

به نام خدا

مکانیک مواد مرکب

میکرومکانیک و ماکرومکانیک

- مکانیک مواد مرکب در دو سطح مورد بررسی قرار میگیرد:

1. سطح میکرومکانیک: در این سطح، تعامل مواد سازنده کامپوزیت (الیاف و ماتریس) در سطح میکرو و تاثیر آنها بر خواص مکانیکی و همچنین مودهای تخریب کامپوزیت مورد بررسی قرار میگیرد.

روابط ساختاری که ویژگیهای الاستیک و حرارتی کامپوزیت را بیان میدارد، در این قسمت بدست می آید.

2. سطح ماکرومکانیک: در این سطح، پاسخ مواد کامپوزیتی به بارگذاریهای مکانیکی و حرارتی در مقیاس ماکرو مورد بررسی است.

در این حالت فرض میشود که کامپوزیت همگن است و از روابط الاستیسیته برای مواد ارتوتروپیک استفاده میشود تا تنشها، کرنشها و تغییرشکلهای داخل کامپوزیت محاسبه شود.

برهمکنش الیاف-زمینه در تک لایه تک جهته

فرضیات

- الیاف بطور یکنواخت در زمینه توزیع شده است.
- اتصال کاملی بین الیاف و ماتریس وجود دارد.
- ماتریس عاری از حباب است.
- نیروی اعمالی یا عمود یا موازی با جهت الیاف است.
- تک لایه در ابتدا بدون تنش (مانند تنش پسماند) است.
- هم زمینه و هم الیاف دارای رفتار الاستیک خطی هستند.

برهمکنش الیاف-زمینه در تک لایه تک جهته

بارگذاری کششی طولی

الیاف پیوسته تک جهته

در این حالت داریم:

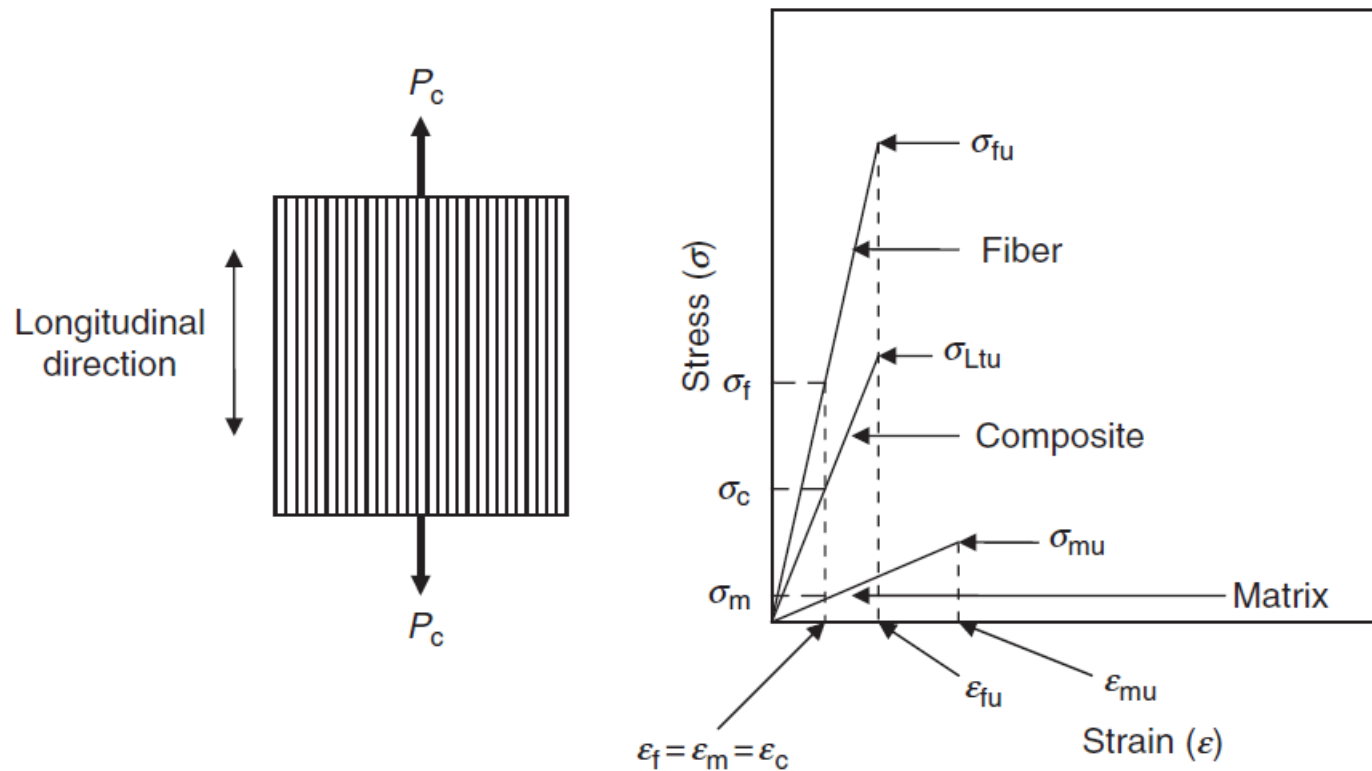
$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_c$$

