $(1, 3, -2)$ و $(3, 4, 3)$ می‌گذرد و برصفحهٔ $7x-3y+5z-4=0$ عمود است.

جواب: $20x+25y-13z-121=0$.

۲۱. معادلهٔ صفحه‌ای را به‌دست آورید که ازنقطه‌های زیرمی‌گذرد:

الف) $(3, 4, 1)$، $(-1, -2, 5)$، $(1, 7, 1)$.

جواب: $3x+2y+6z-23=0$.

ب) $(3, 1, 4)$، $(2, 1, 6)$، $(3, 2, 4)$.

جواب: $2x+z-10=0$.

ج) $(2, 1, 3)$، $(-1, -2, 4)$، $(4, 2, 1)$.

جواب: $5x-4y+3z-15=0$.

د) $(3, 2, 1)$، $(1, 3, 2)$، $(1, -2, 3)$.

جواب: $3x+y+5z-16=0$.

ه) $(4, 2, 1)$، $(-1, -2, 2)$، $(0, 4, -5)$.

جواب: $11x-17y-13z+3=0$.

۲۲. مکان هندسی هریك ازصفحه‌های زیررا مورد بحث و بررسی قرار دهید و نمودار آن

را رسم کنید. محل برخورد صفحه‌ها با محورهای مختصات و رد آنها را نشان‌دهید.

الف) $2x+4y+3z-12=0$.　　ب) $3x-5y+2z-30=0$.

ج) $x+y=6$.　　د) $2y-3z=6$.

ه) $2x-z=0$.　　و) $x-6=0$.

۲۳. ازمشخصات صورت نرمال صفحه استفاده کنید ومعادلات هریك از صفحه‌های زیررا بنویسید:

الف) $\alpha=120^\circ$، $\beta=45^\circ$، $\gamma=120^\circ$، $p=5$.

جواب: $x-\sqrt{2}y+z+10=0$.

ب) $\alpha=90^\circ$، $\beta=135^\circ$، $\gamma=45^\circ$، $p=4$.

جواب: $y-z+4\sqrt{2}=0$.

ج) پای قائمی که ازمبدأ مختصات برصفحه رسم می‌شود نقطهٔ $(1, 3, 2)$ است.

جواب: $2x+3y+z-14=0$.

د) $\alpha=120^\circ$، $\beta=60^\circ$، $\gamma=135^\circ$، $p=2$.

جواب: $x-y+\sqrt{2}z+4=0$.

ه) $\dfrac{\cos\alpha}{-1}=\dfrac{\cos\beta}{4}=\dfrac{\cos\gamma}{8}$، $p=2$.

جواب: $x-4y-8z\pm18=0$.

۲۴. هریك ازمعادلات زیـررا به‌صورت نرمال تبدیل وآنگاه کسینوسهای هادی و طـول عمود ازمبدأ را تعیین کنید.

الف) $2x-2y+z-12=0$.

جواب: $\cos\alpha=\frac{2}{3}$، $\cos\beta=-\frac{2}{3}$، $\cos\gamma=\frac{1}{3}$، $p=4$.

ب) $9x+6y-2z+7=0$.

جواب: $\cos\alpha=-\frac{9}{11}$، $\cos\beta=-\frac{6}{11}$، $\cos\gamma=\frac{2}{11}$، $p=\frac{7}{11}$.

ج) $x-4y+8z-27=0$.

جواب: $\cos\alpha=\frac{1}{9}$، $\cos\beta=-\frac{4}{9}$، $\cos\gamma=\frac{8}{9}$، $p=3$.

۲۵. فاصلهٔ عمود از نقطه تا صفحه را در هر یك از حالتهای زیر محاسبه کنید.

الف) نقطه $(-2, 2, 3)$، صفحهٔ $2x+y-2z-12=0$.

جواب: $-\frac{20}{3}$. علامت منفی را تعبیر هندسی کنید.

ب) نقطهٔ $(7, 3, 4)$، صفحهٔ $6x-3y+2z-13=0$.

جواب: 4.

ج) نقطهٔ $(0, 2, 3)$، صفحهٔ $6x-7y-6z+22=0$.

جواب: $\frac{10}{11}$.

د) نقطهٔ $(1, -2, 3)$، صفحهٔ $2x-3y+2z-14=0$.

جواب: 0.

۲۶. زاویهٔ حادهٔ بین صفحه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $2x-y+z=7$، $x+y+2z-11=0$.

جواب: 60°.

ب) $x+2y-z=12$، $x-2y-2z-7=0$.

جواب: $82^\circ 10.7'$.

ج) $2x-5y+14z=60$، $2x+y-2z-18=0$.

جواب: $49^\circ 52.6'$.

د) $2x+y-2z=18$، $4x-3y-100=0$.

جواب: $70^\circ 31.7'$.

۲۷. نقطهٔ تلاقی صفحه‌های $2x-y-2z=5$، $4x+y+3z=1$ و $8x-y+z=5$ را به‌دست آورید. جواب: $\left(\frac{3}{2}, 4, -3\right)$.

۲۸. نقطهٔ برخورد صفحه‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $2x+y-z-1=0$، $3x-y-z+2=0$ و $4x-2y+z-3=0$.

جواب: $(1, 2, 3)$.

ب) $2x+3y+3=0$، $3x+2y-5z+2=0$ و $3y-4z+8=0$.

جواب: $\left(\frac{3}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)$.

ج) $x+2y+4z=2$، $2x+3y-2z+3=0$ و $2x-y+4z+8=0$.

جواب: $\left(-4, 2, \frac{1}{2}\right)$.

۲۹. معادلهٔ صفحهٔ گذرنده از فصل مشترک صفحه‌های $2x-7y+4z-3=0$ و $3x-5y+4z+11=0$، ونقطهٔ $(-2, 1, 3)$ را به‌دست آورید.

جواب: $15x-47y+28z-7=0$.

۳۰. مطلوب‌است معادلهٔ‌صفحه‌ای که از فصل مشترک صفحه‌های $3x-4y+2z-6=0$ و $2x+4y-2z+7=0$، ونقطه $(1, 2, 3)$ می‌گذرد.

جواب: $43x-24y+12z-31=0$.

۳۱. معادلهٔ صفحه‌ای را تعیین کنید که از فصل مشترک صفحه‌های $2x-y+2z-6=0$ و $3x-6y+2z-12=0$ می‌گذرد ومحور xها را درنقطه $(6, 0, 0)$ قطع می‌کند.
جواب: $x-5y-6=0$.

۳۲. معادلات نیمساز زاویه‌های کنج بین دو صفحهٔ $2x-y-2z-6=0$ و $3x+2y-6z=12$ را به‌دست آورید.

جواب: $23x-y-32z-78=0$، $5x-13y+4z-6=0$.

۳۳. معادلات نیمساز زاویه‌های کنج بین صفحه‌های $6x-9y+2z+18=0$ و $x-8y+4z=20$ را به‌دست آورید.

جواب: $43x+7y-26z+382=0$، $65x-169y+62z-58=0$.

۳۴. مطلوب است تعیین معادلات نیمساز زاویه‌های کنج بین دوصفحهٔ $3x+4y-6=0$ و $6x-6y+7z+16=0$.

جواب: $3x+74y-35z-146=0$، $9x+2y+5z+2=0$.

۳۵. معادلات هریك از صفحه‌های زیر را به‌صورت مختصات نقاط تقاطع با محورهای مختصات بنویسید.

الف) $2x-3y+4z=12$. جواب: $\frac{x}{6}-\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1$.

ب) $3x+2y-5z=15$. جواب: $\frac{x}{5}+\frac{y}{7/5}-\frac{z}{3}=1$.

ج) $x+3y+4z=12$.   جواب: $\frac{x}{12}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1$.

۳۶. نقطه‌های تقاطع صفحه بـا محورهای مختصات داده شده است. معادلات هـر یك از صفحه‌ها را به‌دست آورید.

الف) $(-2, 0, 0)$، $(0, 3, 0)$، $(0, 0, 5)$.

جواب: $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1$.

ب) $(3, 0, 0)$، $(0, -2, 0)$.

جواب: $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$. (با محور zها موازی است.)

ج) $(4, 0, 0)$.

جواب: $x=4$. (با صفحهٔ yz موازی است.)

۳۷. ثابت‌کنید صفحه‌های زیروجوه یك متوازی‌السطوح هستند.

$3x-y+4z-7=0$، $x+2y-z+5=0$، $6x-2y+8z+10=0$، $3x+6y-3z-7=0$.

۳۸. معادلهٔ‌مکان‌هندسی نقطه‌ای راتعیین‌کنید که فاصله‌اش ازصفحهٔ $3x-2y-6z=12$ همواره دوبرابر فاصله‌اش ازصفحهٔ $x-2y+2z+4=0$ است.

جواب: $23x-34y+10z+20=0$، $5x-22y+46z+92=0$.

۳۹. فاصلهٔ عمود بین دوصفحهٔ موازی

$$2x-3y-6z-14=0 \quad \text{و} \quad 2x-3y-6z+7=0$$

را به‌دست آورید. شکلی رسم‌کنید.   جواب: ۳.

۴۰. فاصلهٔ عمود بین صفحه‌هـای $3x+6y+2z=22$ و $3x+6y+2z=27$ را به‌دست آورید. شکلی رسم‌کنید.   جواب: $\frac{5}{7}$.

۴۱. مکان هندسي معادلهٔ $x^2+3y^2-z^2+4xy=0$ را شرح دهید.

جواب: دوصفحهٔ متقاطع: $x+2y+z=0$، $x+2y-z=0$.

۴۲. مکان هندسی‌معادلهٔ $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz-4=0$ رامشخص کنید.

جواب: صفحه‌های موازی: $x+y-z+2=0$، $x+y-z-2=0$.

۴۳. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بنویسید که فاصلهٔ آن از صفحهٔ $6x-2y+3z+4=0$، برابر فاصله‌اش از نقطهٔ $(2, 1, -1)$ است.

جواب: $13x^2+45y^2+40z^2+24xy-36xz+12yz+50x-$
$-82y-220z+278=0$

۱۴

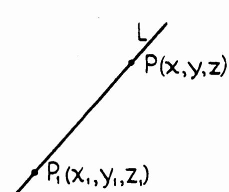
خط راست در فضا

خط راست در فضا. مکان هندسی دستگاه معادلات درجهٔ اول

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{و} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

به‌استثنای حالتی که دو صفحه موازیند، خط راستی است که همان فصل مشترك دو صفحه است.

معادلهٔ پارامتری خط. اگر α، β و γ زاویه‌های هادی خط L و $P_1(x_1, y_1, z_1)$ نقطهٔ دلخواهی روی خط باشد، آنگاه خط L مکان هندسی نقطهٔ $P(x, y, z)$ است که طوری حرکت می‌کند که $x-x_1=t\cos\alpha$، $y-y_1=t\cos\beta$ و $z-z_1=t\cos\gamma$، یا $x=x_1+t\cos\alpha$، $y=y_1+t\cos\beta$ و $z=z_1+t\cos\gamma$. در اینجا پارامتر t طول متغیر P_1P است.



اگر a، b و c پارامترهای‌هادی خط L باشند، این معادلات را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$x = x_1 + at, \quad y = y_1 + bt, \quad z = z_1 + ct$$

معادلهٔ متقارن خط. معادلات خطی که با زاویه‌های هادی α، β و γ از نقطهٔ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ می‌گذرد به‌صورت زیر است:

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}$$

اگر a، b و c پارامترهای هادی خط باشند، معادلهٔ متقارن به‌صورت‌زیر درمی‌آید:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

اگر خط L بر یکی‌از محورهای مختصات عمودباشد، معادلهٔ خط به‌یکی‌ازشکلهای زیر درمی‌آید:

$$x = x_1, \quad \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$ (خط بر محور xها عمود است)

$$y = y_1, \quad \frac{x - x_1}{a} = \frac{z - z_1}{c}$$ (خط بر محور yها عمود است)

$$z = z_1, \quad \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}$$ (خط بر محور zها عمود است)

اگر خط L بر دومحور مختصات عمود باشد، دو معادله برای تعیین خط‌کافی‌است:

$$x = x_1, \quad y = y_1$$ (خط بر محور xها و yها عمود است)

$$x = x_1, \quad z = z_1$$ (خط بر محور xها و zها عمود است)

$$y = y_1, \quad z = z_1$$ (خط بر محور yها و zها عمود است)

معادلهٔ خط راستی که دو نقطهٔ آن معلوم باشد. معادلات خط‌گذرنده از دو نقطهٔ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ عبارتند از:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

صفحه‌های تصویر کننده. هر یك از معادلات:

$$\frac{x-x_۱}{a}=\frac{y-y_۱}{b},\quad \frac{x-x_۱}{a}=\frac{z-z_۱}{c},\quad \frac{y-y_۱}{b}=\frac{z-z_۱}{c}$$

معرف صفحه‌ای هستند که در بر دارندهٔ خط است. چون هر یك از این صفحه‌ها بر یکی از صفحه‌های مختصات عمود است، آن را می‌توان به‌عنوان صفحهٔ تصویر کنندهٔ خط بر آن صفحهٔ متناظر در نظر گرفت و بدین جهت به‌صفحهٔ تصویر کنندهٔ خط موسوم است.

رابطهٔ بین هادیهای خط و صفحه. هر خط با پارامترهای هادی a، b و c و صفحهٔ $Ax+By+Cz+D=۰$:

۱) موازی هستند، وقتی وفقط وقتی که $Aa+Bb+Cc=۰$؛

۲) برهم عمودند، وقتی وفقط وقتی که $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$.

دسته صفحهٔ حاوی یك خط. معادله‌های زیر مفروضند:

$$A_۱x+B_۱y+C_۱z+D_۱=۰$$

$$A_۲x+B_۲y+C_۲z+D_۲=۰$$

معادلهٔ $A_۱x+B_۱y+C_۱z+D_۱+K(A_۲x+B_۲y+C_۲z+D_۲)=۰$، که در آن K یك پارامتر است، نمایشگر صفحه‌ای است که حاوی خطی است که از تقاطع دو صفحه به‌وجود می‌آید. بنابراین معادلهٔ فوق، معادلهٔ هر صفحهٔ دلخواهی است که از فصل مشترك دو صفحهٔ مفروض می گذرد.

مسئله‌های حل شده

۰۱ معادلات $۲x-y+z=۶$ و $x+۴y-۲z=۸$ مفروضند. مطلوب است تعیین:

الف) نقطه‌ای از خط به‌ازای $z=۱$؛

ب) نقطه‌هایی که در آن خط از صفحه‌های مختصات عبور می کند؛

ج) پارامترهای هادی؛

د) کسینوسهای هادی خط.

الف) باقرار دادن $z=۱$ در هر دومعادله، معادلات $۲x-y=۵$ و $x+۴y=۱۰$ به‌دست می‌آید.

پس از حل این معادلات، $x=\frac{۱۰}{۳}$ و $y=\frac{۵}{۳}$ حاصل می‌شود. بنابراین نقطهٔ مطلوب $\left(۱, \frac{۵}{۳}, \frac{۱۰}{۳}\right)$ است.

ب) چون $z=۰$ در صفحهٔ xy قرار دارد، اگر مانند قسمت (الف) عمل کنیم نقطهٔ $\left(۰, \frac{۱۰}{۹}, \frac{۳۲}{۹}\right)$ به‌دست می‌آید. به‌همین ترتیب، نقطه‌های دیگری به دست می‌آید که به‌مختصات $(۴, ۰, -۲)$ و $(۰, ۱۰, ۱۶)$ هستند.

ج) نقطه‌های $\left(۱, \frac{۵}{۳}, \frac{۱۰}{۳}\right)$ و $(۴, ۰, -۲)$ روی این خط قرار دارند. پس مجموعهٔ پارامترهای هادی خط عبارتند از، $۴-\frac{۱۰}{۳}$، $۰-\frac{۵}{۳}$ و $-۲-۱$، یا $\frac{۲}{۳}$، $-\frac{۵}{۳}$ و -۳، یا ۲، -۵ و -۹.

د) کسینوسهای هادی خط عبارتند از:

$$\cos\alpha=\frac{۲}{\sqrt{۴+۲۵+۸۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۱۱۰}},\ \cos\beta=\frac{-۵}{\sqrt{۱۱۰}},\ \cos\gamma=\frac{-۹}{\sqrt{۱۱۰}}$$

روش دیگر. مجموعهٔ پارامترهای هادی خط را می‌توان با توجه به اینکه خط بر قائمهای هر دو صفحهٔ نامعادلات داده شده عمود است، به دست آورد. با استفاده از دترمینانهایی که از آرایهٔ

$$\begin{matrix} ۱ & ۴ & -۲ & ۱ & ۴ \\ ۲ & -۱ & ۱ & ۲ & -۱ \end{matrix}$$

که از ضرایب x، y و z دو صفحه تشکیل می‌شود، به‌دست می‌آیند، پارامترهای هادی خط به‌دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} ۴ & -۲ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}=۴-۲=۲,\ \begin{vmatrix} -۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}=-۴-۱=-۵,\ \begin{vmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix}=-۹$$

یا ۲، -۵ و -۹.

۲۰. زاویهٔ حاده بین خطهای زیر را محاسبه کنید:

(۱) $$۲x-y+۳z-۴=۰,\quad ۳x+۲y-z+۷=۰$$

$$x+y-2z+3=0 \quad , \quad 4x-y+3z+7=0 \qquad (2)$$

مطابق آنچه که در مسئلهٔ یك (د) در صفحهٔ قبل، توضیح داده شد، پارامترهای هادی خط اول ۵−، ۱۱، ۷ و پارامترهای هادی خط دوم ۱−، ۱۱ و ۵ است.

