۱) حد داده شده مبهم 0^0 است ۰/۲۵

$$L=\lim_{x\to 0}(2x)^{\sin x}\longrightarrow \ln L=\ln\left(\lim_{x\to 0}(2x)^{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\ln(2x)^{\sin x}$$ ۰/۲۵

$$=\lim_{x\to 0}\sin x\ln(2x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x)}{\frac{1}{\sin x}}$$ ۰/۲۵

بنا به قاعده هوپیتال

$$\ln L=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{2x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x\cos x}$$ ۰/۲۵

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=-1\times 0=0\longrightarrow L=e^0=1$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

---

۲)

$$y=(\cos x)^{\sqrt{x}}\longrightarrow \ln y=\sqrt{x}\ln\cos x\longrightarrow \frac{y'}{y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\cos x+\frac{-\sqrt{x}\sin x}{\cos x}$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\longrightarrow y'=\left(\frac{\ln\cos x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\tan x\right)(\cos x)^{\sqrt{x}}$$ ۰/۲۵

---

۳) الف)

$$\int\frac{x-1}{x^2-2x+5}dx=\int\frac{1}{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\ln u=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)+C$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$u=x^2-2x+5\longrightarrow du=(2x-2)\,dx$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

ب)

$$\frac{x+1}{x^3+x}=\frac{x+1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$ ۰/۲۵

$$\longrightarrow x+1=Ax^2+A+Bx^2+Cx\longrightarrow\begin{cases}A+B=0\\ C=1\\ A=1\longrightarrow B=-1\end{cases}$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\longrightarrow\int\frac{x+1}{x^3+x}dx=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{-x+1}{x^2+1}dx=\ln x-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int\frac{dx}{1+x^2}$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

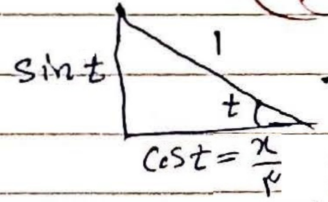
$$=\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\tan^{-1}x+C$$ ۰/۲۵

۴)

$$I=\int\frac{\sqrt{36-4x^2}}{x^2}dx=2\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx=2\int\frac{\sqrt{9-9\cos^2 t}}{9\cos^2 t}(-3\sin t\,dt)$$ ۰/۲۵

$$x=3\cos t\longrightarrow dx=-3\sin t\,dt$$ ۰/۲۵

$$=-2\int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\,dt = -2\int (\tan^2 t+1-1)\,dt = -2(\tan t - t)+C$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵



$$\to \sin t=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} \to \tan t = \frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}{\frac{x}{3}} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$ ۰/۲۵

$$\to I = -\frac{2\sqrt{9-x^2}}{x} + 2\cos^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$ ۰/۲۵

اگر از تغییر متغیر $x=3\sin t$ حل می‌شد هم مراحل کاملاً مشابه است و جواب:

$$I = -\frac{2\sqrt{9-x^2}}{x} - 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C$$

(۳

$$\int \frac{\cos^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\cos^{-1}\sqrt{x} - \int (2\sqrt{x})\left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}\right)$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\begin{cases} u=\cos^{-1}\sqrt{x} \to du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{dx}{\sqrt{1-x}} \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} \to v = 2\sqrt{x}\end{cases}$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$= 2\sqrt{x}\cos^{-1}\sqrt{x} - \int\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{x}\cos^{-1}\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x}+C$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

(۴

$$I=\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{R\to\infty}\int_2^R \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{R\to\infty} 2\sqrt{\ln x}\Big|_2^R$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int\frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{\ln x}$$

$$u=\ln x \to du = \frac{dx}{x}$$

$$\to I = \lim_{R\to\infty} 2\left(\sqrt{\ln R}-\sqrt{\ln 2}\right) = \infty$$ واگراست. ۰/۲۵ ۰/۲۵

۵) ابتدا بررسی همگرایی مطلق:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{n(-2)^n}{5^n}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n2^n}{5^n}$$ ۰/۲۵

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)2^{n+1}}{5^{n+1}}}{\frac{n2^n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{5n} = \frac{2}{5}<1$$ ۰/۲۵ ۰/۲۵

بنابر آزمون نسبت این سری همگراست و در نتیجه سری داده شده همگرای مطلق و همگراست. ۰/۲۵

۶) ابتدا شعاع همگرایی:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{۲^n}{n}}{\frac{۲^{n+1}}{n+1}}\right| \quad ۰/۲۵$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{۲n}=\frac{1}{۲} \quad ۰/۲۵ \xrightarrow{\text{بازه}} (1-\frac{1}{۲}, 1+\frac{1}{۲})=(\frac{1}{۲}, \frac{۳}{۲}) \quad ۰/۲۵$$

اما مرزها: $x=\frac{1}{۲}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{۲^n(\frac{1}{۲}-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{۲^n(-\frac{1}{۲})^n}{n} \quad ۰/۲۵$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{\text{سری متناوب}} \text{همگراست} \quad ۰/۲۵ \quad ۰/۲۵$$

$x=\frac{۳}{۲}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{۲^n(\frac{۳}{۲}-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{۲^n(\frac{1}{۲})^n}{n} \quad ۰/۲۵$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ واگراست}$$

پس بازه همگرایی: $[\frac{1}{۲}, \frac{۳}{۲})$ ۰/۲۵

۷)

$$w=x-1 \to x=w+1 \quad ۰/۲۵$$

$$f(x)=(w+1)^۲+۲(w+1)+1 \overset{۰/۲۵}{=} w^۲+۲w+1+۲w+۲+1 \quad ۰/۲۵$$

$$=w^۲+۴w+۴=(x-1)^۲+۴(x-1)+۴ \quad ۰/۲۵$$