که در آن ε_f ، ε_m و ε_c به ترتیب کرنش طولی الیاف، زمینه و ماتریس است.

از آنجایی که الیاف و زمینه هر دو الاستیک هستند تنش ها بصورت زیر بدست می آید:

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_f = E_f \varepsilon_c,$$

$$\sigma_m = E_m \varepsilon_m = E_m \varepsilon_c$$



بارگذاری طولی

از آنجایی که مدول الاستیک الیاف از ماتریس بیشتر است، الیاف تنش بیشتری را تحمل می کند. نیروی اعمالی به کامپوزیت PC توسط الیاف و زمینه تحمل می شود. از اینرو داریم:

$$P_c = P_f + P_m.$$

با توجه به رابطه: نیرو=تنش×سطح مقطع داریم:

$$\sigma_c A_c = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m$$

$$\sigma_c = \sigma_f \frac{A_f}{A_c} + \sigma_m \frac{A_m}{A_c}$$

و از آنجایی که: $v_f = \frac{A_f}{A_c}$ و $v_m = (1 - v_f) = \frac{A_m}{A_c}$ پس داریم:

$$\sigma_c = \sigma_f v_f + \sigma_m v_m = \sigma_f v_f + \sigma_m (1 - v_f).$$

Af: سطح مقطع الیاف

Am: سطح مقطع ماتریس

σ_c : تنش وارده به کامپوزیت

Ac: سطح مقطع کامپوزیت

$$A_c = A_f + A_m$$

بارگذاری طولی

با تقسیم دو طرف معادله بر ϵ_c مدول طولی کامپوزیت e_l بصورت زیر بدست می آید:

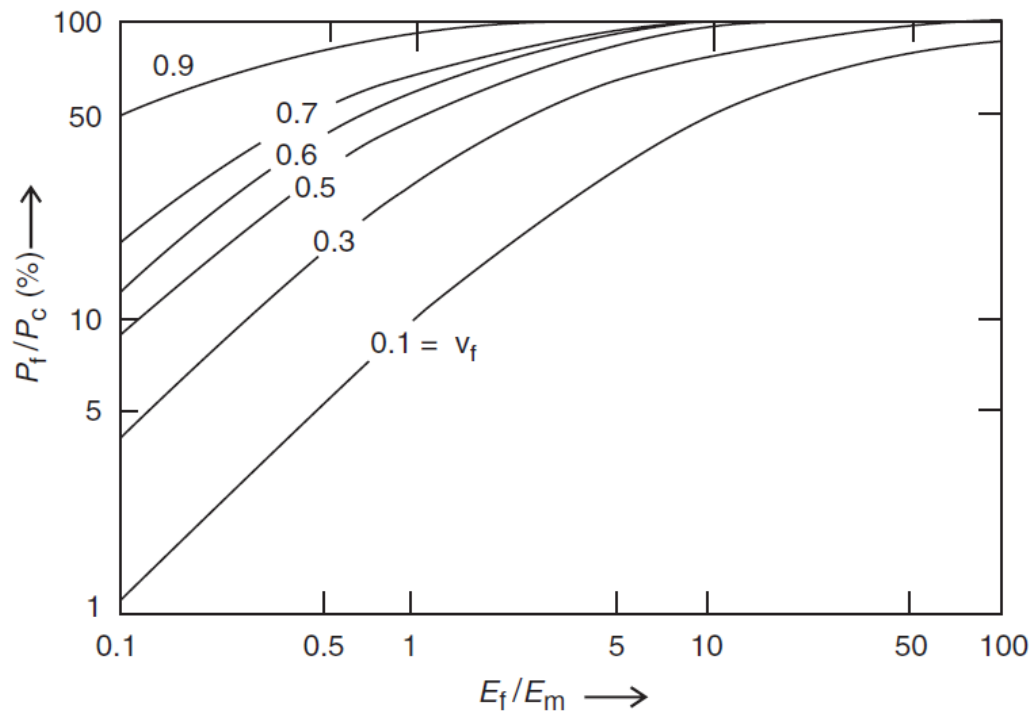
$$E_L = E_f v_f + E_m v_m = E_f v_f + E_m (1 - v_f) = E_m + v_f (E_f - E_m).$$

این رابطه به قانون مخلوطها معروف است.