اگر θ زاویهٔ بین دو خط باشد، آنگاه:

$$\cos\theta=\frac{-5}{\sqrt{195}}\times\frac{-1}{\sqrt{147}}+\frac{11}{\sqrt{195}}\times\frac{11}{\sqrt{147}}+\frac{7}{\sqrt{195}}\times\frac{5}{\sqrt{147}}=\frac{23}{3\sqrt{65}}$$

و

$$\theta=18^\circ 14'$$

۳. نشان دهید خطهای زیر موازیند:

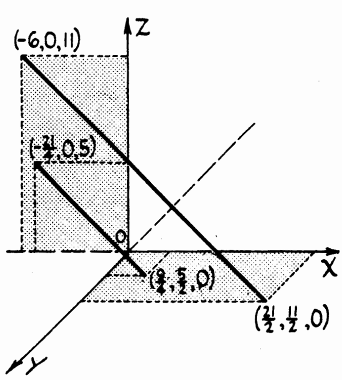
$$x-y+z-5=0 \longrightarrow \quad x-3y+6=0 \qquad (1)$$

$$2y+z-5=0 \longrightarrow \quad 4x-2y+5z-4=0 \qquad (2)$$

پارامترهای هادی خط اول:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -3 \end{array}$$

یا ۳، ۱، ۲−.



پارامترهای هادی خط دوم:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 & 4 & -2 \end{array}$$

یا ۱۲، ۴ و ۸ —، یا ۳، ۱ و ۲ —.

دوخط پارامترهای هادی یکسان دارند. پس موازی هستند.

۴. ثابت کنید خطهای $\frac{z-7}{-1}=\frac{y-5}{3}=\frac{x+1}{2}$ و $\frac{z-3}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{x+4}{5}$ بـرهم عمودند.

کسینوسهای هادی خط اول عبارتند از:

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta=\frac{3}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{14}}$$

کسینوسهای هادیخط دوم عبارتند از:

$$\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{35}},\quad \cos\beta=\frac{-3}{\sqrt{35}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{35}}$$

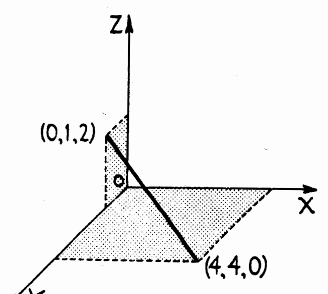
$$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{14}}\times\frac{5}{\sqrt{35}}+\frac{3}{\sqrt{14}}\times\frac{-3}{\sqrt{35}}+$$

$$+\frac{-1}{\sqrt{14}}\times\frac{1}{\sqrt{35}}=\frac{10-9-1}{\sqrt{14}\times\sqrt{35}}=0 \text{ و } \theta=90^\circ$$

یا اینکه، اگر از پارامترهـای هادی دو خط (۲، ۳، ۱ — و ۵، ۳ —، ۱) استفاده کنیم، $2(5)+3(-3)+(-1)(1)=0$ به‌دست‌می‌آید. پس خطها برهم عمودند.

۵. نمودار خط $3x-2y+3z-4=0,\ x-2y-z+4=0$ را رسم کنید.

دو محل برخورد خط با دو صفحهٔ مختصات را به‌دست می‌آوریم و آنها را به‌هـم وصل می‌کنیم.



برای اینکه محل برخورد خط با صفحهٔ xy را مشخص کنیم، z را مساوی صفرقرار

می‌دهیم، آنگاه:

$$۳x-۲y=۴$$

$$x-۲y=-۴$$

پس از حل دستگاه، $x=۴$، $y=۴$ به‌دست‌می‌آید، بنا براین $(۴\,,\,۴\,,\,۰)$ نقطهٔ برخورد خط با صفحهٔ xy است. به‌همین‌ترتیب، خط درنقطهٔ $(۰\,,\,۱\,,\,۲)$ ازصفحهٔ yzمی گذرد.

۶. درچه نقطه‌ای خط $x+۲y-z-۶=۰$ و $۲x-y+۳z+۱۳=۰$ از صفحهٔ $۳x-۲y+۳z+۱۶=۰$ عبور می کند.

چون مختصات نقطهٔ گذر باید در هر سه معادله صدق کند، پس مسئله، از حل دستگاه سه‌معادله با سه‌مجهول خطی به دست می‌آید. اگر z را بین معادلات حذف کنیم، دو معادلهٔ $۳x+۲y-۱=۰$ و $x-y+۳=۰$ به دست می‌آید. پس از حل این دو معادله، داریم: $x=-۱$، $y=۲$.

اگر این مقادیر را در معادلهٔ صفحهٔ $x+۲y-z-۶=۰$ قرار دهیم، $z=-۳$ به‌دست می‌آید. پس خط در نقطهٔ $(-۱\,,\,۲\,,\,-۳)$ از صفحه عبور می کند.

۷. ثابت‌کنید خطهایی که با هر یك از زوج صفحه‌های زیر داده شده‌اند متقاطعند:

$$x-y-z-۷=۰\,,\,۳x-۴y-۱۱=۰ \text{ و } x+۲y-z-۱=۰\,,\,x+y+۱=۰$$

اگر $(x_۱\,,\,y_۱\,,\,z_۱)$ مختصات نقطهٔ تلاقی دو خط باشد، این نقطه باید در معادلهٔ هر یك از صفحه‌ها صدق کند. پس:

$$x_۱-y_۱-z_۱=۷ \qquad (۱)$$

$$۳x_۱-۴y_۱=۱۱ \qquad (۲)$$

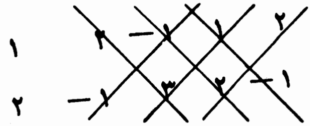
$$x_۱+۲y_۱-z_۱=۱ \qquad (۳)$$

$$x_۱+y_۱=-۱ \qquad (۴)$$

اگر رابطهٔ (۳) را از رابطهٔ (۱) کم کنیم، $y_۱=-۲$ نتیجه‌می‌شود. با قراردادن این مقدار به‌جای $y_۱$ در رابطهٔ (۴)، $x_۱=۱$ به دست می‌آید. اگر این دو مقدار را در رابطهٔ (۱) قرار دهیم، جواب $z_۱=-۴$ حاصل می‌شود. نقطهٔ تقاطع $(۱\,,\,-۲\,,\,-۴)$ است.

۸. مطلوب‌است زاویهٔ‌بین خط $x+۲y-z+۳=۰\,,\,۲x-y+۳z+۵=۰$ وصفحهٔ $۳x-۴y+۲z-۵=۰$.

ابتدا پارامترهای هادی خط را به‌دست می‌آوریم:



یا ۱ −۶، ۳ −۲ − و۴ −۱ −، یا ۵، ۵ − و۵ −، یا ۱، ۱ − و۱ −.

زاویهٔ بین خط و صفحه، متمم زاویهٔ θ، بین خط و قائم بر صفحه است. پارامترهای هادی خط قائم عبارتند از، ۳، ۴ −، ۲.

$$\cos\theta = \frac{۳(۱) - ۴(-۱) + ۲(-۱)}{\sqrt{۳} \times \sqrt{۲۹}} = \frac{۵}{\sqrt{۸۷}}, \text{ پس } \theta = ۵۷^\circ ۳۵'.$$

زاویهٔ بین خط و صفحه $۳۲^\circ ۲۵'$ است.

۰۹ معادلات متقارن فصل مشترک دو صفحهٔ $۲x - ۳y + ۳z - ۴ = ۰$ و $x + ۲y - z + ۳ = ۰$ را بیابید.

اگر z و y را به‌نوبت بین این‌معادلات حذف کنیم، معادلات $۵x + ۳y + ۵ = ۰$ و $۷x + ۳z + ۱ = ۰$ حاصل می‌شود.

مقادیر x از دو معادلـه را متحد هم قرار می‌دهیم، $x = \dfrac{۳y + ۵}{-۵} = \dfrac{۳z + ۱}{-۷}$، یا

$\dfrac{x}{۱} = \dfrac{y + \frac{۵}{۳}}{-\frac{۵}{۳}} = \dfrac{z + \frac{۱}{۳}}{-\frac{۷}{۳}}$، یا $\dfrac{x}{۳} = \dfrac{y + \frac{۵}{۳}}{-۵} = \dfrac{z + \frac{۱}{۳}}{-۷}$. و این‌معادلهٔ خطی است که از نقطهٔ $\left(۰, -\frac{۵}{۳}, -\frac{۱}{۳}\right)$ می‌گذرد و دارای پارامترهای هادی ۳، ۵ − و ۷ − است.

۰۱۰ معادلات فصل مشترک صفحه‌های زیر را به‌صورت پارامتری بنویسید:

$$۳x + ۳y - ۴z + ۷ = ۰ \quad \text{و} \quad x + ۶y + ۲z - ۶ = ۰$$

z و y را به‌نوبت بین معادله‌های داده شده حذف می‌کنیم، حاصل می‌شود:

$$x - ۲z + ۴ = ۰ \quad \text{و} \quad x + ۳y - ۱ = ۰$$

مقادیر x از دو معادله را متحد هم قرار می‌دهیم، داریم:

$$\frac{x}{۶} = \frac{y - \frac{۱}{۳}}{-۲} = \frac{z - ۲}{۳}$$

حال اگر این نسبتها را مساوی پارامتر t قرار دهیم، صورت پارامتری معادلات خط مفروض به‌دست می‌آید:

$$x=۶t\ ,\ y=\frac{۱}{۳}-۲t,\ \ z=۲+۳t$$

۱۱. معادلات صفحه‌های تصویرکنندهٔ فصل مشترک دو صفحهٔ $۲x+۳y-۵z+۶=۰$ و $۳x-۲y+z-۸=۰$ را به‌دست آورید.

به‌منظور یافتن صفحه‌های تصویرکننده، z، y و x را به نوبت بین دو معادله حذف می‌کنیم. معادلات زیر به‌دست می‌آید:

$$۱۷x-۷y-۳۴=۰ \text{ ،} \quad ۱۳x-۷z-۱۲=۰ \text{ و } ۱۳y-۱۷z+۳۴=۰$$

این معادلات به ترتیب صفحه‌های تصویرکنندهٔ خط روی صفحه‌های xy، xz و yz هستند.

۱۲. معادله‌های خط گذرنده از نقطهٔ $(۱, -۲, ۲)$ را با زاویه‌های هادی ۶۰°، ۱۲۰° و ۴۵° بنویسید.

با استفاده از دستور $\frac{x-x_۱}{\cos\alpha}=\frac{y-y_۱}{\cos\beta}=\frac{z-z_۱}{\cos\gamma}$، معادلهٔ خط زیر به دست می‌آید:

$$\frac{x-۱}{\cos ۶۰^\circ}=\frac{y+۲}{\cos ۱۲۰^\circ}=\frac{z-۲}{\cos ۴۵^\circ} \text{ ، یا } \frac{x-۱}{\frac{۱}{۲}}=\frac{y+۲}{-\frac{۱}{۲}}=\frac{z-۲}{\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}} \text{ ،}$$

یا

$$\frac{x-۱}{۱}=\frac{y+۲}{-۱}=\frac{z-۲}{\sqrt{۲}}$$

۱۳. معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۳, ۱, -۲)$ و $(۲, -۲, ۴)$ را بنویسید.

به کمک رابطهٔ $\frac{x-x_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{y-y_۱}{y_۲-y_۱}=\frac{z-z_۱}{z_۲-z_۱}$، معادلهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{x+۲}{۴+۲}=\frac{y-۱}{۲-۱}=\frac{z-۳}{-۲-۳} \text{ ، یا } \frac{x+۲}{۶}=\frac{y-۱}{۱}=\frac{z-۳}{-۵}$$

۱۴. معادلات خطی را به‌دست آورید که از نقطهٔ $(۴, -۳, ۱)$ می‌گذرد و بر صفحهٔ $x-۳y+۲z=۴$ عمود است.

پارامترهای هادی خط عبارتند از، ۱، ۳− و ۲. معادلات مطلوب $\frac{x-۱}{۱}=\frac{y+۳}{-۳}=\frac{z-۴}{۲}$، یا $۳x+y=۰$ و $۲y+۳z-۶=۰$ هستند.

۱۵. مطلوب است تعیین معادلهٔ صفحه‌ای که شامل دو خط $\frac{x-۱}{۴}=\frac{y+۱}{۲}=\frac{z-۲}{۳}$ و $\frac{x-۱}{۵}=\frac{y+۱}{۴}=\frac{z-۲}{۳}$ است.

ملاحظه می‌شود که خطها یکدیگر را در نقطهٔ $(۲,۱-,۱)$ قطع می‌کنند. معادلهٔ $Ax+By+Cz+D=۰$ را به‌کار می‌گیریم. چون هر خط روی صفحه قرار دارد، بنابراین، خطها بر قائم بر صفحه عمودند. از این‌رو:

$$۴A+۲B+۳C=۰$$

$$۵A+۴B+۳C=۰$$

علاوه بر این، نقطهٔ $(۲,۱-,۱)$ روی صفحه قرار دارد، بنابراین:

$$A-B+۲C+D=۰$$

چون چهار مجهول و فقط سه معادله داریم، سه مجهول را بر حسب مجهول چهارم به‌دست می‌آوریم.

A، C و D را برحسب B تعیین می‌کنیم، $A=-۲B$، $C=۲B$ و $D=-B$. با قرار دادن این‌مقادیر درمعادلهٔ کلی صفحه وتقسیم طرفین تساوی بر B، نتیجه‌می‌گیریم:

$$۲x-y-۲z+۱=۰$$

مسئله‌های تکمیلی

۱. مختصات نقطهٔ روی خط را به‌دست آورید.

الف) $۲x-y+z-۵=۰$ و $x+۲y-۲z-۵=۰$، به‌ازای $z=۱$.

جواب: $(۳,۲,۱)$.

ب) $۴x-۳y+۲z-۷=۰$ و $x+۴y-z-۵=۰$، به‌ازای $y=۲$.

جواب: $\left(\frac{۷}{۶},۲,\frac{۲۵}{۶}\right)$.

ج) $\frac{x-۲}{۳}=\frac{y+۴}{-۲}=\frac{z-۱}{۲}$، به‌ازای $x=۳$.

جواب: $\left(۳,-\frac{۱۴}{۳},\frac{۵}{۳}\right)$.

د) $۲x=۳y-۱$، $۳z=۴-۲y$، به‌ازای $x=۴$.

جواب: $\left(۴, ۳, -\frac{۲}{۳}\right)$.

ه) $x=۴-۳t$، $y=-۱+۴t$، $z=۲t-۳$، به‌ازای $t=۳$.

جواب: $(-۵, ۱۱, ۳)$.

۲. محل برخورد هریك از خطها را با صفحه‌های مختصات بـه‌دست آورید. با اتصال دو نقطهٔ گذر، خطها را رسم کنید.

الف) $x-۲y+z=۰$، $۳x+y+۲z=۷$.

جواب: $(۲, ۱, ۰)$، $(۷, ۰, -۷)$، $\left(۰, \frac{۷}{۵}, \frac{۱۴}{۵}\right)$.

ب) $۲x-y+۳z+۱=۰$، $۵x+۴y-z-۶=۰$.

جواب: $\left(\frac{۲}{۱۳}, \frac{۱۷}{۱۳}, ۰\right)$، $(۱, ۰, -۱)$، $\left(۰, \frac{۱۷}{۱۱}, \frac{۲}{۱۱}\right)$.

ج) $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۳}{۱}=\frac{z-۶}{-۱}$.

جواب: $(۱۳, ۳, ۰)$، $(۷, ۰, ۳)$، $\left(۰, -\frac{۷}{۲}, \frac{۱۳}{۲}\right)$.

د) $۲x+۳y-۲=۰$، $y-۳z+۴=۰$.

جواب: $(۷, -۴, ۰)$، $\left(۱, ۰, \frac{۴}{۳}\right)$، $\left(۰, \frac{۲}{۳}, \frac{۱۴}{۹}\right)$.

ه) $z=۴$، $x+۲y-۶=۰$.

جواب: $(۶, ۰, ۴)$، $(۰, ۳, ۴)$.

۳. پارامترهای هادی وکسینوسهای هادی خطهای زیر را به‌دست آورید:

الف) $۳x+y-z-۸=۰$، $۴x-۷y-۳z+۱=۰$.

جواب: ۲، ۱ــ، ۵؛ $\frac{۲}{\sqrt{۳۰}}$، $\frac{-۱}{\sqrt{۳۰}}$، $\frac{۵}{\sqrt{۳۰}}$.

ب) $۲x-۳y+۹=۰$، $۲x-y+۸z+۱۱=۰$.

جواب: ۶، ۴، ۱ــ؛ $\frac{۶}{\sqrt{۵۳}}$، $\frac{۴}{\sqrt{۵۳}}$، $\frac{-۱}{\sqrt{۵۳}}$.

ج) $۳x-۴y+۲x-۷=۰$، $۲x+y+۳z-۱۱=۰$.

جواب: ۱۴، ۵، ۱۱−؛ $\frac{۱۴}{۳\sqrt{۳۸}}$، $\frac{۵}{۳\sqrt{۳۸}}$، $\frac{-۱۱}{۳\sqrt{۳۸}}$.

د) $x-y+۲z-۱=۰$، $۲x-۳y-۵z-۷=۰$.

جواب: ۱۱، ۹، ۱−؛ $\frac{۱۱}{\sqrt{۲۰۳}}$، $\frac{۹}{\sqrt{۲۰۳}}$، $\frac{-۱}{\sqrt{۲۰۳}}$.

ه) $۳x-۲y+z+۴=۰$، $۲x+۲y-z-۳=۰$.

جواب: ۰، ۱، ۲؛ ۰، $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$، $\frac{۲}{\sqrt{۵}}$.

۴. زاویهٔ حادهٔ بین خط $x-۲y+z-۲=۰$, $۲y-z-۱=۰$ و خط

$$x-۲y+۲z-۴=۰,\quad x-۲y+z-۲=۰$$

را به‌دست آورید. جواب: $۷۸^\circ۲۷٫۸'$.

۵. زاویهٔ حادهٔ بین خطهای $\frac{x-۱}{۶}=\frac{y+۲}{-۳}=\frac{z-۴}{۶}$ و $\frac{x+۲}{۳}=\frac{y-۳}{۶}=\frac{z+۴}{-۲}$

را به‌دست آورید. جواب: $۷۹^\circ۱'$.

