

در اکثر سوالات حرف A وجود دارد و معمولاً مقدار آن در روند حل تأثیر چندانی نداشته است
در حل زیر مقدار A، ۱ قرار داده ایم مگر آنکه مقادیر دیگری روند را تغییر دهد.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 4e^{2x})^{\frac{1}{x}} = \infty^0 \quad \text{صمیم} \quad (1) \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 4e^{2x})^{\frac{1}{x}} \rightarrow \ln L = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln [(x + 4e^{2x})^{\frac{1}{x}}] \quad (1.20) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x + 4e^{2x})}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 8e^{2x}}{x + 4e^{2x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8e^{2x}}{1 + 8e^{2x}} \quad (1.20) \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16e^{2x}}{16e^{2x}} = 1 \rightarrow L = e^1 \quad (1.20) \end{aligned}$$

(۲) چون مشتق تابع توانی است از طرفین تساوی Ln می گیریم (۱.۲۰)

$$\ln y = \ln [(4\sqrt{x})^{\ln x}] = \ln x \ln(4\sqrt{x}) \quad (1.20)$$

مشتق $\rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \ln(4\sqrt{x}) + \ln x \cdot \frac{\frac{4}{2\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}} \quad (1.0)$

$$\rightarrow y' = \left(\frac{\ln(4\sqrt{x})}{x} + \frac{\ln x}{2x} \right) y \quad (1.20)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - (\ln x)^2}} = \int \frac{4 \cos t \, dt}{\sqrt{4 - 4 \sin^2 t}} = \int \frac{4 \cos t \, dt}{4 \cos t} \quad (1.20) \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \ln x = 4 \sin t &\rightarrow \frac{dx}{x} = 4 \cos t \, dt, \quad t = \sin^{-1} \left(\frac{\ln x}{4} \right) \quad (1.20) \\ &= \int 1 \, dt = t + C = \sin^{-1} \left(\frac{\ln x}{4} \right) + C \quad (1.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int x^r \tan^{-1} x \, dx = \frac{x^r}{r} \tan^{-1} x - \int \left(\frac{x^r}{r} \right) \left(\frac{dx}{1+x^2} \right) \quad (1.20) \quad (1.20) \\ u &= \tan^{-1} x \rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv &= x^r \, dx \rightarrow v = \frac{x^{r+1}}{r+1} \quad (1.20) \end{aligned}$$

$$\rightarrow I = \frac{x^r}{r} \tan^{-1} x - \frac{1}{r} \int (x^r - 1 + \frac{1}{1+x^2}) \, dx = \frac{x^r}{r} \tan^{-1} x - \frac{x^{r+1}}{r+1} + \frac{x}{r} - \frac{\tan^{-1} x}{r} + C \quad (1.20) \quad (1.20)$$

$$z = \tan \frac{x}{r}, \quad dx = \frac{r dz}{1+z^2}, \quad \sin x = \frac{rz}{1+z^2} \quad (2)$$

$$\rightarrow \int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = \int \frac{\frac{rz}{1+z^2} \cdot \frac{r dz}{1+z^2}}{1+\frac{rz}{1+z^2}} = \int \frac{r^2 z}{(1+z^2+r z)(1+z^2)} dz$$

$$\frac{r^2 z}{(1+z^2+r z)(1+z^2)} = \frac{A}{1+z} + \frac{B}{(1+z)^2} + \frac{Cz+D}{1+z^2}$$

$$\rightarrow r^2 z = A(1+z)(1+z^2) + B(1+z)^2 + (Cz+D)(1+z^2)$$

$$z = -1: -r = rB \rightarrow B = -r$$

$$z = -1: f = rA + r \rightarrow A = 0$$

$$z = 0: 0 = 0 - r + D \rightarrow D = r$$

$$z = 1: r = 0 - r + rC + 1 \rightarrow C = 0$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{-r}{(1+z)^2} dz + \int \frac{r}{1+z^2} dz = \frac{r}{1+z} + r \tan^{-1} z + C$$

$$= \frac{r}{1+\tan(\frac{x}{r})} + r \tan^{-1}(\tan(\frac{x}{r})) + C = \frac{r}{1+\tan(\frac{x}{r})} + x + C$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}\sqrt{x}} = \int \frac{f z^r dz}{z^r(z^r+4z)} = \int \frac{dz}{z^r(z+4)} \quad (3)$$

$$x = z^r \rightarrow dx = r z^{r-1} dz$$

$$\frac{1}{z^r(z+4)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^r} + \frac{C}{z+4} \rightarrow 1 = Az(z+4) + B(z+4) + Cz^r$$

$$z = 0: 1 = 4B \rightarrow B = \frac{1}{4}, \quad z = 0: 0 = 4A + \frac{1}{4} \rightarrow A = -\frac{1}{16}$$

$$z = -4: 1 = r4C \rightarrow C = \frac{1}{r4}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}\sqrt{x}} = \int \left(-\frac{1}{16z} dz + \frac{1}{4z^r} dz + \frac{\frac{1}{r4}}{z+4} dz \right)$$

$$= \int \left(-\frac{1}{16} \ln z - \frac{1}{4} \frac{1}{z} + \frac{1}{r4} \ln(z+4) \right) + C$$

$$= \frac{1}{9} \ln \left(\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}} \right) - \frac{r}{r} \frac{1}{\sqrt{x}} + C$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x^r}}{1/x^r} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^r}{e^{x^r}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x x'}{x^r e^{x^r}} = 0 \quad (14)$$

بنابراین از معیار مقایسه حدی چون $\int_1^\infty \frac{dx}{x^r}$ استفاده می‌کنیم. اگر $r > 1$ است، انتگرال داره شده پس $\sum$ واگرا خواهد بود. (120)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+r}{n^A + 4n} \quad (15)$$

- اگر $A \geq 3$: این سری در مقایسه حدی با $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ واگرا خواهد بود. (120)
و در نتیجه سری داره شده پس $\sum$ مطلقاً است. (120)

- اگر $A = 2$: این سری در مقایسه حدی با $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا خواهد بود اما چون (120)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+r}{n^2+4n} = 0, \quad \frac{n+r}{n^2+4n} \searrow$$

بنابراین از معیار مقایسه حدی مستقیم استفاده نمی‌کنیم. پس $\sum$ شرطی خواهد بود. (120)

- اگر $A = 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+r}{n^A + 4n} \neq 0$$

و سری واگرا خواهد بود. (1)

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{r_{n+1}}{r_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1}}{4n+3} = \frac{1}{4} \quad (16)$$

پس بازه همگرا $(\frac{1}{4}, 4)$ داریم. (120)

$x = \frac{1}{4}$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n (-\frac{1}{4})^n}{r_{n+1}} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{4}\right)^n \frac{1}{r_{n+1}} = \infty$ واگرا است. (120)

$x = 4$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n (\frac{1}{4})^n}{r_{n+1}} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{4}\right)^n \frac{1}{r_{n+1}} = \infty$ (120)

پس بازه همگرا دقیقاً $(\frac{1}{4}, 4)$ است. (120)

$$w = x - 1 \rightarrow x = w + 1 \quad (150)$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{w+1} = \frac{1}{1-(-w)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \quad (150)$$

سری هندسی

$$\rightarrow \ln x = \int \frac{1}{x} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1} + C \quad (150)$$

برای تعیین C طرفین را در $x=1$ حساب می‌کنیم

$$\underbrace{\ln 1}_0 = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (1-1)^{n+1}}_0 + C \rightarrow C = 0 \quad (150)$$