نسبت نیروی تحمل شده توسط الیاف p_f به نیروی تحمل شده توسط کامپوزیت P_c بصورت زیر بدست می آید:

$$\frac{P_f}{P_c} = \frac{\sigma_f v_f}{\sigma_f v_f + \sigma_m (1 - v_f)} = \frac{E_f v_f}{E_f v_f + E_m (1 - v_f)}. \quad (3.8)$$

بارگذاری طولی



بر اساس نمودار زیر بیشترین نیروی وارده به کامپوزیت را الیاف تحمل می کند. حتی برای حالتی که درصد الیاف ۲۰ درصد حجمی است، بیش از ۷۰٪ نیروی وارده به کامپوزیت را الیاف تحمل می کند.

در عمل بیشتر از ۸۰٪ حجمی الیاف بیشتر نمی توان استفاده کرد زیرا برای مقادیر بیشتر ماتریس قابلیت خیس کردن الیاف را ندارد.

FIGURE 3.2 Fraction of load shared by fibers in longitudinal tensile loading of a unidirectional continuous fiber lamina.

بارگذاری طولی

استحکام کششی طولی کامپوزیت تک جهته σ_{Ltu} بصورت زیر بدست می آید:

$$\sigma_{Ltu} = \sigma_{fu} v_f + \sigma'_m (1 - v_f), \quad (3.9)$$

σ_{fu} : استحکام کششی الیاف
 σ'_m : تنش ماتریس در نقطه شکست الیاف
 σ_{mu} : استحکام کششی ماتریس

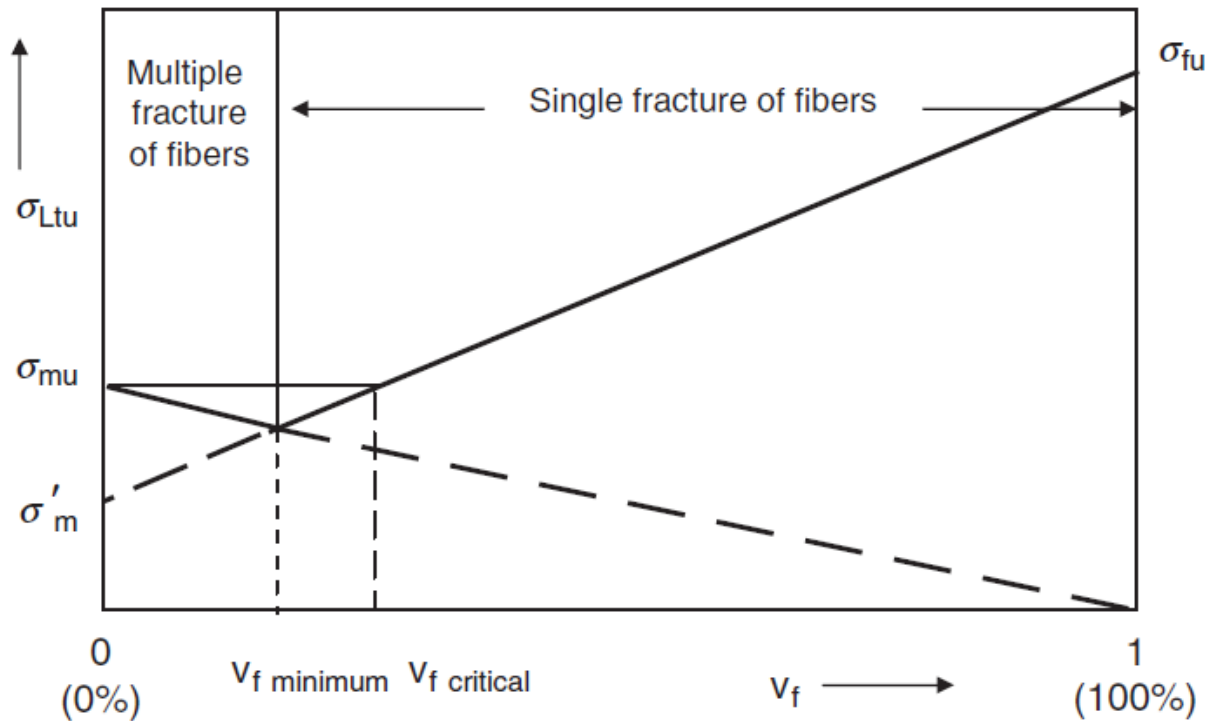
برای اینکه تقویت کننده اثر مثبت داشته باشد، استحکام کامپوزیت بایستی از استحکام ماتریس بیشتر باشد. برای این منظور کسر حجمی الیاف بایستی از یک مقدار بحرانی بیشتر باشد. در کسر حجمی بحرانی استحکام ماتریس و کامپوزیت مساوی است. کسر حجمی بحرانی از رابطه زیر بدست می آید:

$$\text{Critical } v_f = \frac{\sigma_{mu} - \sigma'_m}{\sigma_{fu} - \sigma'_m}. \quad (3.10a)$$

رابطه بالا با فرض این است که بعد از شکست الیاف بلافاصله ماتریس هم دچار شکست می شود، در حالیکه در کسر حجمی کم الیاف، زمینه قابلیت تحمل بار را دارد، پس رابطه بالا بصورت زیر اصلاح می شود:

$$\text{Minimum } v_f = \frac{\sigma_{mu} - \sigma'_m}{\sigma_{mu} + \sigma_{fu} - \sigma'_m}. \quad (3.10b)$$

بارگذاری طولی



نمودار استحکام کششی طولی
نسبت به کسر حجمی الیاف در
کامپوزیت الیافی تک جهته

FIGURE 3.3 Longitudinal tensile strength variation with fiber volume fraction in a unidirectional continuous fiber composite in which the matrix failure strain is greater than the fiber failure strain.

بارگذاری طولی

کسر حجمی بحرانی
و حداقل برای
کامپوزیت با ماتریس
اپوکسی و الیاف های
شیشه E، کربن و
برون

TABLE 3.1
Critical and Minimum Fiber Volume Fractions in E-glass, Carbon,
and Boron Fiber-Reinforced Epoxy Matrix^a Composite

Property	E-Glass Fiber	Carbon Fiber	Boron Fiber
E_f	10×10^6 psi	30×10^6 psi	55×10^6 psi
σ_{fu}	250,000 psi	400,000 psi	450,000 psi
$\varepsilon_{fu} = \frac{\sigma_{fu}}{E_f}$	0.025	0.0133	0.0082
$\sigma'_m = E_m \varepsilon_{fu}$	2,500 psi	1,330 psi	820 psi
Critical v_f	3.03%	2.17%	2.04%
Minimum v_f	2.9%	2.12%	2%

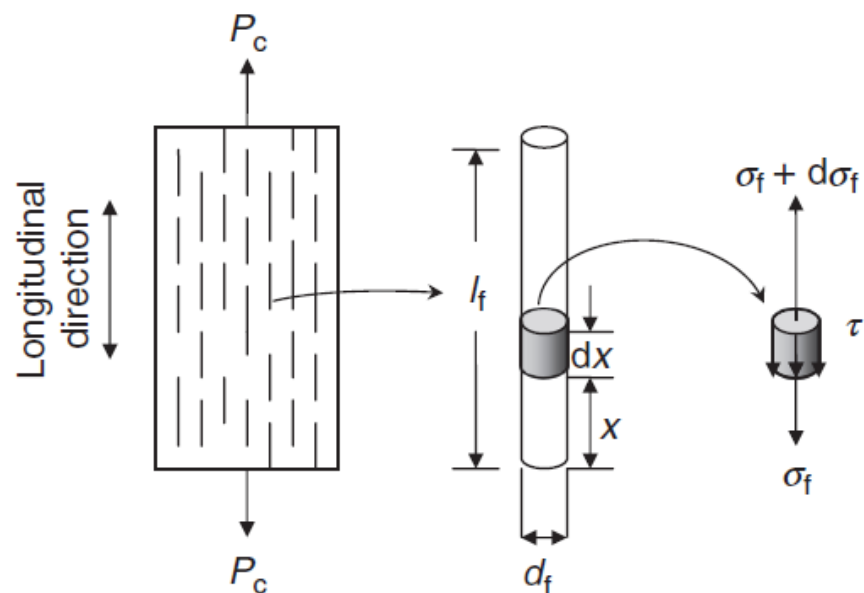
^a Matrix properties: $\sigma_{mu} = 10,000$ psi, $E_m = 0.1 \times 10^6$ psi, and $\varepsilon_{mu} = 0.1$.