۶. زاویهٔ حادهٔ بین دو خط $۲x+۲y+z-۴=۰$ ، $x-۳y+۲z=۰$

و $\frac{x-۲}{۷}=\frac{y+۲}{۶}=\frac{z-۴}{-۶}$ را محاسبه کنید.

جواب: $۴۹^\circ۲۶٫۵'$.

۷. زاویهٔ حادهٔ بین خط $\frac{x+۱}{۳}=\frac{y-۱}{۶}=\frac{z-۳}{-۶}$ و صفحهٔ $۲x-۲y+z-۳=۰$ را

حساب کنید. جواب: $۲۶^\circ۲۳٫۳'$.

۸. مطلوب است تعیین زاویهٔ بین خطی که از اتصال دو نقطهٔ $(۳, ۴, ۲)$ و $(۲, ۳, -۱)$ به‌وجود می‌آید و خطی که نقطه‌های $(۱, -۲, ۳)$ و $(-۲, -۳, ۱)$ را به‌هم‌متصل می‌کند. جواب: $۳۶^\circ۱۹'$.

۹. نشان دهید خط $\frac{x-۱}{۱}=\frac{y+۲}{۲}=\frac{z-۳}{۴}$ با صفحهٔ $۶x+۷y-۵z-۸=۰$ موازی است.

۱۰. معادلات خط گذرنده از نقطهٔ $(۲, ۱, -۲)$ و عمود بر صفحهٔ $۳x-۵y+۲z+۴=۰$ رابنویسید. جواب: $\frac{x-۲}{۳}=\frac{y-۱}{-۵}=\frac{z+۲}{۲}$.

۱۱. معادلات خطی را بنویسید که:

الف) از نقطهٔ $(۲, -۱, ۳)$ می‌گذرد و با محور xها موازی است.

جواب: $y+۱=۰,\ z-۳=۰$.

ب) از نقطهٔ $(۲, -۱, ۳)$ می‌گذرد و با محور yها موازی است.

جواب: $x-۲=۰,\ z-۳=۰$.

ج) از نقطهٔ $(۲, -۱, ۳)$ می‌گذرد و با محور zها موازی است.

جواب: $x-۲=۰,\ y+۱=۰$.

د) از نقطهٔ $(۲, -۱, ۳)$ می‌گذرد و $\cos\alpha=\frac{۱}{۲}$، $\cos\beta=\frac{۱}{۳}$.

جواب: $\frac{x-۲}{۳}=\frac{y+۱}{۲}=\frac{z-۳}{\pm\sqrt{۲۳}}$.

۱۲. معادلات خط گذرنده از نقطهٔ $(-۶, ۴, ۱)$ را که بر صفحهٔ $۳x-۲y+۵z+۸=۰$ عمود است بنویسید. جواب: $۲x+۳y=۰,\ ۵y+۲z-۲۲=۰$.

۱۳. معادلات خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(۲, ۰, -۳)$ می‌گذرد و بر صفحهٔ $۲x-۳y+۶=۰$ عمود است. جواب: $۳x+۲y-۶=۰,\ z+۳=۰$.

۱۴. معادله‌های خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(۱, -۲, -۳)$ می‌گذرد و بر صفحهٔ $x-۳y+۲z+۴=۰$ عمود است. جواب: $\frac{x-۱}{۱}=\frac{y+۲}{-۳}=\frac{z+۳}{۲}$.

۱۵. معادلات خط گذرنده از نقطه‌های $(۲, -۳, ۴)$ و $(۵, ۲, -۱)$ را بنویسید.

جواب: $\frac{x-۲}{۳}=\frac{y+۳}{۵}=\frac{z-۴}{-۵}$.

۱۶. معادلات خط گذرنده از نقطه‌های زیر را بنویسید.

الف) $(۱, ۲, ۳)$ و $(-۲, ۳, ۳)$. جواب: $x+۳y-۷=۰$، $z=۳$.

ب) $(-۲, ۲, -۳)$ و $(۲, -۲, ۳)$. جواب: $x+y=۰$، $۳y+۲z=۰$.

ج) $(۲, ۳, ۴)$ و $(۲, -۳, -۴)$. جواب: $x-۲=۰$، $۴y-۳z=۰$.

د) $(۱, ۰, ۳)$ و $(۲, ۰, ۳)$. جواب: $y=۰$، $z=۳$.

ه) $(۲, -۱, ۳)$ و $(۶, ۷, ۴)$ به‌صورت پارامتری.

جواب: $x=۲+\frac{۴}{۹}t$، $y=-۱+\frac{۸}{۹}t$، $z=۳+\frac{۱}{۹}t$.

۱۷. معادلات خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(۱, -۲, ۳)$ می‌گذرد و با هریك از دو صفحهٔ

$۲x-۴y+z-۳=۰$ و $x+۲y-۶z+۴=۰$ موازی است.

جواب: $\frac{x-۱}{۲۲}=\frac{y+۲}{۱۳}=\frac{z-۳}{۸}$.

۱۸. معادلات خطی را بنویسید که ازنقطهٔ $(۱\,,\,۴\,,\,-۲)$ می‌گذرد و با هر یك‌ازصفحه‌های $۶x+۲y+۲z+۳=۰$ و $۳x-۵y-۲z-۱=۰$ موازی است.

جواب: $\frac{x-۱}{۱}=\frac{y-۴}{۳}=\frac{z+۲}{-۶}$.

۱۹. معادلات خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(-۲\,,\,۴\,,\,۳)$ می‌گذرد و با خط گذرنده ازدو نقطهٔ $(۴\,,\,۳\,,\,۱)$ و $(۳\,,\,۲\,,\,-۲)$ موازی است.

جواب: $x-۳y+۱۴=۰,\ y-z-۱=۰$.

۲۰. معادلات خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(۴\,,\,۱\,,\,-۳)$ می‌گذرد و بر خطهایی با پارامترهای هادی ۳، ۲، -۴ و ۲، -۳، ۲ عمود است.

جواب: $\frac{۸-۳}{۸}=\frac{y+۱}{۱۴}=\frac{z-۴}{۱۳}$.

۲۱. معادلات خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(-۳\,,\,۲\,,\,۲)$ می‌گذرد و بر خطهایی با پارامترهای هادی ۲، -۱، ۳ و -۱، ۲، ۰ عمود است.

جواب: $x-۲y+۲=۰,\ y+z+۱=۰$.

۲۲. معادلات خط گذرنده از نقطهٔ $(۴\,,\,-۲\,,\,۲)$ با زاویه‌های هادی ۱۲۰°، ۶۰°، ۴۵° را بنویسید.

جواب: $\frac{x-۲}{-۱}=\frac{y+۲}{۱}=\frac{z-۴}{\sqrt{۲}}$.

۲۳. معادلات خط‌گذرنده ازنقطهٔ $(۳\,,\,۱\,,\,-۲)$ با زاویه‌های هادی ۱۳۵°، ۶۰°، ۱۲۰° را بنویسید.

جواب: $\frac{x+۲}{-\sqrt{۲}}=\frac{y-۱}{۱}=\frac{z-۳}{-۱}$.

۲۴. معادلات خطی را بنویسید که:

الف) از نقطهٔ $(۰\,,\,۲\,,\,-۱)$ با پارامترهای هادی ۱، -۳، ۴ می‌گذرد.

جواب: $\frac{x}{۱}=\frac{y-۲}{-۳}=\frac{z+۱}{۴}$.

ب) از نقطهٔ $(-۱\,,\,۱\,,\,-۳)$ با پارامترهای هادی $\sqrt{۲}$، ۳، -۴ می‌گذرد.

جواب: $\frac{x+۱}{\sqrt{۲}}=\frac{y-۱}{۳}=\frac{z+۳}{-۴}$.

ج) از نقطهٔ $(0, 0, 0)$ با پارامترهای هادی ۱، ۱، ۱ می‌گذرد.

جواب: $x = y = z$.

د) از نقطهٔ $(-2, 3, 2)$ با پارامترهای هادی ۰، ۲، ۱ می‌گذرد.

جواب: $x+2=0,\ y-2z+1=0$.

ه) از نقطهٔ $(1, -1, 6)$ با پارامترهای هادی ۲، ۱ —، ۱ می‌گذرد.

جواب: $x = 2z-11,\ y = -z+5$.

۲۵. ثابت کنید خط $x = \frac{2}{7}z + \frac{15}{7}$ ، $y = -\frac{5}{7}z - \frac{34}{7}$ بر خط $x-y-z-7=0$، $3x-4y-11=0$ عمود است.

۲۶. ثابت کنید خطهای زیر برهم عمودند:

$$x+2y-z-1=0,\ x+y+1=0 \quad \text{و} \quad \frac{7x-15}{2} = \frac{7y+34}{-5} = \frac{z}{1}$$

۲۷. نشان دهید خطهای زیر برهم عمودند:

$$3x-2y+13=0,\ y+3z-26=0 \quad \text{و} \quad \frac{x+4}{5} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{1}$$

۲۸. نشان دهید خطهای زیر برهم عمودند:

$$\frac{z+6}{-11} = \frac{y+8}{-2} = \frac{x-3}{1} \quad \text{و} \quad 3x+5y+7=0,\ y+3z-10=0$$

۲۹. نشان دهید خطهای $x-2y+2=0$، $2y+z+4=0$ و $7x+4y-15=0$، $y+14z+40=0$ بر هم عمودند.

۳۰. نشان دهید خط $\frac{x-2}{10} = \frac{2y-2}{11} = \frac{z-5}{7}$ در صفحهٔ $3x-8y+2z-8=0$ قرار دارد. برای اینکه ثابت کنید خطی در یك صفحه قرار دارد، کافی است نشان دهید دو نقطه از خط بر صفحه واقعند، یا اینکه نشان دهید یك نقطه از خط در صفحه قرار دارد و خط، بر قائم بر صفحه عمود است.

۳۱. ثابت کنید خط $y-2x+5=0$، $z-3x-4=0$ در صفحهٔ زیر قرار دارد.

$$9x+3y-5z+35=0$$

۳۲. نشان دهید خط $x-z-۴=۰$، $y-۲z-۳=۰$ در صفحهٔ زیر قرار دارد.

$$۲x+۳y-۸z-۱۷=۰$$

۳۳. ثابت کنید خط $\frac{x-۱}{۱}=\frac{y+۲}{۲}=\frac{z-۳}{۴}$ در صفحهٔ $۲x+۳y-۲z+۱۰=۰$ قرار دارد.

۳۴. محل برخورد خط $۲x-y-۲z-۵=۰$، $۴x+y+۳z-۱=۰$ و صفحهٔ $۸x-y+z-۵=۰$ را به‌دست آورید. جواب: $\left(\frac{۳}{۲}, ۴, -۳\right)$.

۳۵. محل برخورد خط $y=-۳z+۱$، $x=z+۲$ و صفحهٔ $x-۲y-۷=۰$ را بیابید. جواب: $(۳, -۲, ۱)$.

۳۶. محل برخورد خط $\frac{x}{۱}=\frac{۲y-۳}{۱}=\frac{۲z-۱}{۵}$ و صفحهٔ $۴x-۲y+z-۳=۰$ را بیابید. جواب: $(۱, ۲, ۳)$.

۳۷. محل برخورد خط $x+۲y+۴z-۲=۰$، $۲x+۳y-۲z+۳=۰$ و صفحهٔ $۲x-y+۴z+۸=۰$ را بیابید. جواب: $\left(-۴, ۲, \frac{۱}{۲}\right)$.

۳۸. معادلات خطی‌را تعیین کنید که درصفحهٔ $x+۳y-z+۴=۰$ قرار داشته و برخط $x-۲z-۳=۰$, $y-۲z=۰$ در نقطهٔ تلاقی خط و صفحه عمود باشد.
جواب: $۴x+۵z+۱=۰$، $۳x+۵y+۷=۰$.

۳۹. نشان‌دهید نقطه‌های $(۲, -۳, ۱)$، $(۵, ۴, -۴)$ و $(۸, ۱۱, -۹)$ بر یک‌استقامت هستند.

۴۰. نقطهٔ برخورد خطهای $۲x+y-۵=۰$ و $۳x+z-۱۴=۰$ و $x-۴y-۷=۰$ و $۵x+۴z-۳۵=۰$ را به‌دست آورید.
جواب: $(۳, -۱, ۵)$.

۴۱. نقطهٔ تقاطع خطهای $x-y-z+۸=۰$ و $۵x+y+z+۱۰=۰$ و $x+y+z-۲=۰$، $۲x+y-۳z+۹=۰$ را تعیین کنید.
جواب: $(-۳, ۳, ۲)$.

۴۲. نقطهٔ تلاقی دو خط $x+۵y-۷z+۱=۰$، $۱۰x-۲۳y+۴۰z-۲۷=۰$ و $x-y+z+۱=۰$ و $۲x+y-۲z+۲=۰$ را مشخص کنید.

جواب: $\left(-\frac{۱}{۳۸}, \frac{۱۴۸}{۳۸}, \frac{۱۱۱}{۳۸}\right)$.

۴۳. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌هایی را که از سه نقطهٔ $(۳, -۱, ۲)$، $(۴, -۶, -۵)$ و $(۰, ۰, -۳)$ به‌یک فاصله‌اند، به‌صورت متقارن به‌دست آورید.

جواب: $\frac{x}{۱۶}=\frac{y+\frac{۱۷۵}{۳۲}}{۱۳}=\frac{z+\frac{۱۹}{۳۲}}{-۷}$.

۴۴. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌هایی را که از نقطه‌های $(۳, -۲, ۴)$، $(۵, ۳, -۲)$ و $(۰, ۴, ۲)$ به‌یک فاصله‌اند، به‌صورت متقارن بیابید.

جواب: $\frac{x-\frac{۱۸}{۱۱}}{۲۶}=\frac{y}{۲۲}=\frac{z+\frac{۹}{۴۴}}{۲۷}$.

۱۵

رویه‌ها

سطوح درجهٔ دوم. سطحی که به‌وسیلهٔ یك معادلهٔ درجهٔ دوم سه‌متغیره تعریف می‌شود، رویه نام دارد که به‌آن سطح درجهٔ دوم مخروطی‌گون نیز می‌گویند. هرمقطع مستوی ازیك‌سطح درجهٔ دوم، یك مقطع مخروطی یا حالت محدود شدهٔ آن است.

عمومی‌ترین صورت معادلهٔ درجهٔ دوم سه‌متغیره به‌صورت زیر است:

$$Ax^{2}+By^{2}+Cz^{2}+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0$$

معادلهٔ عمومی را می‌توان از طریق دوران یا انتقال محورها، یا هردو به‌یکی از دو گونهٔ زیر تبدیل کرد:

$$Ax^{2}+By^{2}+Cz^{2}=D \qquad (1)$$

$$Ax^{2}+By^{2}+Iz=0 \qquad (2)$$

اگر هیچیك از مقادیر ثابت رابطه‌های (۱) و (۲) برابر صفر نباشند، معادله را می‌توان به‌یکی از دوصورت زیر نوشت:

$$\pm\frac{x^{2}}{a^{2}}\pm\frac{y^{2}}{b^{2}}\pm\frac{z^{2}}{c^{2}}=1 \qquad (3)$$

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c} \qquad (۴)$$

حال رابطهٔ (۳) تنها می‌تواند بیانگر سه‌رویهٔ متمایز اصلی باشد، که دارای معادلاتی به‌صورت زیر هستند:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ ,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\ ,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (۵)$$

چون رویه‌های رابطهٔ (۵) نسبت به مبدأ مختصات متقارن هستند، آنها را سطح درجهٔ دوم مرکزی می‌نامند.

دو رویه‌ای که با رابطهٔ (۴) ارائه گردیدند سطوح درجهٔ دوم غیرمرکزی هستند.

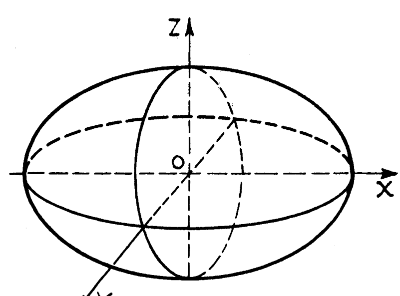
کره. اگر دررابطهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$، $a=b=c$ باشد، معادلهٔ فوق به‌صورت $x^2+y^2+z^2=a^2$ نوشته می‌شود که معادلهٔ کره‌ای به‌مرکز $(0,0,0)$ و به‌شعاع a است.

اگر مرکز کره نقطهٔ (h, k, j) باشد، معادلهٔ کره به‌صورت زیراست:

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-j)^2=a^2$$

بیضیگون. اگر a، b، c با هم مساوی نباشند، معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ صورت کلی معادلهٔ بیضیگون را نشان می‌دهد. اگر $a\neq b$ ولی $b=c$، رویهٔ فوق یك بیضیگون دوار است.

اگرمرکز بیضیگون نقطهٔ (h, k, j) وقطرهای آن با محورهای مختصات موازی باشد، معادلهٔ بیضیگون به‌صورت $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-j)^2}{c^2}=1$ خواهد بود.



اگر مبدأ مختصات مرکز بیضیگون باشد، معادله به صورت $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ درمی آید.

هذلولیگون یکپارچه. اگردرمعادلهٔ بیضیگون علامت یك متغیرعوض شود، مثلاً به‌صورت $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ باشد، رویه را هذلولیگون یکپارچه گویند.

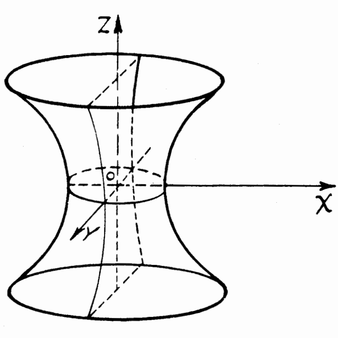
اگر $a=b$ باشد، رویه، هذلولیگون یکپارچهٔ دوار است.

مقاطعی که با صفحه‌های xz و yz موازی هستند، هذلولی می باشند.