بارگذاری طولی برای کامپوزیت با الیاف ناپیوسته

تنش کششی اعمال شده به الیاف های ناپیوسته، توسط مکانیزم برشی بین ماتریس و الیاف، از الیافی به الیاف دیگر منتقل می شود.

از آنجایی که مدول الاستیک ماتریس از الیاف کمتر است، زمینه کرنش بیشتری را تحمل می کند. اختلاف کرنش بین ماتریس و الیاف باعث ایجاد تنش برشی می شود.

یک المان دیفرانسیلی از الیاف را در نظر گرفته و تعادل نیرو را بصورت زیر می نویسیم:



$$\left(\frac{\pi}{4}d_f^2\right)(\sigma_f + d\sigma_f) - \left(\frac{\pi}{4}d_f^2\right)\sigma_f - (\pi d_f dx)\tau = 0,$$

σ_f : تنش طولی در الیاف در فاصله x از یک انتها

τ : تنش برشی بین ماتریس و الیاف

d_f : قطر الیاف

با ساده سازی داریم: $\frac{d\sigma_f}{dx} = \frac{4\tau}{d_f}$

بارگذاری طولی برای کامپوزیت با الیاف ناپیوسته

با فرض اینکه هیچ تنشی در انتهای الیاف وجود ندارد (یعنی: $\sigma_f = 0$ at $x = 0$) و با انتگرال گیری از رابطه قبل داریم:

$$\sigma_f = \frac{4}{d_f} \int_0^x \tau \, dx.$$

برای ساده سازی، تنش برشی را ثابت در نظر گرفته و مقدار آن را τ_i قرار می دهیم. پس داریم:

$$\sigma_f = \frac{4\tau_i}{d_f} x. \quad (3.13)$$

طبق رابطه بالا تنش در دو انتهای الیاف صفر بوده و در مرکز بیشینه است. بیشترین تنش برابر است با:

$$(\sigma_f)_{\max} = 2\tau_i \frac{l_t}{d_f}, \quad (3.14)$$

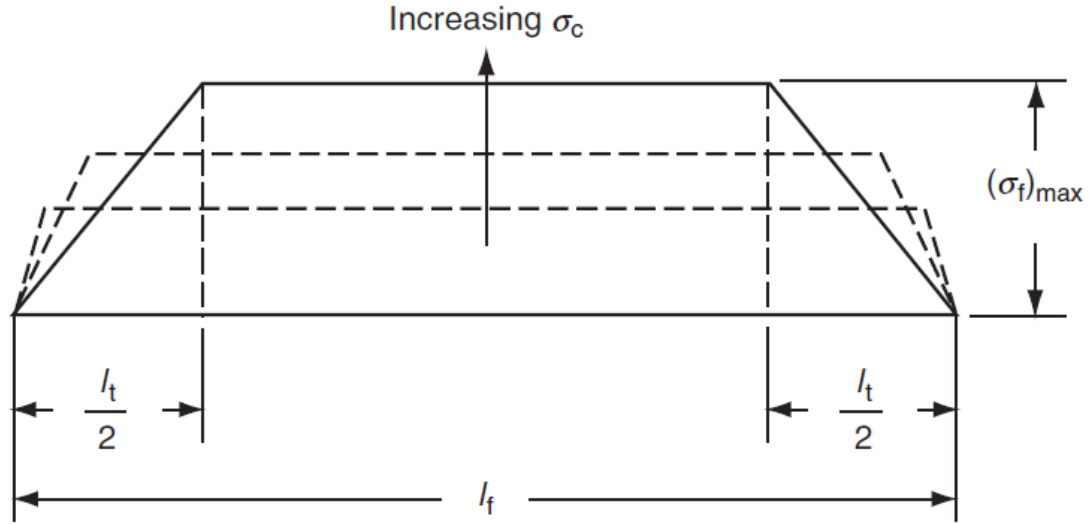
$l_t/2$: طول انتقال بار از هر انتهای الیاف

برای یک قطر مشخص الیاف، طول بحرانی از رابطه زیر بدست می آید:

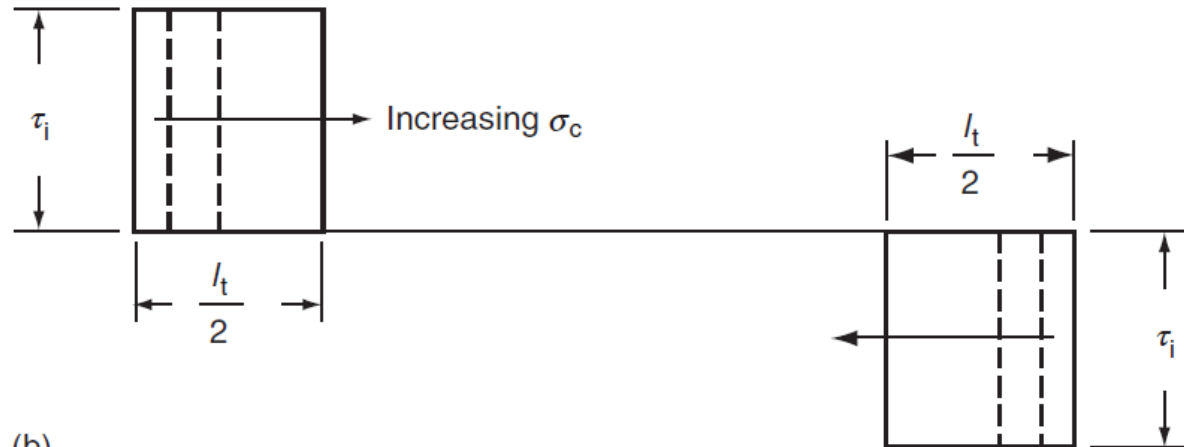
σ_{fu} : استحکام کششی نهایی الیاف
 τ_i : استحکام برشی بین ماتریس و الیاف
 l_c : طول بحرانی الیاف

$$l_c = \frac{\sigma_{fu}}{2\tau_i} d_f, \quad (3.15)$$

بارگذاری طولی برای کامپوزیت با الیاف ناپیوسته



(a)



(b)

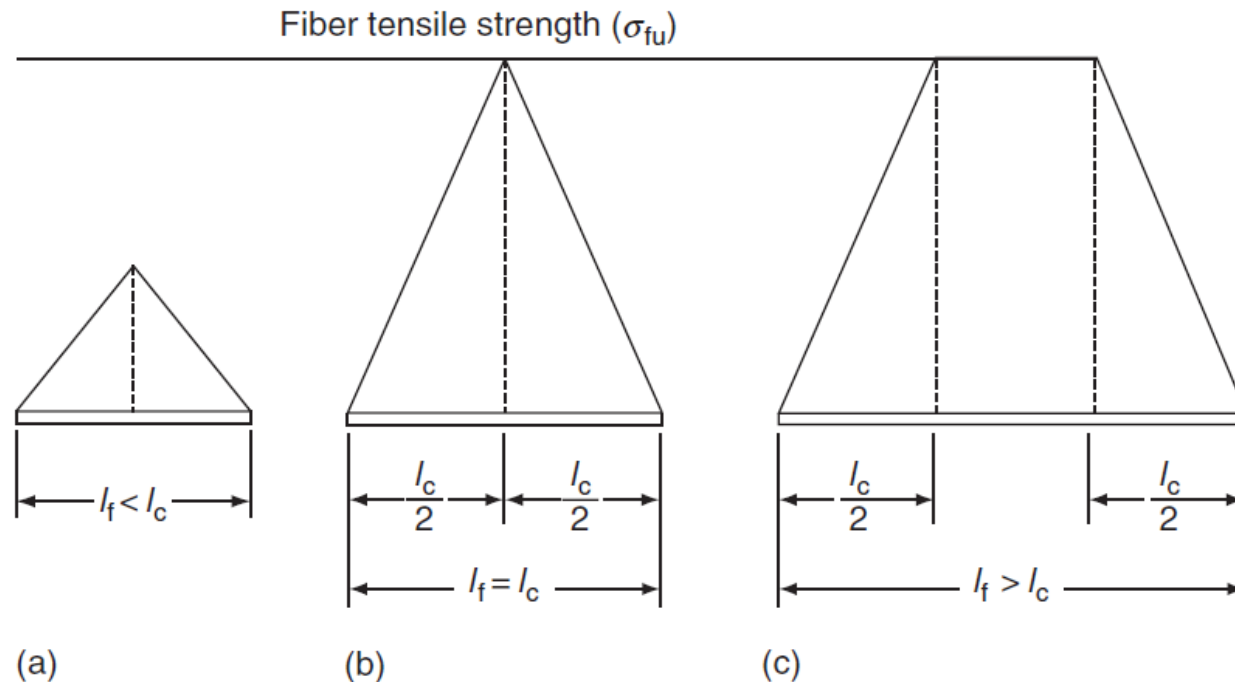
(A) تنش طولی ایده آل و (b) تنش برشی ایده آل در طول یک الیاف ناپیوسته در اثر بارگذاری طولی

بارگذاری طولی برای کامپوزیت با الیاف ناپیوسته

اهمیت طول بحرانی الیاف روی تنشهای طولی الیاف ناپیوسته در شکل زیر آمده است.