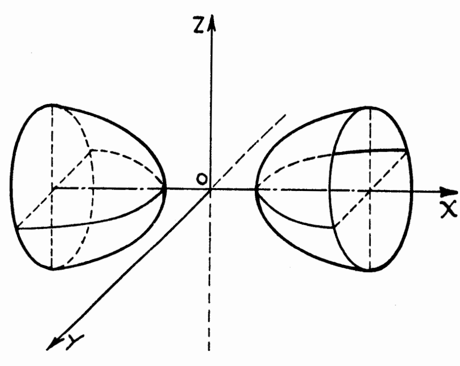
مقاطعی که با صفحهٔ xy موازیند بیضی هستند به‌استثنای هذلولیگون دوار که درآن مقاطع دایره هستند.

هذلولیگون دوپارچه. معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ نمایشگر یك هذلولیگون دوپارچه است. معادلهٔ هذلولیگون دوپارچه همانند معادلهٔ بیضیگون است بااین تفاوت که‌علامتهای دومتغیر تغییر کرده است. اگر $b=c$ باشد، رویهٔ موردنظر سطحی دوار است.

مقاطعی که با صفحه‌های xy و xz موازیند، هذلولی هستند. مقاطع موازی‌باصفحهٔ yz بیضی هستند به‌استثنای هذلولیگون دوارکه درآن مقاطع دایره هستند.



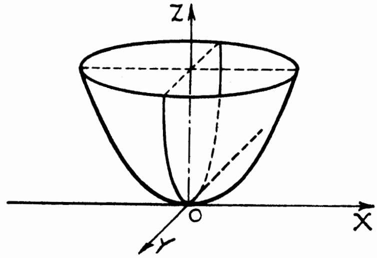
هذلولیگون یکپارچه



هذلولیگون دوپارچه

سهمیگون بیضوی. این رویه مکان هندسی معادله‌ای به‌صورت $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz$ است.

مقطعی که به‌وسیلهٔ صفحهٔ $z=k$ ایجاد می‌شود، بیضیی است که وقتی صفحهٔ برش ازصفحهٔ xy دورشود، اندازهٔ آن بزرگتر می‌شود.



اگر $c>0$، رویه کاملاً بالای صفحهٔ xy قرار می‌گیرد. اگر $c<0$، رویه کاملاً پایین صفحهٔ xy قرار می‌گیرد.

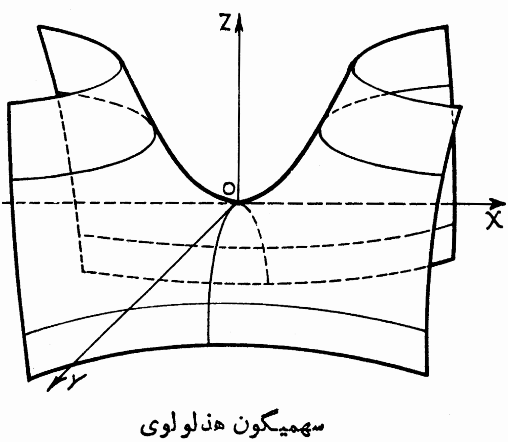
مقاطعی که به‌وسیلهٔ صفحه‌های موازی با صفحهٔ xz یا yz ایجاد می‌شوند سهمی هستند.

اگر $a=b$، رویهٔ موردنظر سطحی دوار است.

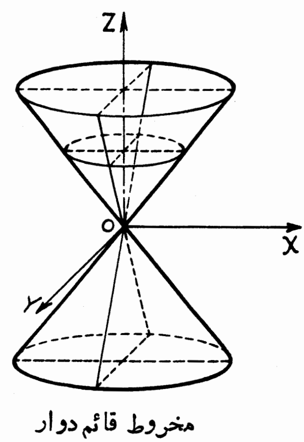
سهمیگون هذلولوی. مکان هندسی هرمعادله به صورت $(c>0)$، $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2cz$، سهمیگون هذلولوی است.

مقطع حادث به‌وسیلهٔ صفحهٔ $z=k$، اگر $k>0$ باشد هذلولیی است که محورهای کانونی و غیرحقیقی آن به‌ترتیب با محور xها و yها موازی است و با افزایش مقدار k بزرگتر می‌شود. اگر $k<0$ باشد، محورهای کانونی و غیرحقیقی به‌ترتیب با محور yها و xها موازیند. اگر $k=0$ باشد، رد صفحه، یک جفت خط راست به‌معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ است.

مقطع حادث به‌وسیلهٔ صفحهٔ $y=k$، یک سهمی است که به سمت بالا باز است و



سهمیگون هذلولوی



مخروط قائم دوار

به‌همین ترتیب مقطع حادث به‌وسیلهٔ صفحهٔ $x=k$، یك سهمی است که به‌سمت پایین باز است.

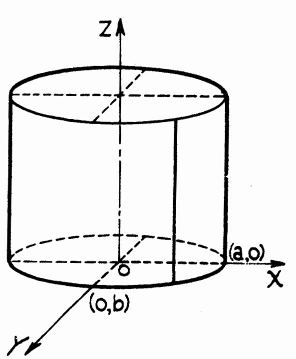
مخروط قائم دوار. $x^۲+y^۲-c^۲z^۲=\circ$. این رویه را می‌توان به عنوان سطح دواری درنظر گرفت که با دوران خط $y=kx$ حول محور zها پدید می‌آید.

هرمقطع افقی که به وسیلهٔ صفحه‌ای موازی با صفحهٔ xy ایجاد می‌شود، یك دایره است. هرمقطع دلخواه حادث ازصفحه‌ای به‌موازات صفحهٔ yz یا به‌موازات صفحهٔ xz یك هذلولی است.

رویهٔ استوانه‌ای. هررویهٔ استوانه‌ای ازحرکت خط راستی درامتداد یك منحنی ثابت که باخط راست ثابتی‌موازی باقی می‌ماند، پدید می آید. منحنی‌ثابت به‌هادی رویهٔ استوانه‌ای وخط متحرك به‌مولد رویهٔ مذکور موسومند.

هررویهٔ استوانه‌ای که مولدش با یکی ازمحورهای مختصاتی موازی و هادیش یك منحنی درصفحهٔ مختصاتیی باشدکه برمولدش عمود است، دارای همان معادلهٔ منحنی‌هادی است.

اگرمنحنی هادی، یك بیضی به‌معادله $\dfrac{x^۲}{a^۲}+\dfrac{y^۲}{b^۲}=۱$ باشد، معادلهٔ رویهٔ‌استوانه‌ای به‌صورت $\dfrac{x^۲}{a^۲}+\dfrac{y^۲}{b^۲}=۱$ خواهد بود.



مسئله‌های حل شده

۰۱ معادلهٔ‌کره‌ای را به‌دست‌آوریدکه مرکزش (۳— ,۱ ,۲—) وشعاع آن ۴ باشد.

اگر مقادیرداده شده را درمعادلهٔ $(x-h)^۲+(y-k)^۲+(z-j)^۲=a^۲$ قرار

دهیم، داریم، $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4^2$. این عبارت را بسط می‌دهیم وجملات را دسته بندی می‌کنیم:

$$x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z-2=0$$

۲. مطلوب است تعیین معادلهٔ کره‌ای به‌مرکز $(3,\ 6,\ -4)$ که برصفحهٔ زیر مماس باشد:

$$2x-2y-z-10=0$$

شعاع کره، $a=\left|\dfrac{2(3)-2(6)-1(-4)-10}{3}\right|=4$ پس معادلهٔ مطلوب عبارت است از، $(x-3)^2+(y-6)^2+(z+4)^2=16$، یا
$x^2+y^2+z^2-6x-12y+8z+45=0$.

۳. معادلـه‌کـرهٔ گذرنـده از نقطه‌هـای $(1,\ 9,\ 7)$، $(2,\ -3,\ -2)$، $(5,\ 5,\ 1)$ و $(5,\ 2,\ -6)$ را به‌دست آورید.

بااستفاده از دستور $x^2+y^2+z^2+Gx+Hy+Iz+K=0$ و با قراردادن مختصات چهارنقطه درآن:

$$7G+9H+I+K=-131$$

$$-2G-3H+2I+K=-17$$

$$G+5H+5I+K=-51$$

$$-6G+2H+5I+K=-65$$

پس از حل چهارمعادلهٔ بالا، $G=8$، $H=-14$، $I=18$، $K=-79$ حاصل می‌شود. اگراین مقادیر را درمعادلهٔ عمومی کره قرار دهیم، معادلهٔ زیر به‌دست‌می‌آید:

$$x^2+y^2+z^2+8x-14y+18z-79=0$$

۴. مختصات مـرکز و شعاع کـرهٔ $x^2+y^2+z^2-6x+4y-3z=15$ را به‌دست آورید.

جملات شامل‌متغیرهای x، y و z را جداگانه به‌صورت مربع‌کامل درمی‌آوریم و با معادلهٔ $(x-h)^2+(y-k)^2+(z-j)^2=a^2$ مقایسه می‌کنیم.

$$x^2-6x+9+y^2+4y+4+z^2-3z+\frac{9}{4}=\frac{121}{4}$$

یا
$$(x-3)^2+(y+2)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{11}{2}\right)^2$$

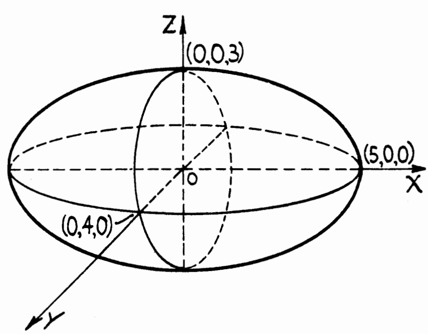
کره دارای مرکز $\left(3, -2, \frac{3}{2}\right)$ و شعاع $\frac{11}{2}$ است.

۵. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطه‌ای که فاصله‌های آن از $(-2, 2, -2)$ و $(3, -3, 3)$ از نظر عددی به نسبت ۲:۳ باشد.

$$\frac{\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2}}{\sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2}}=\frac{2}{3}$$

طرفین تساوی را به توان دو می‌رسانیم. پس از طرفین وسطین کردن و دسته‌بندی جملات معادلهٔ $x^2+y^2+z^2+12x-12y+12z=0$ به‌دست می‌آید، که کره‌ای است، به‌مرکز $(-6, 6, -6)$ و به‌شعاع $6\sqrt{3}$.

۶. رویهٔ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ را مورد بحث و بررسی قرار دهید و این رویه را رسم کنید.



این رویه نسبت به‌هریك از صفحه‌های مختصاتی ومبدأ مختصات متقارن است. نقطهٔ تلاقی این رویه با محور xها ± 5، با محور yها ± 4 و با محور zها ± 3 است.

رد این رویه درصفحهٔ xy بیضی $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ با نصف قطرهای ۵ و ۴ است.

به‌همین ترتیب رداین سطح درصفحه‌های xz و yz بیضی هستند و این سطح یك بیضیگون است.

۷. جملات شامل متغیرهای x، y و z را به‌صورت مربع کامل درآورید و ثابت کنید معادلهٔ زیر نمایشگر یك بیضیگون است. مرکز آن را تعیین و طول نصف قطرهای بیضیگون را مشخص کنید.

$$۲x^۲+۳y^۲+z^۲-۸x+۶y-۴z-۳=۰$$

$$۲(x^۲-۴x+۴)+۳(y^۲+۲y+۱)+(z^۲-۴z+۴)=$$
$$=۳+۸+۳+۴=۱۸$$
$$۲(x-۲)^۲+۳(y+۱)^۲+(z-۲)^۲=۱۸$$

اگر طرفین تساوی را بر ۱۸ تقسیم کنیم، حاصل می‌شود:

$$\frac{(x-۲)^۲}{۹}+\frac{(y+۱)^۲}{۶}+\frac{(z-۲)^۲}{۱۸}=۱$$

که یك بیضیگون به‌مرکز $(۲,-۱,۲)$ و نصف قطرهای ۳، $\sqrt{۶}$ و $۳\sqrt{۲}$ است.

۸. نشان دهید اگر نقطه‌ای طوری حرکت کند که مجموع فاصله‌های آن از نقطهٔ $(۲,۳,۴)$ و $(۲,-۳,۴)$ برابر ۸ باشد، مکان هندسی نقطه، یك بیضیگون است. مرکز و نصف قطرهای آن را به‌دست آورید.

$$\sqrt{(x-۲)^۲+(y-۳)^۲+(z-۴)^۲}+$$
$$+\sqrt{(x-۲)^۲+(y+۳)^۲+(z-۴)^۲}=۸$$

یا

$$\sqrt{(x-۲)^۲+(y-۳)^۲+(z-۴)^۲}=۸-$$
$$-\sqrt{(x-۲)^۲+(y+۳)^۲+(z-۴)^۲}$$

طرفین تساوی بالا را به‌توان‌دو می‌رسانیم و جملات را دسته‌بندی می‌کنیم:

$$۳y+۱۶=۴\sqrt{(x-۲)^۲+(y+۳)^۲+(z-۴)^۲}$$

مجدداً طرفین تساوی را به‌توان‌دو می‌رسانیم و جملات را دسته‌بندی می‌کنیم:

$$۱۶x^۲+۷y^۲+۱۶z^۲-۶۴x-۱۲۸z+۲۰۸=۰$$

جملات شامل متغیر x، y و z را به‌صورت مربع کامل درمی‌آوریم. معادلهٔ $\frac{(x-۲)^۲}{۷}+\frac{(y-۰)^۲}{۱۶}+\frac{(z-۴)^۲}{۷}=۱$ حاصل می‌شود که یك بیضیگون دوار با مرکز $(۲,۰,۴)$ و نصف قطرهای $\sqrt{۷}$، ۴، $\sqrt{۷}$ است.

۹. معادلهٔ بیضیگونی را به‌دست آورید که از نقطه‌های $(۲,۲,۴)$، $(۰,۰,۶)$ و $(۲,۴,۲)$ می‌گذرد و صفحه‌های مختصات، صفحه‌های تقارن آن است.

معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ را مورد استفاده قرار می‌دهیم و به جای x، y و z مختصات نقطه‌های داده شده را قرار می‌دهیم:

$$\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{16}{c^2}=1$$

$$\frac{0}{a^2}+\frac{0}{b^2}+\frac{36}{c^2}=1$$

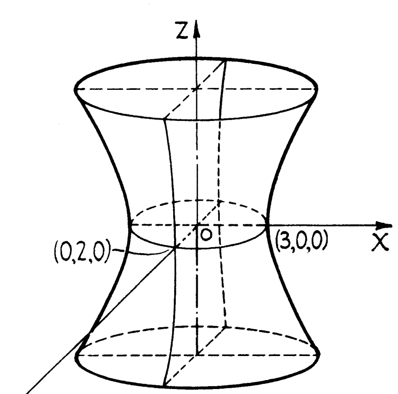
$$\frac{4}{a^2}+\frac{16}{b^2}+\frac{4}{c^2}=1$$

پس از حل معادلات نسبت به a^2، b^2 و c^2 داریم، $a^2=9$، $b^2=36$، $c^2=36$.
اگر این مقادیر را در معادلهٔ اصلی قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{36}=1 \quad \text{، یا} \quad 4x^2+y^2+z^2=36$$

۱۰. معادلهٔ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ را مورد بحث و بررسی قرارداده ونمودار آن‌را رسم کنید.

این رویه نسبت به هریک از صفحه‌های مختصات وهمچنین مبدأ مختصات متقارن است.
نقطهٔ تقاطع رویه بـا محور xها و yها به‌ترتیب ± 3 و ± 2 است. ایـن رویه، محور zها را درهیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند.



مقاطعی که به‌وسیلهٔ صفحه‌های $z=k$ ایجاد می‌شود، بیضیهایی هستند که مرکزشان روی محور zها قراردارد. وقتی k زیاد شود این بیضیها نیز بزرگ می‌شوند.

مقاطعی از این رویه که به‌وسیلهٔ صفحه‌های موازی با صفحه‌های xz یا yz پدید می‌آید، هذلولی هستند.

این رویه هذلولیگون یکپارچه است.

۱۱. نخست جملات شامل x، y و z را به‌صورت مربع‌کامل درآورید، آنگاه نوع رویه به‌معادلهٔ $۳x^۲+۴y^۲-۲z^۲+۶x-۱۶y+۸z=۱۳$ را تعیین کنید.

$$۳(x^۲+۲x+۱)+۴(y^۲-۴y+۴)-۲(z^۲-۴z+۴)=۱۳+۱۱=۲۴،$$

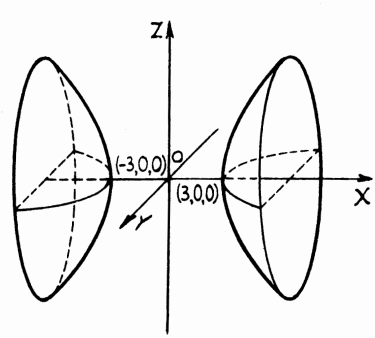
یا $\frac{(x+۱)^۲}{۸}+\frac{(y-۲)^۲}{۶}-\frac{(z-۲)^۲}{۱۲}=۱$ که معادلهٔ هذلولیگون یکپارچه‌ای به مرکز $(-۱, ۲, ۲)$ است ومحورکانونیش با محور zها موازی است. مقاطع ایجاد شده به‌وسیلهٔ صفحه‌های موازی صفحهٔ xy، بیضی هستند. مقاطع ایجاد شده به وسیلهٔ صفحه‌های موازی صفحهٔ xz یا yz هذلولی هستند.

۱۲. معادلهٔ $\frac{x^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۴}-\frac{z^۲}{۱۶}=۱$ را مورد بحث وبررسی قرار دهید و نمودار آن را رسم کنید.

این رویه نسبت به‌هریك از صفحه‌های مختصات و مبدأ مختصات متقارن است. نقطهٔ تلاقی آن با محور xها ±۳ است واین رویه محور yها یا zها را قطع نمی‌کند.

مقاطعی ازاین رویه‌که به‌وسیلهٔ صفحه‌های موازی با صفحه‌های xy و xz ایجاد می‌شود هذلولی هستند. مقاطع حاصل از صفحه‌های موازی با صفحهٔ yz بیضی هستند.

این رویه یك هذلولیگون دوپارچه است.



۱۳۰ ابتدا جملات شامل متغیرهای x، y و z را به‌صورت مربع کامل درآورید، آنگاه نوع رویه به‌معادلهٔ $2x^2-3y^2-2z^2-8x+6y-12z-21=0$ را مشخص کنید.

$$2(x^2-4x+4)-3(y^2-2y+1)-2(z^2+6z+9)=8،$$

یا
$$\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{\frac{8}{3}}-\frac{(z+3)^2}{4}=1$$

که معادلهٔ یك هذلولیگون دوپارچه به‌مرکز $(2, 1, -3)$ ومحورکانونی، موازی با محور xها است.

۱۴۰ معادلهٔ مکان‌هندسی نقطه‌ای را بیابیدکه تفاضل فاصله‌های آن ازدونقطهٔ $(-4, 3, 1)$ و $(4, 3, 1)$ برابر ۶ است.

$$\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}-$$
$$-\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}=6$$

یا
$$\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}=6+$$
$$+\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}$$

طرفین تساوی را به‌توان‌دو می‌رسانیم وجملات را دسته‌بندی می‌کنیم:

$$4x-9=3\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}.$$

پس از به‌توان دو رساندن و دسته‌بندی جملات:

$$7x^2-9y^2-9z^2+54y+18z=153$$

جملات شامل x، y و z را به‌صورت مربع‌کامل درمی‌آوریم:

$$\frac{(x-0)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{7}-\frac{(z-1)^2}{7}=1$$

که هذلولیگون دوپارچه به‌مرکز $(0, 3, 1)$ وبا محورکانونی، موازی محور xها است. چون مقاطع موازی با صفحهٔ yz، دایره هستند، رویهٔ مذکور هذلولیگون دوپارچهٔ دوار است.

۱۵۰ معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بیابیدکه فاصله‌اش ازنقطهٔ $(2, -1, 3)$ دو برابر

فاصله‌اش از محور xهاست.

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2}=2\sqrt{y^2+z^2}$$

طرفین تساوی را به‌توان‌دو می‌رسانیم وجملات را دسته‌بندی می‌کنیم:

$$x^2-3y^2-3z^2-4x+2y-6z=-14.$$

عبارت را به‌صورت مربع‌کامل درمی‌آوریم:

$$(x-2)^2-3\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-3(z+1)^2=-\frac{40}{3},$$

یا

$$\frac{\left(y-\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{40}{9}}+\frac{(z+1)^2}{\frac{40}{9}}-\frac{(x-2)^2}{\frac{40}{3}}=1$$

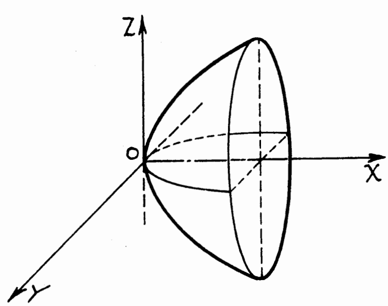
که هذلولیگون یکپارچهٔ دواری است به‌مرکز $\left(2,\frac{1}{3},-1\right)$، که حول محور xها دوران کرده است.

۱۶. رویهٔ $4x=z^2+y^2$ را مورد بحث وبررسی قرار دهید و نمودارآن را رسم‌کنید.

این رویه نسبت به‌صفحه‌های xz و xy ومحور xها متقارن است.

محل تلاقی این رویه با هریك از محورهای مختصات مبدأ است. ردهای این رویه به‌ترتیب دایره نقطهٔ $y^2+z^2=0$ وسهمیهای $z^2=4x$ و $y^2=4x$ است.

چون x نمی‌تواند هیچیك ازمقادیر منفی را اختیار‌کند، رویه کاملاً درطرف‌راست صفحهٔ yz واقع است. مقطعهایی ازاین رویه‌که به‌وسیلهٔ صفحه‌های موازی باصفحهٔ yz پدید می‌آیند، دایره هستند. مقطعهایی که به‌وسیلهٔ صفحه‌های موازی با دو صفحهٔ xy و xz ایجاد می‌شود، سهمی هستند. این سطح یك سهمیگون دوار است.



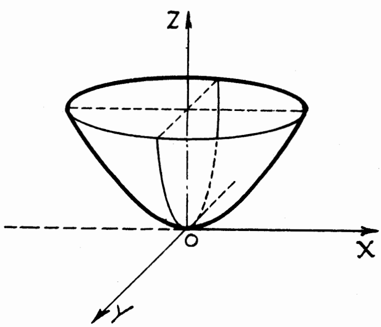
۱۷. مطلوب است تعیین معادلهٔ سهمیگون به‌رأس مبدأ مختصات که محور OZ محور تقارن آن باشد و از نقطه‌های $(۱, ۰, ۳)$ و $(۲, ۲, ۳)$ بگذرد.

از معادلهٔ $Ax^۲+By^۲=Cz$ استفاده می‌کنیم. اگر مختصات نقطه‌های فوق را در معادله قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$۹A+۰B=C \quad \text{یا} \quad ۹A=C \qquad (۱)$$

$$۹A+۴B=۲C \qquad (۲)$$

پس از حل دستگاه، $A=\frac{C}{۹}$، $B=\frac{C}{۴}$. با قراردادن این مقادیر به‌جای A و B در رابطهٔ $Ax^۲+By^۲=Cz$، معادلهٔ مطلوب به‌صورت $۴x^۲+۹y^۲=۳۶z$، یا $\frac{x^۲}{۹}+\frac{y^۲}{۴}=\frac{z}{۱}$ که معادلهٔ یک سهمیگون بیضوی است، به‌دست می‌آید.



۱۸. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که مربع فاصله‌اش از محور xها همواره سه‌برابر فاصله‌اش از صفحهٔ yz است.

فرض می‌کنیم (x, y, z) معرف نقطهٔ مفروض باشد، دراین‌صورت $y^۲+z^۲=۳x$.
این رویهٔ یک سهمیگون دوار است که نسبت به‌محور xها متقارن است.

۱۹. ابتدا عبارت زیر را نسبت به x و y به‌صورت مربع کامل درآورید وسپس مختصات رأس سهمیگون بیضوی به معادلهٔ $۳x^۲+۲y^۲-۱۲z-۶x+۸y-۱۳=۰$ را تعیین کنید.

$$۳(x^۲-۲x+۱)+۲(y^۲+۴y+۴)=۱۲z+۱۳+۱۱=۱۲z+۲۴،$$

یا $$۳(x-۱)^۲+۲(y+۲)^۲=۱۲(z+۲)،$$

یا $$\frac{(x-۱)^۲}{۴}+\frac{(y+۲)^۲}{۶}=\frac{z+۲}{۱}.$$

رأس این رویه، نقطهٔ $(۲-, ۲-, ۱)$ است.

۲۰. رویهٔ زیررا مورد بحث وبررسی قراردهید ونوع آن را مشخص کنید.

$$۹x^۲ - ۴y^۲ = ۳۶z$$

رویهٔ فوق نسبت به‌صفحه‌های xz، yz و محور zها متقارن است. نقطهٔ تقاطع رویه با هریك ازمحورهای مختصات مبدأ است.

اگر $z = ۰$ باشد، رد این رویه روی صفحهٔ xy، یك زوج خط متقاطع به معادلهٔ $۹x^۲ - ۴y^۲ = ۰$، یا $۳x + ۲y = ۰$ و $۳x - ۲y = ۰$ است.

اگر $y = ۰$ باشد، رد رویه، روی صفحهٔ xz، سهمی $۹x^۲ = ۳۶z$ ، یا $x^۲ = ۴z$ است. این سهمی دارای رأسی درمبدأ مختصات است که دهانهٔ آن به‌طرف بالا باز است.

اگر $x = ۰$ باشد، این رویه، روی صفحهٔ yz سهمی $-۴y^۲ = ۳۶z$ ، یا $y^۲ = -۹z$ است. رأس این سهمی مبدأ مختصات ولی دهانهٔ‌آن به سمت پایین باز است.

مقاطعی ازاین رویه که به‌وسیلهٔ $z = k$ ایجاد می‌شود، هذلولی هستند. اگر kعددی مثبت باشد، محورکانونی هذلولی با محور xها موازی است و اگر k منفی باشد، محورکانونی هذلولی موازی محور yهاست. به‌همین‌ترتیب، مقاطع موازی با صفحهٔ xz و موازی باصفحهٔ yz سهمی هستند.

این رویه یك سهمیگون هذلولوی است.

۲۱. معادلهٔ سهمیگون به‌رأس $(۰, ۰, ۰)$ را به‌دست‌آوریدکه محور آن محور Oy باشد و ازنقطه‌های $(۱, ۲-, ۱)$ و $(۲, ۳-, ۳-)$ بگذرد.

معادلهٔ $Ax^۲ + Cz^۲ = By$ را مورداستفاده قرار می‌دهیم. پس ازقراردادن‌مختصات دونقطهٔ داده شده دررابطهٔ فوق، خواهیم داشت:

$$A + C = -۲B$$

$$۹A + ۴C = -۳B$$

اگردستگاه بالارانسبت به A و C برحسب Bحل کنیم،داریم $A = B$، $C = -۳B$.

این مقادیررا به‌جای A وC درمعادله قرارمی‌دهیم وطرفین معادلهٔ حاصل را بر B تقسیم می کنیم. خواهیم داشت، $x^۲ - ۳z^۲ = y$،که یك سهمیگون هذلولوی است.

۲۲. مکان هندسی مخروط $x^۲ - ۳z^۲ + ۲y^۲ = ۰$ را تجزیه وتحلیل‌کنید و نمودارآن را

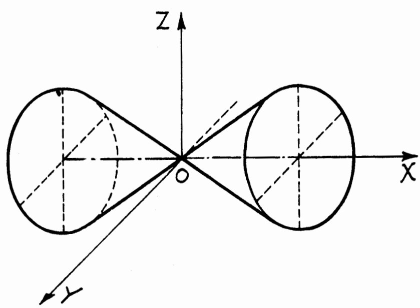
این رویه نسبت به‌هریك از صفحه‌های مختصات و مبدأ مختصات متقارن است. نقطهٔ تقاطع رویه با هریك ازمحورهای مختصات $(0, 0, 0)$ است.

اگر $x=0$، رویه درصفحهٔ yz، هیچ گونه ردی به‌جا نمی‌گذارد.

اگر $y=0$، رد این رویه در صفحهٔ xz، زوج خط متقاطع $3z^2-x^2=0$، یا $\sqrt{3}z+x=0$ و $\sqrt{3}z-x=0$ است.

اگر $z=0$، رد این رویه روی صفحهٔ xy، زوج خط متقاطع $2y^2-x^2=0$، یا $\sqrt{2}y-x=0$ و $\sqrt{2}y+x=0$ است.

مقاطعی از این رویه که به‌وسیلهٔ صفحهٔ $x=k$ ایجاد می‌شود، به‌ازای تمام مقادیر k مخالف صفر، بیضی هستند. به‌همین‌ترتیب، مقاطعی از این رویه که به‌وسیلهٔ صفحات موازی با صفحه‌های xy یا xz پدید می‌آیند هذلولی هستند.



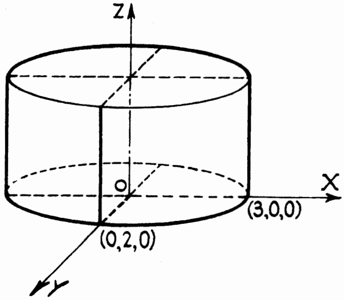
۲۳. نقطه‌ای طوری حرکت می‌کند که فاصلهٔ آن از محور yها همواره سه‌برابر فاصله‌اش ازمحور zهاست. معادلهٔ مکان هندسی نقطه را به‌دست آورید ونوع رویه را مشخص کنید.

$\sqrt{x^2+z^2}=3\sqrt{x^2+y^2}$، یا $x^2+z^2=9x^2+9y^2$، یا $8x^2+9y^2-z^2=0$

رویهٔ فوق، مخروطی است به‌رأس مبدأ مختصات که محور آن محور zهاست.

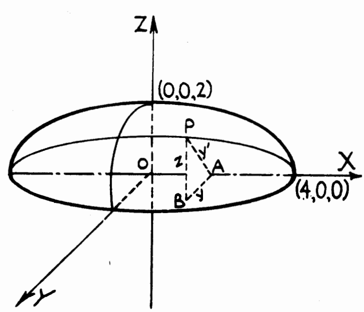
۲۴. مکان هندسی رویهٔ $4x^2+9y^2=36$ را رسم کنید.

این رویه استوانه‌ای است که مولدهای آن موازی محور zها بوده و منحنی هادی آن بیضی $4x^2+9y^2=36$ است.



۲۵. مطلوب است تعیین معادلهٔ سطح دواری که با دوران بیضی $x^۲+۴z^۲-۱۶=۰$ حول محور xها پدید می‌آید.

فرض می‌کنیم نقطهٔ $P(x, y, z)$ نقطه‌ای دلخواه روی سطح باشد. از نقطهٔ P عمودی بر صفحهٔ xy فرود می‌آوریم. درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABP، $AB=y$، $BP=z$. فرض می‌کنیم $AP=y'$؛ در نتیجه $y^۲+z^۲=y'^۲$. اما بنا به‌معادلهٔ بیضی، $x^۲=۱۶-۴y'^۲$. با قراردادن $y^۲+z^۲=y'^۲$ دررابطهٔ اخیر، داریم، $x^۲=۱۶-۴(y^۲+z^۲)$، یا $x^۲+۴y^۲+۴z^۲=۱۶$، که یك بیضیگون دوار است ومحورکانونی آن محور xهاست.



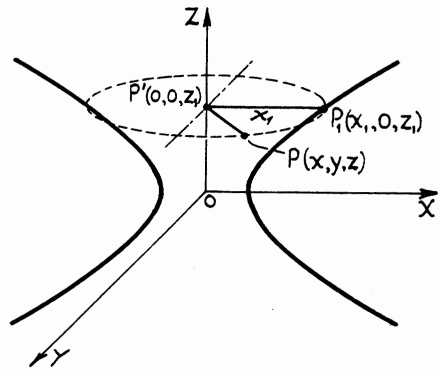
۲۶. مطلوب است تعیین معادلهٔ سطح دواری که از دوران هذلولی $x^۲-۲z^۲=۱$ حول محور zها ایجاد می‌شود.

فرض می‌کنیم $P_۱(x_۱, ۰, z_۱)$ نقطه‌ای دلخواه واقع برهذلولی و $P'(۰, ۰, z_۱)$ تصویر نقطهٔ $P_۱$ برمحور zها باشد. اگر هذلولی را حول محور zها دوران دهیم، نقطهٔ $P_۱$ دایره‌ای را پدید خواهد آورد که P' مرکز آن و $P'P_۱$ شعاعش خواهد بود. فرض می‌کنیم $P(x, y, z)$ نقطه‌ای دلخواه روی دایره وبنا براین نقطهٔ‌دلخواهی روی رویهٔ مطلوب باشد.

چون $z_۱=z$ و $P'P_۱=P'P$، داریم:

$$x_1=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z_1)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

اگر درمعادلهٔ هذلولی $x_1^2-2z_1^2=1$، $x_1=\sqrt{x^2+y^2}$ و $z_1=z$ را قرار دهیم، معادلهٔ $x^2+y^2-2z^2=1$ حاصل می‌شود که هذلولیگون یکپارچه است.

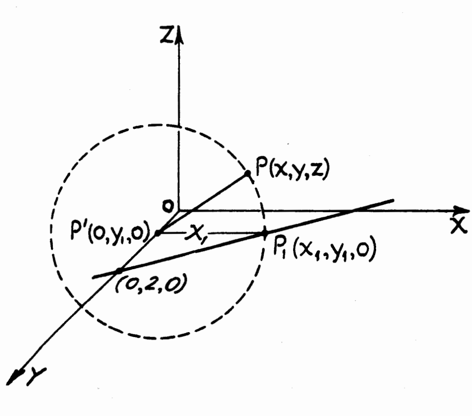


۲۷. معادلهٔ سطح دواری را به‌دست آورید که از دوران خط $2x+3y=6$ حول محور yها پدید می آید.

فرض می کنیم نقطهٔ $P_1(x_1, y_1, 0)$ نقطه‌ای دلخواه روی خط و $P'(0, y_1, 0)$ تصویر آن روی محور yها باشد. اگر خط را حول محور yها دوران دهیم، نقطهٔ P_1 دایره‌ای را پدید می‌آورد که مرکزش P' وشعاعش $P'P_1$ است. فرض‌می کنیم $P(x, y, z)$ نقطه‌ای دلخواه روی این دایره و بنا براین نقطه‌ای دلخواه روی رویهٔ مطلوب باشد.

چون $y_1=y$ و $P'P_1=P'P$ است، درنتیجه $x_1=\sqrt{x^2+z^2}$.

اگر درمعادلهٔ خط، $2x_1+3y_1=6$، مقدار $x_1=\sqrt{x^2+z^2}$ و $y_1=y$ را قرار



دهیم، نتیجه می‌شود، $۲\sqrt{x^۲+z^۲}+۳y=۶$. پس‌ازساده‌کردن، این‌معادله به‌صورت $۴x^۲-۹(y-۲)^۲+۴z^۲=۰$ تبدیل می‌شود که یک مخروط به‌رأس $(۰, ۲, ۰)$ است.

مسئله‌های تکمیلی

۱. معادلهٔ هریك از کره‌های زیررا به‌دست‌آورید.

الف) مرکز $(۲, -۱, ۳)$، شعاع ۴.

جواب: $x^۲+y^۲+z^۲-۴x+۲y-۶z-۲=۰$.

ب) مرکز $(-۱, ۲, ۴)$، شعاع $\sqrt{۱۳}$.

جواب: $x^۲+y^۲+z^۲+۲x-۴y-۸z+۸=۰$.