در شکل A تنش وارده به الیاف هیچ گاه به استحکام نهایی الیاف نمی رسد و ماتریس یا اتصال بین ماتریس و الیاف دچار شکست می شود.

در شکل C بیشترین تنش وارده به الیاف به استحکام نهایی الیاف می رسد. برای کارایی خوب الیاف بهتر است طول الیاف خیلی بیشتر از طول بحرانی باشد.



بارگذاری طولی برای کامپوزیت با الیاف ناپیوسته

متوسط تنش وارده به الیاف بصورت زیر تعیین می شود:

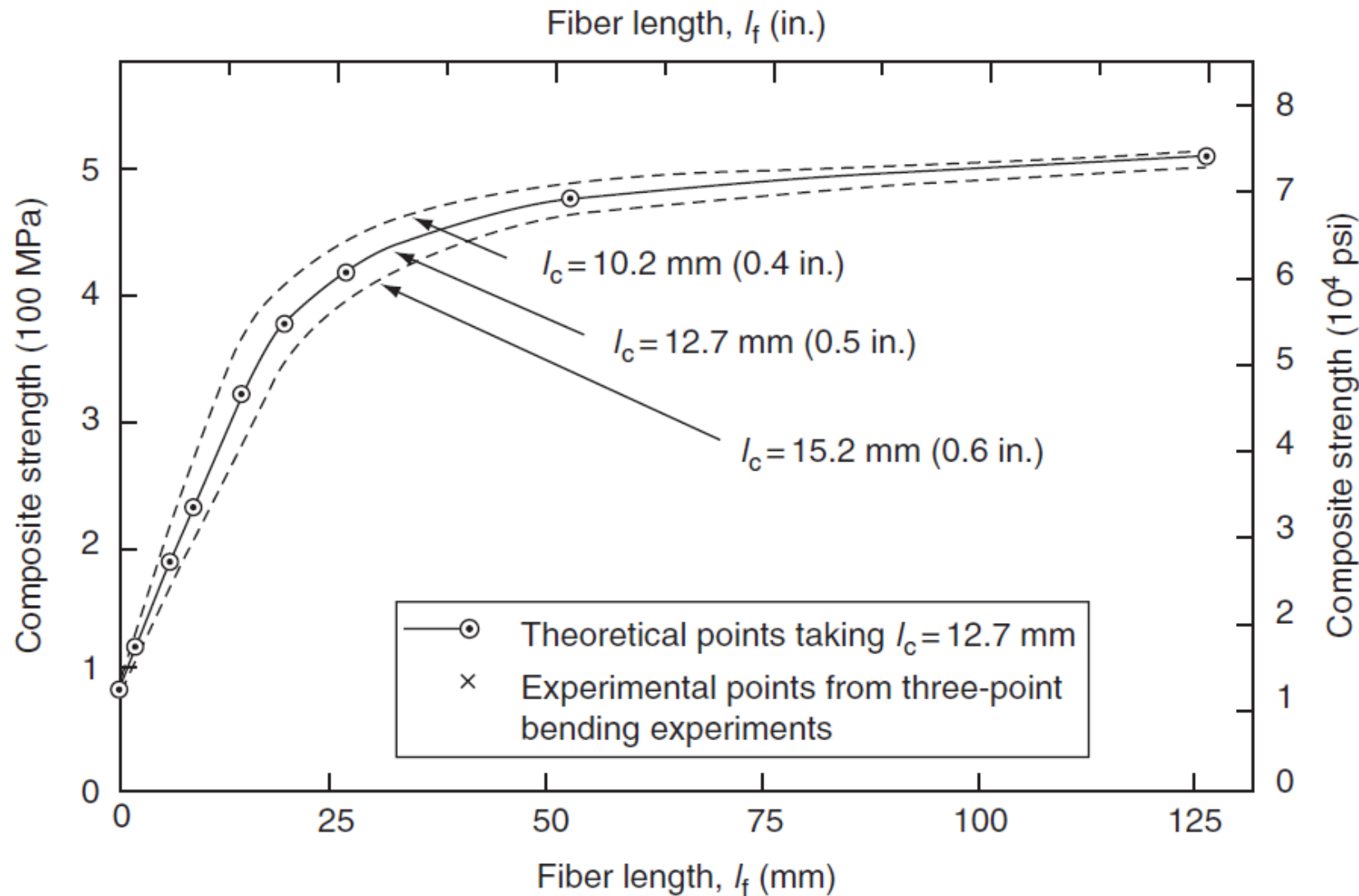
$$\bar{\sigma}_f = \frac{1}{l_f} \int_0^{l_f} \sigma_f dx,$$