ج) خطی که نقطهٔ $(-۵, ۲, ۶)$را به‌نقطهٔ $(-۴, ۰, ۷)$ متصل‌می‌کندیك قطر کره‌است.

جواب: $x^۲+y^۲+z^۲-۲x-۲y-۲z-۵۹=۰$.

د) مرکز $(-۲, ۲, ۳)$ وازنقطهٔ $(۱, -۳, ۴)$ می‌گذرد.

جواب: $x^۲+y^۲+z^۲+۴x-۴y-۶z-۲۸=۰$.

ه) مرکز $(۶, ۳, -۴)$ وبرمحور xها مماس است.

جواب: $x^۲+y^۲+z^۲-۱۲x-۶y+۸z+۳۶=۰$.

۲. معادلهٔ هریك ازکره‌های زیررا به‌دست‌آورید.

الف) مرکز $(-۴, ۲, ۳)$ وبرصفحهٔ $۲x-y-۲z+۷=۰$ مماس است.

جواب: $x^۲+y^۲+z^۲+۸x-۴y-۶z+۲۰=۰$.

ب) مرکز $(۲, -۳, ۲)$ و برصفحهٔ $۶x-۳y+۲z-۸=۰$ مماس است.

جواب: $۴۹x^۲+۴۹y^۲+۴۹z^۲-۱۹۶x+۲۹۴y-۱۹۶z+۵۴۴=۰$.

ج) مرکز $(۱, ۲, ۴)$ و برصفحهٔ $۳x-۲y+۴z-۷=۰$ مماس است.

جواب: $۲۹x^۲+۲۹y^۲+۲۹z^۲-۵۸x-۱۱۶y-۲۳۲z+۵۴۵=۰$.

د) مرکز $(-۴, -۲, ۳)$ وبرصفحهٔ yz مماس است.

جواب: $x^۲+y^۲+z^۲+۸x+۴y-۶z+۱۳=۰$.

ه) مرکز $(۰, ۰, ۰)$ وبرصفحهٔ $۹x-۲y+۶z+۱۱=۰$ مماس است.

جواب: $x^۲+y^۲+z^۲=۱$.

۳. معادلهٔ هریك ازکره‌های زیررا بیابید.

الف) ازنقطه‌های $(۱, ۱, ۱)$، $(۱, ۲, ۱)$، $(۱, ۱, ۲)$ و $(۲, ۱, ۱)$ می‌گذرد.

جواب: $x^۲+y^۲+z^۲-۳x-۳y-۳z+۶=۰$.

ب) ازنقطه‌های $(۲,۱,۳)$، $(۳,-۲,۱)$، $(-۴,۱,۱)$ و $(۱,۱,-۳)$ می‌گذرد.

جواب: $۵۱x^۲+۵۱y^۲+۵۱z^۲+۴۵x+۳۷y-۳۳z-۷۴۲=۰$.

ج) ازنقطه‌های $(۱,۳,۲)$، $(۳,۲,-۵)$، $(۰,۱,۰)$ و $(۰,۰,۰)$ می‌گذرد.

جواب: $۱۱x^۲+۱۱y^۲+۱۱z^۲-۱۲۷x-۱۱y+۳z=۰$.

۴. مختصات مرکز وطول شعاع کره‌های زیررا بیابید.

الف) $x^۲+y^۲+z^۲-۲x+۴y-۶z+۸=۰$.

جواب: $(۱,-۲,۳)$، $r=\sqrt{۶}$.

ب) $۳x^۲+۳y^۲+۳z^۲-۸x+۱۲y-۱۰z+۱۰=۰$.

جواب: $\left(\frac{۴}{۳},-۲,\frac{۵}{۳}\right)$، $r=\frac{\sqrt{۴۷}}{۳}$.

ج) $x^۲+y^۲+z^۲+۴x-۶y+۸z+۲۹=۰$.

جواب: $(-۲,۳,-۴)$، $r=۰$.

د) $x^۲+y^۲+z^۲-۶x+۲y-۲z+۱۸=۰$.

جواب: هیچ مکان هندسی.

۵. معادلهٔ کره‌ای رابیابیدکه برهریك‌ازصفحه‌های $x-۲z-۸=۰$ و $۲x-z+۵=۰$ مماس ومرکزش برخط $x=-۲$، $y=۰$ واقع است.

جواب:
$$x^۲+y^۲+z^۲+۴x+۶z+\frac{۴۹}{۵}=۰،$$
$$x^۲+y^۲+z^۲+۴x+۲۲z+\frac{۴۸۱}{۵}=۰$$

۶. معادلهٔ کره‌ای‌رابه‌دست‌آوریدکه‌ازنقطه‌های $(۱,-۳,۴)$،$(۱,-۵,۲)$ و$(۱,-۳,۰)$ می‌گذرد ومرکزش برصفحهٔ $x+y+z=۰$ واقع است.

جواب: $x^۲+y^۲+z^۲-۲x+۶y-۴z+۱۰=۰$.

۷. نقطه‌ای چنان حرکت می‌کند که مجموع مربعات فاصله‌های آن از سه صفحهٔ $x+۴y+۲z=۰$، $۲x-y+z=۰$ و $۲x+y-۳z=۰$ برابر۱۰است. معادلهٔ مکان هندسی نقطه را پیدا کنید.

جواب: $x^۲+y^۲+z^۲=۱۰$.

۸. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بیابیدکه نسبت فاصله‌هایش ازنقطهٔ $(۱,۱,-۲)$ و نقطهٔ

$(2,3,-2)$، $\frac{3}{4}$ باشد.

جواب: $7x^2+7y^2+7z^2-68x+22y+100z-57=0$.

۹. هریك از بیضیگونهای زیررا مورد تجزیه و تحلیل قرار دهید ونمـودارآنها را رسم کنید.

الف) $25x^2+16y^2+4z^2=100$.

ب) $4x^2+y^2+9z^2=144$.

ج) $8x^2+2y^2+9z^2=144$.

د) $x^2+4y^2+4z^2-12x=0$.

ه) $x^2+4y^2+9z^2=36$.

و) $\frac{(x-1)^2}{36}+\frac{(y-2)^2}{16}+\frac{(z-3)^2}{9}=1$.

۱۰. مطلوب است تعیین مختصات مرکز وطول نصف قطرهای هریك ازمعادلات زیر.

الف) $x^2+16y^2+z^2-4x+32y=5$.

جواب: $(2,-1,0)$، ۵، $\frac{5}{4}$، ۵.

ب) $3x^2+y^2+2z^2+3x+3y+4z=0$.

جواب: $\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},-1\right)$، $\frac{\sqrt{15}}{3}$، $\sqrt{5}$، $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

ج) $x^2+4y^2+z^2-4x-8y+8z+15=0$.

جواب: $(2,1,-4)$، ۳، $\frac{3}{2}$، ۳.

د) $3x^2+4y^2+z^2-12x-16y+4z=4$.

جواب: $(2,2,-2)$، $2\sqrt{3}$، ۳، ۶.

ه) $4x^2+5y^2+3z^2+12x-20y+24z+77=0$.

جواب: نقطـهٔ $\left(-\frac{3}{2},2,-4\right)$.

۱۱. معادلهٔ بیضیگوناستاندارد (به‌مرکزمبدأ مختصات‌که قطرهایش با محورهای‌مختصات موازیند) گـذرنده از نقطه‌هـای داده شده را به دست آوریـد. از صورت معادلـهٔ $Ax^2+By^2+Cz^2=D$ استفاده‌کنید.

الف) $(2,-1,1)$، $(-3,0,0)$، $(1,-1,-2)$.

جواب: $x^2+4y^2+z^2=9$.

ب) $(\sqrt{3},1,1)$، $(1,\sqrt{3},-1)$، $(-1,-1,\sqrt{5})$.

جواب: $2x^2+2y^2+z^2=9$.

ج) $(2,2,2)$، $(3,1,\sqrt{3})$، $(-2,0,4)$.

جواب: $2x^2+3y^2+z^2=24$.

د) $(1,3,4)$، $(3,1,-2\sqrt{2})$ ومحور دوران محور xهاست.

جواب: $2x^2+y^2+z^2=27$.

۱۲. نقطه‌ای طوری حرکت می‌کند که مجموع فاصله‌هایش از $(0,3,0)$ و $(0,-3,0)$ برابر ۸ است. معادلهٔ مکان هندسی آن را بیابید.

جواب: $16x^2+7y^2+16z^2=112$.

۱۳. نقطه‌ای طوری حرکت می‌کند که مجموع فاصله‌هایش از نقطه‌های $(3,2,-4)$ و $(3,2,4)$ برابر ۱۰ است. معادلهٔ مکان هندسی آن را به‌دست‌آورید.

جواب: $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{9}+\dfrac{(z-0)^2}{25}=1$.

۱۴. نقطه‌ای طوری حرکت می‌کند که مجموع فاصله‌های آن از دو نقطهٔ $(-5,0,2)$ و $(5,0,2)$ برابر ۱۲ است. معادلهٔ مکان هندسی آن را به‌دست‌آورید.

جواب: $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{11}+\dfrac{(z-2)^2}{11}=1$.

۱۵. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را تعیین کنید که فاصله‌اش از صفحهٔ yz دو برابر فاصله‌اش از نقطهٔ $(1,-2,2)$ است.

جواب: $3x^2+4y^2+4z^2-8x+16y-16z+36=0$.

۱۶. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌ای که فاصلهٔ آن از نقطهٔ $(2,-3,1)$، $\frac{1}{4}$ فاصله‌اش از صفحهٔ $y+4=0$ است.

جواب: $16x^2+15y^2+16z^2-64x+88y-32z+208=0$.

۱۷. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را به‌دست‌آورید که فاصله‌اش از محور xها ۳ برابر فاصله‌اش از نقطهٔ $(2,3,-3)$ است.

جواب: $9x^2+8y^2+8z^2-36x-54y+54z+198=0$.

۱۸. مکان هندسی هذلولیگونهای یکپارچهٔ زیررا مورد بحث وبررسی قراردهید ونمودار آنها را رسم کنید.

الف) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1$.   ب) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{16}=1$.

ج) $4x^2-25y^2+16z^2=100$.   د) $16y^2-36x^2+9z^2=144$.

ه) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{(z-1)^2}{25}=1$.   و) $9y^2-x^2+4z^2=36$.

۱۹. مکان هندسی هذلولیگونهای دوپارچهٔ زیررا مورد بحث و بررسی قراردهید وشکل آنها را رسم کنید.

الف) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1$.   ب) $36x^2-4y^2-9z^2=144$.

ج) $25x^2-16y^2+4z^2=100$.   د) $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=1$.

ه) $36y^2-9x^2-16z^2=144$.   و) $4z^2-x^2-9y^2=36$.

۲۰. مختصات مرکز را تعیین و راجع به‌نوع هریك ازمعادلات زیر بحث کنید.

الف) $2x^2-3y^2+4z^2-8x-6y+12z-10=0$.

جواب: $\left(2, -1, -\frac{3}{2}\right)$. هذلولیگون یکپارچه. محور کانونی موازی محور yها.

ب) $x^2+2y^2-3z^2+4x-4y-6z-9=0$.

جواب: $(-2, 1, -1)$. هذلولیگون یکپارچه. محورکانونی موازی محور zها.

ج) $2x^2-3y^2-4z^2-12x-6y-21=0$.

جواب: $(3, -1, 0)$. هذلولیگون دوپارچه. محورکانونی موازی محور xها.

د) $4y^2-3x^2-6z^2-16y-6x+36z-77=0$.

جواب: $(-1, 2, 3)$. هذلولیگون دوپارچه. محورکانونی موازی محور yها.

ه) $16y^2-9x^2+4z^2-36x-64y-24z=80$.

جواب: $(-2, 2, 3)$. هذلولیگون یکپارچه. محورکانونی موازی محور xها.

و) $5z^2-9x^2-15y^2+54x+60y+20z=166$.

جواب: $(3, 2, -2)$. هذلولیگون دوپارچه. محورکانونی موازی محور zها.

ز) $2x^2-y^2-3z^2-8x-6y+24z-49=0$.

جواب: نقطهٔ $(2, -3, 4)$.

۲۱. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را به‌دست آورید که تفاضل فاصله‌هایش از $(0, 0, 3)$ و $(0, 0, -3)$ برابر ۴ است.

جواب: $5z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 20$. هذلولیگون دوپارچه. مرکز درمبدأ مختصات.

۲۲. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را به‌دست آورید که تفاضل فاصله‌های آن از دونقطهٔ $(2, 3, 4)$، $(2, -3, 4)$ مساوی ۵ است.

جواب: $44y^2 - 100x^2 - 100z^2 + 400x + 800z = 2275$. هذلولیگون دو پارچه. مرکز در $(2, 0, 4)$.

۲۳. معادلهٔ هذلولیگون یکپارچه‌ای را به‌دست آورید که از نقطه‌های $(4, 2\sqrt{3}, 0)$ و $\left(-1, 3, \frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$ می‌گذرد ومرکز آن $(0, 0, 0)$ ومحور دورانش محور yهاست.

جواب: $2x^2 - y^2 + 2z^2 = 20$. هذلولیگون یکپارچهٔ دوار.

۲۴. مطلوب است تعیین معادلهٔ هذلولیگون دوپارچه‌ای به‌مرکز مبدأ مختصات که‌محورهایش روی محورهای مختصات قرار دارد و از نقطه‌های $(3, 1, 2)$، $(2, \sqrt{11}, 3)$ و $(6, 2, \sqrt{15})$ می‌گذرد.

جواب: $3z^2 - x^2 - 2y^2 = 1$. هذلولیگون دوپارچه. محور کانونی در امتداد محور zها.

۲۵. هریك از رویه‌های زیررا مورد بحث و بررسی قراردهید ونمودار آنها را رسم کنید.

الف) $3x^2 + z^2 - 4y = 0$. ب) $x^2 + 2y^2 - 6z = 0$.

ج) $y^2 - 4z^2 + 4x = 0$. د) $x^2 + 4z^2 - 16y = 0$.

ه) $4x^2 + 3y^2 - 12z = 0$. و) $4x^2 - y^2 - 4z = 0$.

ز) $4x^2 + y^2 + z = 0$. ح) $x^2 + 2y^2 = 8 - 4z$.

۲۶. مطلوب است‌معادلهٔ سهمیگونی به‌رأس $(0, 0, 0)$، که محور تقارنش در امتداد محور zهاست و از نقطه‌های $(2, 0, 3)$ و $(1, 2, 3)$ می‌گذرد.

جواب: $12x^2 + 9y^2 - 16z = 0$. سهمیگون بیضوی.

۲۷. معادلهٔ سهمیگونی را به‌دست آورید که رأس آن $(0, 0, 0)$ ومحور تقارنش‌درامتداد محور zهاست و از دونقطهٔ $(1, 0, 1)$، $(0, 2, 1)$ می‌گذرد.

جواب: $4x^2 + y^2 - 4z = 0$. سهمیگون بیضوی.

۲۸. مطلوب است تعیین معادلهٔ سهمیگونی به‌رأس $(0, 0, 0)$، که محور تقارنش درامتداد

محور zهاست و ازنقطه‌های (۱,۲,۱) و (۲,۱,۱) می‌گذرد.

جواب: $x^۲+y^۲-۵z=۰$. سهمیگون دوار.

۲۹. معادلهٔ سهمیگون گذرنده از نقطه‌های (۱,۱,۱) و $\left(\frac{۳}{۲}, \frac{۷}{۱۲}, \frac{۱}{۲}\right)$، به‌رأس مبدأ مختصات را که محور تقارنش درامتداد محور yهاست، بیابید.

جواب: $x^۲+۵z^۲-۶y=۰$. سهمیگون بیضوی.

۳۰. معادلهٔ سهمیگونی را به‌دست آورید که شامل مبدأ مختصات و نسبت به‌محور xها متقارن است وازنقطه‌های (۲,۲,۱) و (۲,۶,۸) می‌گذرد.

جواب: $z^۲-۲y^۲+۴x=۰$، سهمیگون هذلولوی.

$۲x^۲=z$. استوانهٔ سهموی.

۳۱. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که مربع فاصله‌اش ازمحور zها همواره‌دوبرابر فاصله‌اش ازصفحهٔ xy است.

جواب: $x^۲+y^۲-۲z=۰$. سهمیگون دوار حول محور zها.

۳۲. ابتدا عبارتهای جبری زیررا به‌صورت مربع‌کامل درآورید سپس رأس سهمیگون را مشخص کنید.

الف) $۲x^۲+۳y^۲-۸x+۱۲y+۳z+۲۳=۰$. جواب: $(۲,-۲,۱)$.

ب) $۲x^۲+۴z^۲-۴x-۲۴z-y+۳۶=۰$. جواب: $(۱,-۲,۳)$.

ج) $۳z^۲+۵y^۲-۲x+۱۰y-۱۲z+۲۱=۰$. جواب: $(۲,۱-,۲)$.

د) $y^۲-۴x^۲+۲z-۶y-۱۲x+۶=۰$. جواب: $\left(-\frac{۳}{۲}, ۳, -۳\right)$

ه) $۴x^۲+۳z^۲-۴y+۱۲z+۱۲=۰$. جواب: $(۰, ۰, -۲)$.

۳۳. مکان هندسی هریك ازمخروطهای زیررا مورد بحث وبررسی قراردهید ونمودارآنها را رسم کنید.

الف) $x^۲+۲y^۲=۴z^۲$. ب) $۳x^۲+۲y^۲=۶z^۲$.

ج) $z^۲+y^۲=۲x^۲$. د) $۳x^۲+۴z^۲=۱۲y^۲$.

ه) $۲x^۲+۳y^۲-۶(z-۴)^۲=۰$. و) $z^۲+۲y^۲-۴(x+۳)^۲=۰$.

ز) $۳x^۲+۴z^۲-۱۲(y-۴)^۲=۰$.

۳۴. مکان هندسی هریك ازاستوانه‌ها را مورد بحث و بررسی قرار دهید و نمودارآنهارا رسم کنید.

الف) $x^2+y^2=9$. ب) $4x^2+9y^2=36$.

ج) $y^2=4x$. د) $16y^2+9z^2=144$.

ه) $x^2-9y^2=36$. و) $z=4-x^2$.

ز) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ (ناحیهٔ اول).

۳۵. معادلهٔ هریک از رویه‌هایی راکه پس از دوران منحنیهای زیرحول محور مشخص‌شده به‌دست می‌آید تعیین‌کنید. نوع هریک از رویه‌ها را بیان‌کنید.

الف) $x^2-2z^2=1$، حول محور xها.

جواب: $x^2-2y^2-2z^2=1$. هذلولیگون دوپارچه.

ب) $x^2-2z^2=1$، حول محور zها.

جواب: $x^2+y^2-2z^2=1$. هذلولیگون یکپارچه.

ج) $x=4-y^2$، حول محور xها.

جواب: $x=4-y^2-z^2$. سهمیگون.

د) $2x-y=10$، حول محور xها.

جواب: $4(x-5)^2=y^2+z^2$. مخروط.

ه) $x^2+z^2=a^2$، حول محور zها.

جواب: $x^2+y^2+z^2=a^2$. کره.

و) $x^2+4z^2=16$، حول محور zها.

جواب: $x^2+y^2+4z^2=16$، بیضیگون.

ز) ۱ـ $2x+3y=6$، حول محور yها.

جواب: $4x^2-9(y-2)^2+4z^2=0$. مخروط.

۲ـ مختصات رأس‌مخروط کدامند؟

جواب: $(0,2,0)$.

۳ـ منحنی مشترک مخروط وصفحهٔ $y=0$ چیست؟

جواب: $x^2+z^2=9$. دایره‌ای به‌شعاع ۳.

۴ـ منحنی مشترک مخروط وصفحهٔ $y=2$ چیست؟

جواب: $x^2+z^2=0$. یک نقطه، یا رأس مخروط.

۵ـ منحنی مشترک مخروط وصفحهٔ $x=0$ چیست؟

جواب: $3(y-2)=\pm 2z$. دوخط راست که در صفحهٔ yz واقعند ونقطهٔ تقاطع آنها $(0,2,0)$، رأس مخروط است.

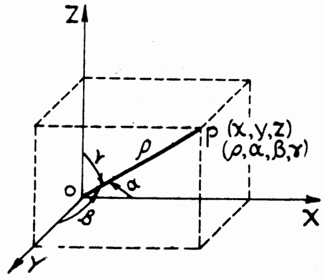
۱۶

دستگاههای مختصات دیگر

مختصات قطبی، استوانه‌ای و کروی. در بسیاری از مواقع در فضا، علاوه بر مختصات قائم، سه دستگاه مختصات دیگر نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد که عبارتند از، مختصات قطبی،مختصات استوانه‌ای ودستگاه مختصات کروی.

مختصات قطبی. مختصات قطبی نقطهٔ P در فضا مطابق‌شکل‌زیر عبارتنداز، $(\rho, \alpha, \beta, \gamma)$، که در آن ρ فاصلهٔ OP و α، β وγ زاویه‌های هادی OP هستند. روابطی که مختصات قطبی و قائم نقطهٔ P را به‌هم مربوط می‌کنند عبارتند از:

$$x=\rho\cos\alpha,\ \ y=\rho\cos\beta,\ \ z=\rho\cos\gamma$$



$$\rho=\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{\rho}=\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad , \quad \cos\beta=\frac{y}{\rho}=\frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{\rho}=\frac{z}{\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

چون $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$، چهار مختص قطبی مستقل از هم نیستند. مثلاً اگر، $\alpha=60^\circ$ و $\beta=45^\circ$ باشد، داریم:

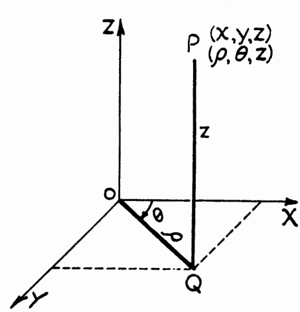
$$\cos^2\gamma=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

چون $\gamma\leqq180^\circ$ است، بنابراین $\gamma=60^\circ$، یا $\gamma=120^\circ$.

مختصات استوانه‌ای. در دستگاه مختصات استوانه‌ای، نقطهٔ دلخواه $P(x, y, z)$ با مختصات ρ، θ و z مشخص می‌شود که دراینجا ρ و θ مختصات قطبی Q، یعنی تصویر نقطهٔ P روی صفحهٔ xy است. این مختصات به صورت (ρ, θ, z) نوشته می‌شود. رابطهٔ بین مختصات استوانه‌ای و مختصات قائم چنین است:

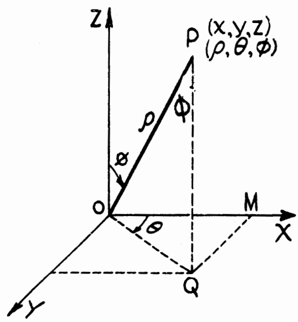
$$x=\rho\cos\theta \quad , \quad y=\rho\sin\theta \quad , \quad z=z$$

$$\rho=\pm\sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \theta=\arctan\frac{y}{x}$$



توجه کنیدکه مقدار زاویهٔ θ محدود نیست، بنابراین ρ مانند حالت مختصات قطبی می‌تواند مقادیر منفی را نیز اختیار کند.

مختصات کروی. اگر $P(x, y, z)$ نقطه‌ای دلخواه درفضا و Q تصویر نقطهٔ P روی صفحهٔ xy باشد، فاصلهٔ OP را مانند مختصات قطبی با ρ و زاویهٔ ZOP را بـا نماد ϕ نمایش می‌دهیم. زاویهٔ ϕ را به‌صورت زاویه‌ای مثبت و $0° \leqq \phi \leqq 180°$ درنظر می گیریم. زاویهٔ XOQ را بانماد θ نمایش‌می‌دهیم. نمادهای ρ، θ و ϕ به‌مختصات کروی نقطهٔ Pموسومند که به‌صورت $P(\rho, \theta, \phi)$ نمایش داده می‌شود که درآن ρ شعاع حامل، θ طول و زاویهٔ ϕ متمم عرض نقطهٔ P نامیده می‌شوند. زاویهٔ θ می‌تواند هر مقدار دلخواه را اختیارکند.



از مثلث قائم‌الزاویهٔ OPQ، داریم:

$$OQ = \rho \sin\phi \quad , \quad QP = \rho\cos\phi$$

با توجه به‌مثلث قائم‌الزاویهٔ OMQ، داریم:

$$OM = OQ\cos\theta \quad , \quad MQ = OQ\sin\theta$$

بنابراین:

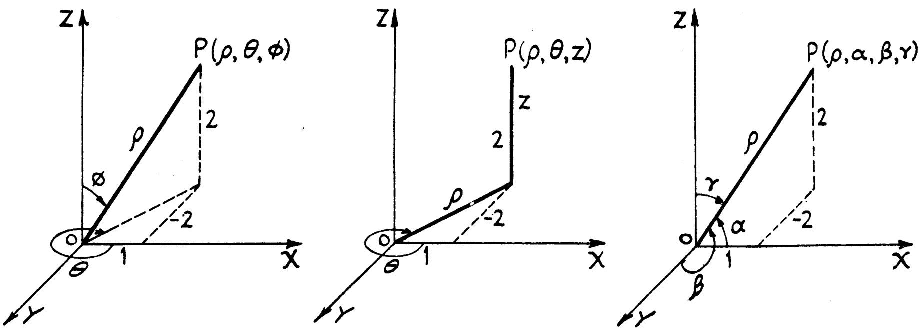
$$x = OM = \rho\sin\phi\cos\theta \quad , \quad y = MQ = \rho\sin\phi\sin\theta \quad , \quad z = QP = \rho\cos\phi$$

$$\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}, \quad \phi = \arccos\frac{z}{\pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

در اکثر مسائل مربوط به‌محاسبهٔ مساحت سطوح یا محاسبهٔ حجم زیریك‌سطح، مطابق روشهایی که در حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌کار گرفته می‌شود، عمل محاسبه، با استفاده ازمختصات استوانه‌ای یا کروی، بسیارساده انجام می‌شود. بخصوص وقتی که سطح‌مرزی، سطحی دوار باشد مختصات استوانه‌ای بسیار مفید و سودمند است.

مسئله‌های حل شده

۱. مختصات قطبی، استوانه‌ای و کروی نقطه‌ای را که مختصات قائم آن (۱ , −۲ , ۲) است به دست آورید.



مختصات قطبی   مختصات استوانه‌ای   مختصات کروی

مختصات قطبی. $\rho=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}=\sqrt{۱^{۲}+(-۲)^{۲}+۲^{۲}}=\sqrt{۹}=۳$.

$$\alpha=\arccos\frac{x}{\rho}=\arccos\frac{۱}{۳}=۷۰^\circ ۳۲'$$

$$\beta=\arccos\frac{y}{\rho}=\arccos\left(-\frac{۲}{۳}\right)=۱۳۱^\circ ۴۹'$$

$$\gamma=\arccos\frac{z}{\rho}=\arccos\frac{۲}{۳}=۴۸^\circ ۱۱'$$

جواب: $(۳,\ ۷۰^\circ ۳۲',\ ۱۳۱^\circ ۴۹',\ ۴۸^\circ ۱۱')$.

مختصات استوانه‌ای. $\rho=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}=\sqrt{۱^{۲}+(-۲)^{۲}}=\sqrt{۵}$

$\theta=\arctan\frac{y}{x}=\arctan(-۲)=۲۹۶^\circ ۳۴'$ ، $z=۲$.

جواب: $(\sqrt{۵},\ ۲۹۶^\circ ۳۴',\ ۲)$.

مختصات کروی. $\rho=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}}=\sqrt{۱^{۲}+(-۲)^{۲}+(۲)^{۲}}=۳$

$$\theta=\arctan\frac{y}{x}=\arctan(-۲)=۲۹۶^\circ ۳۴'$$

$$\phi=\arc\cos\frac{z}{\rho}=\arc\cos\frac{۲}{۳}=۴۸^\circ ۱۱'$$

جواب: $(۳,\ ۲۹۶^\circ ۳۴',\ ۴۸^\circ ۱۱')$.

۲. مطلوب است تعیین مختصات قائم نقطه‌ای که مختصات استوانه‌ای آن $(۶,\ ۱۲۰^\circ,\ -۲)$ است.

$$x=\rho\cos\theta=۶\cos ۱۲۰^\circ=-۳\ ,\quad y=\rho\sin\theta=۶\sin ۱۲۰^\circ=۳\sqrt{۳}$$

$$z=-۲$$

جواب: $(-۳,\ ۳\sqrt{۳},\ -۲)$.

۳. مطلوب است تعیین مختصات قائم نقطه‌ای که مختصات کروی آن $(۴,\ -۴۵^\circ,\ ۳۰^\circ)$ است.

$$x=\rho\sin\phi\cos\theta=۴\sin ۳۰^\circ\cos(-۴۵^\circ)=\sqrt{۲}$$

$$y=\rho\sin\phi\sin\theta=۴\sin ۳۰^\circ\sin(-۴۵^\circ)=-\sqrt{۲}$$

$$z=\rho\cos\phi\qquad =۴\cos ۳۰^\circ\qquad =۲\sqrt{۳}$$

جواب: $(\sqrt{۲},\ -\sqrt{۲},\ ۲\sqrt{۳})$.

۴. مختصات قائم نقطه‌ای را به‌دست آورید که دارای مختصات قطبی $(۳, ۱۲۰^\circ, ۱۲۰^\circ, ۱۳۵^\circ)$ است.

$$x=\rho\cos\alpha=۳\cos ۱۲۰^\circ=-\frac{۳}{۲}$$

$$y=\rho\cos\beta=۳\cos ۱۲۰^\circ=-\frac{۳}{۲}$$

$$z=\rho\cos\gamma=۳\cos ۱۳۵^\circ=-\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

جواب: $\left(-\frac{۳}{۲}, -\frac{۳}{۲}, -\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\right)$.

۵. مطلوب است تعیین مختصات قائم، قطبی و کروی نقطه‌ای که مختصات استوانه‌ای آن

$(۶, ۱۲۰^\circ, ۴)$ است.

مختصات قائم. $x=\rho\cos\theta=۶\cos ۱۲۰^\circ=-۳$

$$y=\rho\sin\theta=۶\sin ۱۲۰^\circ=۳\sqrt{۳}\quad,\quad z=۴$$

جواب: $(-۳, ۳\sqrt{۳}, ۴)$.

مختصات قطبی. $\rho=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=\sqrt{(-۳)^۲+(۳\sqrt{۳})^۲+۴^۲}=۲\sqrt{۱۳}$

$$\alpha=\arc\cos\frac{x}{\rho}=\arc\cos\frac{-۳}{۲\sqrt{۱۳}}=۱۱۴^\circ۳۵'$$

$$\beta=\arc\cos\frac{y}{\rho}=\arc\cos\frac{۳\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۱۳}}=۴۶^\circ۷'$$

$$\gamma=\arc\cos\frac{z}{\rho}=\arc\cos\frac{۴}{۲\sqrt{۱۳}}=۵۶^\circ۱۹'$$

جواب: $(۲\sqrt{۱۳}, ۱۱۴^\circ۳۵', ۴۶^\circ۷', ۵۶^\circ۱۹')$.

مختصات کروی. $\rho=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=\sqrt{(-۳)^۲+(۳\sqrt{۳})^۲+۴^۲}=۲\sqrt{۱۳}$

$$\theta=\arc\tan\frac{y}{x}=\arc\tan\frac{۳\sqrt{۳}}{-۳}=۱۲۰^\circ$$

$$\phi=\arc\cos\frac{z}{\rho}=\arc\cos\frac{۴}{۲\sqrt{۱۳}}=۵۶^\circ۱۹'$$

جواب: $(۲\sqrt{۱۳}, ۱۲۰^\circ, ۵۶^\circ۱۹')$.

۶. معادلهٔ $x^۲+y^۲+۲z^۲-۲x-۳y-z+۲=۰$ را به‌دستگاه مختصات استوانه‌ای تبدیل کنید.

از دستورهای $x=\rho\cos\theta$، $y=\rho\sin\theta$ و $z=z$ استفاده می‌کنیم و در معادلهٔ داده شده قرار می‌دهیم:

$$\rho^۲\cos^۲\theta+\rho^۲\sin^۲\theta+۲z^۲-۲\rho\cos\theta-۳\rho\sin\theta-z+۲=۰$$

پس از ساده‌کردن، $\rho^۲-\rho(۲\cos\theta+۳\sin\theta)+۲z^۲-z+۲=۰$.

۰۷ معادلهٔ $۲x^۲+۳y^۲-۶z=۰$ را به‌مختصات کروی تبدیل کنید.

با استفاده از روابط $x=\rho\sin\phi\cos\theta$، $y=\rho\sin\phi\sin\theta$، $z=\rho\cos\phi$، و قرار دادن آنها در معادله:

$$۲\rho^۲\sin^۲\phi\cos^۲\theta+۳\rho^۲\sin^۲\phi\sin^۲\theta-۶\rho\cos\phi=۰$$

یا
$$۲\rho\sin^۲\phi\cos^۲\theta+۳\rho\sin^۲\phi\sin^۲\theta-۶\cos\phi=۰$$

۰۸ معادلهٔ $\rho+۶\sin\phi\cos\theta+۴\sin\phi\sin\theta-۸\cos\phi=۰$ را به‌مختصات قائم تغییر دهید.

این معادله برحسب مختصات کروی بیان شده است. طرفین تساوی را در ρ ضرب می‌کنیم و به‌جای x، y و z مقادیر مساوی آنها از مسئلهٔ ۷ را به‌کار می‌گیریم. داریم:

$$\rho^۲+۶\rho\sin\phi\cos\theta+۴\rho\sin\phi\sin\theta-۸\rho\cos\phi=۰$$

یا
$$x^۲+y^۲+z^۲+۶x+۴y-۸z=۰$$

این معادلهٔ کره‌ای است به‌مرکز $(-۳, -۲, ۴)$ و به‌شعاع $r=\sqrt{۲۹}$.

۰۹ معادلهٔ $z=\rho^۲\cos ۲\theta$ را ازمختصات استوانه‌ای، به‌مختصات‌قائم تغییردهید. می‌نویسیم $\cos ۲\theta=\cos^۲\theta-\sin^۲\theta$. در نتیجه:

$$z=\rho^۲(\cos^۲\theta-\sin^۲\theta)=\rho^۲\cos^۲\theta-\rho^۲\sin^۲\theta$$

چون $\rho\cos\theta=x$ و $\rho\sin\theta=y$، بنابراین معادلهٔ‌مطلوب، $z=x^۲-y^۲$ است.

۰۱۰ معادلهٔ $x^۲+y^۲-z^۲=۲۵$ را به‌صورت‌معادله‌ای برحسب‌مختصات‌قطبی تغییردهید.

در مختصات قطبی، $x=\rho\cos\alpha$، $y=\rho\cos\beta$، $z=\rho\cos\gamma$.

بنابراین معادله چنین به‌دست‌می‌آید، $\rho^۲\cos^۲\alpha+\rho^۲\cos^۲\beta-\rho^۲\cos^۲\gamma=۲۵$، یا $\rho^۲(\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta-\cos^۲\gamma)=۲۵$.

چون $\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma=۱$، معادلهٔ مطلوب عبارت است از، $\rho^۲(۱-۲\cos^۲\gamma)=۲۵$.

۰۱۱ معادلهٔ $\cos\gamma=\rho\cos\alpha\cos\beta$ را از مختصات قطبی به‌مختصات قائم تبدیل کنید.

اگر طرفین معادلهٔ داده شده را در ρ ضرب کنیم $\rho\cos\gamma=\rho^۲\cos\alpha\cos\beta$.

چون $\rho\cos\gamma=z$، $\rho\cos\alpha=x$ و $\rho\cos\beta=y$، معادلهٔ مورد نظر $z=xy$ می‌شود.

مسئله‌های تکمیلی

۱. مختصات قطبی هر یك از نقطه‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(۱, ۱, ۰)$؛ ب) $(-۲, -۲, ۰)$؛ ج) $(۲, -۲, ۱)$؛

د) $(۲, ۳, ۶)$؛ ه) $(۱, -۴, ۸)$.

جواب: الف) $(\sqrt{۲}, ۹۰^\circ, ۴۵^\circ, ۴۵^\circ)$؛ ب) $(۲\sqrt{۲}, ۹۰^\circ, ۱۳۵^\circ, ۱۳۵^\circ)$؛

ج) $\left(۳, \arccos\frac{۲}{۳}, \arccos\left(-\frac{۲}{۳}\right), \arccos\frac{۱}{۳}\right)$؛

د) $\left(۷, \arccos\frac{۲}{۷}, \arccos\frac{۳}{۷}, \arccos\frac{۶}{۷}\right)$؛

ه) $\left(۹, \arccos\frac{۱}{۹}, \arccos\left(-\frac{۴}{۹}\right), \arccos\frac{۸}{۹}\right)$.

۲. مختصات استوانه‌ای هر یك از نقطه‌های مسئلهٔ یك را به‌دست آورید.

جواب: الف) $(۱, ۹۰^\circ, ۱)$؛ ب) $(-۲, ۲۷۰^\circ, ۲)$؛

ج) $\left(\sqrt{۵}, ۲\pi-\arctan\frac{۱}{۲}, ۲\right)$؛ د) $\left(۳\sqrt{۵}, \arctan\frac{۱}{۲}, ۲\right)$؛

ه) $(۴\sqrt{۵}, ۲\pi-\arctan ۲, ۱)$.

۳. مختصات کروی هر یك از نقطه‌های مسئلهٔ یك‌را به‌دست آورید.

جواب: الف) $(\sqrt{۲}, ۹۰^\circ, ۴۵^\circ)$؛

ب) $(۲\sqrt{۲}, ۲۷۰^\circ, ۱۳۵^\circ)$؛

ج) $\left(۳, ۲\pi-\arctan ۲, \arccos\frac{۲}{۳}\right)$؛

د) $\left(۷, \arctan\frac{۱}{۲}, \arccos\frac{۲}{۷}\right)$؛

ه) $\left(۹, ۲\pi-\arctan\frac{۱}{۲}, \arccos\frac{۱}{۹}\right)$.

۴. مطلوب است مختصات قائم نقطه‌هایی که مختصات قطبی آنها عبارتند از:

الف) $(۲, ۹۰^\circ, ۳۰^\circ, ۶۰^\circ)$؛ ب) $(۳, ۶۰^\circ, -۴۵^\circ, ۱۲۰^\circ)$؛

ج) $(4, 120^\circ, 120^\circ, 135^\circ)$؛ د) $(3, 150^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$؛

ه) $(2, 45^\circ, 120^\circ, -60^\circ)$.

جواب: الف) $(0, \sqrt{3}, 1)$؛ ب) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$؛

ج) $(-2, -2, -2\sqrt{2})$؛ د) $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$؛

ه) $(\sqrt{2}, -1, 1)$.

۵. مطلوب است مختصات قائم نقطه‌هایی که مختصات استوانه‌ای آنها عبارتند از:

الف) $(6, 120^\circ, -2)$؛ ب) $(1, 330^\circ, -2)$؛ ج) $(4, 45^\circ, 2)$؛

د) $(8, 120^\circ, 3)$؛ ه) $(6, 30^\circ, -3)$.

جواب: الف) $(-3, 3\sqrt{3}, -2)$؛ ب) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}, -2\right)$؛

ج) $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2)$؛ د) $(-4, 4\sqrt{3}, 3)$؛

ه) $(3\sqrt{3}, 3, -3)$.

۶. مطلوب است مختصات قائم نقطه‌هایی که مختصات کروی آنها عبارتند از:

الف) $(4, 210^\circ, 30^\circ)$؛ ب) $(3, 120^\circ, 240^\circ)$؛ ج) $(6, 330^\circ, 60^\circ)$؛

د) $(5, 150^\circ, 210^\circ)$؛ ه) $(2, 180^\circ, 270^\circ)$.

جواب: الف) $(-\sqrt{3}, -1, 2\sqrt{3})$؛ ب) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}, -\frac{9}{4}, -\frac{3}{2}\right)$؛

ج) $\left(\frac{9}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}, 3\right)$؛ د) $\left(\frac{5\sqrt{3}}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$؛

ه) $(2, 0, 0)$.

۷. مطلوب است مختصات کروی نقطه‌هایی که مختصات استوانه‌ای آنها عبارتند از:

الف) $(8, 120^\circ, 6)$؛ ب) $(4, 30^\circ, -3)$؛ ج) $(6, 135^\circ, 2)$؛

د) $(3, 150^\circ, 4)$؛ ه) $(12, -90^\circ, 5)$.

جواب: الف) $\left(10, 120^\circ, \arccos\frac{3}{5}\right)$؛ ب) $\left[5, 30^\circ, \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$؛

ج) $(2\sqrt{10},\ 135^\circ,\ \frac{\sqrt{10}}{10})$؛ د) $(5,\ 150^\circ,\ \arccos\frac{4}{5})$؛

ه) $(13,\ -90^\circ,\ \arccos\frac{5}{13})$.

۸. معادلات زیر را به‌معادلاتی در دستگاه مختصات کروی تبدیل کنید.

الف) $3x^2-3y^2=8z$؛ ب) $x^2-y^2-z^2=a^2$؛

ج) $3x+5y-2z=6$.

جواب: الف) $3\rho\sin^2\phi\cos 2\theta=8\cos\theta$؛

ب) $\rho^2(\sin^2\phi\cos 2\theta-\cos^2\phi)=a^2$؛

ج) $\rho(3\sin\phi\cos\theta+5\sin\phi\sin\theta-2\cos\phi)=6$.

۹. هر یك از معادلات زیر را از مختصات قائم به‌مختصات استوانه‌ای تبدیل کنید.

الف) $5x+4y=0$؛ ب) $5x^2-4y^2+2x+3y=0$؛

ج) $x^2+y^2-8x=0$؛ د) $x^2-y^2+2y-6=0$؛

ه) $x^2+y^2-z^2=a^2$.

جواب: الف) $\theta=\arctan\left(-\frac{5}{4}\right)$؛

ب) $5\rho\cos^2\theta-4\rho\sin^2\theta+2\cos\theta+3\sin\theta=0$؛

ج) $\rho-8\cos\theta=0$؛

د) $\rho^2\cos 2\theta+2\rho\sin\theta-6=0$؛

ه) $\rho^2-z^2=a^2$.

۱۰. رویه‌های زیر دردستگاه مختصات‌استوانه‌ای داده شده‌اند. معادلات آنها را دردستگاه مختصات قائم به‌دست آورید و نوع رویه را مشخص کنید.

الف) $\rho^2+3z^2=36$؛ ب) $\rho=a\sin\theta$؛ ج) $\rho^2+z^2=16$؛

د) $\theta=45^\circ$؛ ه) $\rho^2-z^2=1$.

جواب: الف) $x^2+y^2+3z^2=36$. بیضیگون دوار.

ب) $x^2+y^2=ay$. استوانهٔ مستدیر قائم.

ج) $x^2+y^2+z^2=16$. کره.

د) $y=x$. صفحه.

ه) $x^2+y^2-z^2=1$. هذلولیگون یکپارچه.

۱۱. معادلات زیر را از مختصات قائم به‌مختصات قطبی تبدیل کنید.

الف) $x^2+y^2+4z=0$؛

ب) $x^2+y^2-z^2=a^2$؛

ج) $2x^2+3y^2+2z^2-6x+2y=0$؛

د) $z=2xy$.

جواب: الف) $\rho(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)+4\cos\gamma=0$،

یا $\rho(1-\cos^2\gamma)+4\cos\gamma=0$؛

ب) $\rho^2(1-2\cos^2\gamma)=a^2$؛

ج) $\rho(2+\cos^2\beta)-6\cos\alpha+2\cos\beta=0$؛

د) $\cos\gamma=2\rho\cos\alpha\cos\beta$.

۱۲. معادلات زیر را از مختصات کروی به‌معادلاتی در دستگاه مختصات قائم تبدیل کنید.

الف) $\rho=5a\cos\phi$؛ ب) $\theta=60^\circ$؛

ج) $\rho\sin\phi=a$؛ د) $\rho=4$.

جواب: الف) $x^2+y^2+z^2=5az$؛ ب) $y=\sqrt{3}x$؛

ج) $x^2+y^2=a^2$؛ د) $x^2+y^2+z^2=16$.

۱۳. معادلات زیر را از مختصات قطبی به‌معادلاتی در دستگاه مختصات قائم تغییر دهید.

الف) $\rho(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)=5$؛

ب) $\rho^2(2\cos^2\alpha-1)=25$؛

ج) $\cos\gamma=\rho(\cos^2\alpha-\cos^2\beta)$؛

د) $\rho^2-\rho^2\cos^2\gamma-4\rho\cos\gamma-2=0$.

جواب: الف) $x+y+z=5$؛ ب) $x^2-y^2-z^2=25$؛

ج) $z=x^{۲}-y^{۲}$؛   د) $x^{۲}+y^{۲}-۴z-۲=۰$.

۱۴. دستوری برای محاسبهٔ فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $P_{۱}(\rho_{۱}, \theta_{۱}, \phi_{۱})$ و $P_{۲}(\rho_{۲}, \theta_{۲}, \phi_{۲})$ در دستگاه مختصات کروی به‌دست آورید.

راهنمایی: از دستور محاسبهٔ بین دو نقطه در دستگاه مختصات قائم استفاده و آن‌را به‌مختصات کروی تبدیل کنید.

جواب:

$$d=\sqrt{\rho_{۱}^{۲}+\rho_{۲}^{۲}-۲\rho_{۱}\rho_{۲}[\cos(\theta_{۲}-\theta_{۱})\sin\phi_{۱}\sin\phi_{۲}+\cos\phi_{۱}\cos\phi_{۲}]}.$$

واژه‌نامه

Array	آرایه
Identity	اتحاد
Altitude	ارتفاع
Cylinder	استوانه
Right circular–	– قائم دوار
Decimal	اعشاری
Horizontal	افقی
Euclidean	اقلیدسی
Translation	انتقال
Ad Absurdum	برهان خلف
Expand	بسط دادن
Dimension	بعد
Ellipse	بیضی
Ellipsoid	بیضیگون
Counter-clockwise	پادساعتگرد
Direction number	پارامترهادی
Segment	پاره‌خط
Compass	پرگار

Lemniscate	پروانه (لمنیسکات)
Cissoid	پیچک‌نما
Function	تابع
Transformation	تبدیل
Degenerate	تبهگون
Factoring	تجزیه
Subnormal	تحت‌قائم
Subtangent	تحت مماس
Addition of ordinates	ترکیب‌عرضها
Image	تصویر
Project	تصویر کردن
Symmetry	تقارن
Contact	تماس
Lateral	جانبی
Directed	جهت‌دار
Addition	جمع
Left handed	چپ‌گرد
Strophoid	چرخ‌تیزنما
Cycloid	چرخنما
Polinomial	چند جمله‌ای
Poligon	چند ضلعی
Cancel	حذف کردن
Calculus	حساب دیفرانسیل وانتگرال
Real	حقیقی
Spiral of Archmides	حلزون ارشمیدس
Witch of Agnesi	حلقهٔ آترا
Quotient	خارج‌قسمت

Eccentricity	خروج ازمرکز
Line of Centers	خط المرکزین
Directrix	خط هادی
Linear	خطی
Amplitude	دامنه
Domain of variations	دامنهٔ تغییرات
Circle	دایره
Circumcircle	دایرهٔ محیطی
Hypocycloid	درون چرخنما
_of four cusps	ــ با چهار تیزی
Family	دسته
Grouping	دسته‌بندی
Quadratic formula	دستور معادلهٔ درجهٔ دوم
Cartesian	دکارتی
Cardioid	دلنما
Circular	دوار
Pairwise	دو به‌دو
Binomial	دو جمله‌ای
Rotation	دوران
Dihedral	دووجهی
Decagon	ده ضلعی
Vertex	رأس
Trace	رد
Four-leaved rose	رزچهار گلبر گی
Plot	رسم کردن
Double root	ریشهٔ مضاعف
Angle	زاویه
Acute_	ــ حاده

ـ خارجی	Exterior—
ـ داخلی	Interior—
ـ فراز	—of elevation
ـ قائمه	Right—
ـ مجاور	Adjacent—
ـ مرکزی	—at the centre
ـ منفرجه	Obtuse—
ـ میل	—of inclination
ـ هادی	Direction—
زوج	Even
ساعتگرد	Clockwise
سطح درجهٔ دوم	Quadratic surface
سهمی	Parabola
سهمیگون	Paraboloid
ـ بیضوی	Elliptic—
ـ هذلولوی	Hyperboloid—
شکل	Figure
شعاع	Radius
شعاعی	Radical
شیب	Gradient
صدفنما	Conchoid
صعودی	Increasing
صفحه	Plane
ـ نیمساز	Bisector—
ضریب	Coefficient
ضلع	Arm
طول نقطه	Abscissa

Factor	عامل
Ordinate	عرض نقطه
Element	عنصر
Perpendicular	عمود
Vertical	عمودی
Distance	فاصله
Odd	فرد
Hypothesis	فرض
Line of intersection	فصل مشترك
Solid	فضایی
Normal	قائم
Base	قاعده (مثلث)
Absolute value	قدر مطلق
Theorem	قضیه
Pythagorean—	— فیثاغورث
Sector	قطاع
Pole	قطب
Polar	قطبی
Diameter	قطردایره
Diagonal	قطری
Arc	قوس
Focus	کانون
Canonic	کانونیك
Boundary	کرانه
Sphere	کره
Fraction	کسر
Denominator of the—	مخرج —
Numerator of the—	صورت —

Direction Cosine	کسینوس هادی
Involute	گسترنده
Helix	مارپیچ
Oblique	مایل
Origin	مبدأ
Indeterminate	مبهم
Equidistant	متساوی‌الفاصله
Orthogonal	متعامد
Variable	متغیر
Mutual	متقابل
Finite	متناهی
Parallelogram	متوازی‌الاضلاع
Triangle	مثلث
Right–	ـ قائم‌الزاویه
Isosceles–	ـ متساوی‌الساقین
Trigonometry	مثلثات
Asymptote	مجانب
Inscribed	محاط‌شده
Escribed	محاطی خارجی
Convex	محدب
Axis	محور
Radical–	ـ اصلی
– of translation	ـ انتقال
– of rotation	ـ دوران
Circumscribe	محیط کردن
Coordinates	مختصات
Cylindrical–	ـ استوانه‌ای
Cartesian –	ـ دکارتی
polar –	ـ قطبی

Spherical–	ــ کروی
Complex	مختلط
Cone	مخروط
Conoid	مخروطنما
Center of gravity	مرکز ثقل
Circumcenter	مرکز دایرهٔ محیطی
Centroid	مرکز هندسی
Area	مساحت
Common	مشترك
Equivalent	معادل
Equation	معادله
Normal–	ــ متعارف
Reciprocal	معکوس
Definite	معین
Conic section	مقطع مخروطی
Concave	مقعر
Locus	مکان هندسی
Tangent	مماس
Curve	منحنی
Sine–	ــ سینوسی
Cosine–	ــ کسینوسی
Logarithmic–	ــ لگاریتمی
Exponential–	ــ نمایی
Transcendental–	ــ متعالی
Trigonometric–	ــ مثلثاتی
Higher plane–	ــ مسطحهٔ عالی
Parallel	موازی
Generatrix	مولد
Imaginary	موهومی
Median	میانه

Inclinatian	میل
Conclusion	نتیجه
Decreasing	نزولی
Ratio	نسبت
Bisect	نصف کردن
Intercept	نقطهٔ تقاطع با محورهای مختصات
Acnode	نقطهٔ مزدوج
Midpoint	نقطهٔ وسط
Geometrical representation	نمایش هندسی
Diagram	نمودار
Semicircle	نیم‌دایره
half–line	نیم‌خط
Upper half space	نیم فضای بالایی
Chord	وتر
Common–	ــ مشترک
Latus rectum	وتر کانونی
Hypotenuse	وتر مثلث قائم‌الزاویه
Face	وجه
Hyperbola	هذلولی
Branch of–	شاخهٔ ــ
Equilateral–	ــ متساوی‌القطرین
Hyperboloid	هذلولیگون
–of two sheet	ــ دوپارچه
–of one sheet	ــ یکپارچه
Conjugate hyperbolas	هذلولیهای مزدوج
Analytic geometry	هندسهٔ تحلیلی
Collinear	همراستا
Concurrert	همرس

هم‌سازه	Cofactor
هم‌صفحه	Coplaner
هم‌کانون	Cofocal
یال	Edge
یک چهارم (صفحه)	Quadrant
یک هشتم (فضا)	Octant

هندسهٔ تحلیلی علم جبر را با هندسه درمی آمیزد تا مسائل مشکل هندسه را بتوان با استفاده از روشهای جبری به سادگی حل کرد. مهارت یافتن در این رشته از ریاضیات گذشته از مطالعهٔ دقیق و موشکافانهٔ کتابهای درسی در زمینهٔ هندسهٔ تحلیلی نیاز به حل کردن مسئله های بسیار دارد تا بتوان با روشهای گوناگونِ این علم آشنا شد.

کتاب **هندسهٔ تحلیلی** دارای مجموعه ای از مسائل است که برای تکمیل دوره های عادی هندسهٔ تحلیلی، که در دبیرستان و دانشگاه تدریس می شود، در نظر گرفته شده است. این کتاب دارای ۳۴۵ مسئلهٔ نمونهٔ حل شده و ۹۱۰ مسئلهٔ تکمیلی برای تمرین است. هر فصل کتاب با خلاصهٔ کوتاهی از تعاریف، اصول و قضیه های مربوط به موضوع آن فصل آغاز می شود و با مسئله های حل شده و مسئله های تکمیلی پایان می پذیرد.

بها صد تومان