$$\bar{\sigma}_f = (\sigma_f)_{\max} \left(1 - \frac{l_t}{2l_f} \right).$$

برای حالت : $l_f > l_c$ استحکام کششی طولی کامپوزیت با الیاف ناپیوسته با جایگزاری $(\sigma_f)_{\max} = \sigma_{fu}$ و $l_t = l_c$ بصورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} \sigma_{Ltu} &= \bar{\sigma}_{fu} v_f + \sigma'_m (1 - v_f) \\ &= \sigma_{fu} \left(1 - \frac{l_c}{2l_f} \right) v_f + \sigma'_m (1 - v_f). \end{aligned} \quad (3.17)$$

بارگذاری طولی برای کامپوزیت با الیاف ناپیوسته



تغییرات استحکام طولی یک
کامپوزیت الیافی ناپیوسته بصورت
تابعی از طول الیاف

بارگذاری طولی برای کامپوزیت با الیاف ناپیوسته

برای حالت $l_f < l_c$ الیاف دچار شکست نمی شود. به جای آن، تک لایه به دلیل شکست ماتریس دچار شکست می شود. از آنجایی که تنش متوسط در الیاف برابر است با $\bar{\sigma}_f = \tau_i \frac{l_f}{d_f}$ ، استحکام کششی طولی کامپوزیت بصورت زیر تعیین می شود:

$$\sigma_{Ltu} = \tau_i \frac{l_f}{d_f} v_f + \sigma_{mu}(1 - v_f), \quad (3.18)$$

مثال

یک کامپوزیت الیافی تک جهته شامل ۶۰٪ حجمی الیاف کربن در ماترس اپوکسی را در نظر بگیرید. خواص ماتریس و الیاف در زیر آمده است. استحکام کششی طولی کامپوزیت را در حالت (۱) الیاف پیوسته و (۲) الیاف با طول ۳/۱۷ میلیمتر برای دو موقعیت تنش برشی بین ماتریس و الیاف (الف) ۴/۱۱ مگاپاسکال و (ب) ۴۱/۱ مگاپاسکال محاسبه کنید.

خواص ماتریس: $E_m = 3.45 \text{ GPa}$ and $\sigma_{my} = 138 \text{ MPa}$

خواص الیاف: استحکام نهایی: ۲۴۸۰ مگاپاسکال، مدول الاستیک: ۳۴۵ مگاپاسکال

حل: با فرض رفتار الاستیک برای ماتریس و الیاف داریم:

$$\varepsilon_{fu} = \frac{\sigma_{fu}}{E_f} = \frac{2480 \text{ MPa}}{345 \times 10^3 \text{ MPa}} = 0.0072.$$

$$\varepsilon_{my} = \frac{\sigma_{my}}{E_m} = \frac{138 \text{ MPa}}{3.45 \times 10^3 \text{ MPa}} = 0.04.$$

ادامه

بنابراین الیاف ها قبل از تسلیم شدن ماتریس دچار شکست می شوند. تنش در ماتریس هنگام شکست الیاف برابر است با:

$$\sigma'_m = E_m \varepsilon_{fu} = (3.45 \times 10^3 \text{ MPa}) (0.0072) = 24.84 \text{ MPa}.$$

$$\begin{aligned}\sigma_{Ltu} &= (2480)(0.6) + (24.84)(1 - 0.6) \\ &= 1488 + 9.94 = 1497.94 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

جواب حالت ۱) از معادله 3.9 داریم:

$$l_c = \frac{2480 \text{ MPa}}{(2)(4.11 \text{ MPa})}(8 \times 10^{-3} \text{ mm}) = 2.414 \text{ mm}.$$

جواب حالت ۲، موقعیت الف)

$$\begin{aligned}\sigma_{Ltu} &= (2480) \left[1 - \frac{2.414}{(2)(3.17)} \right] (0.6) + (24.84)(1 - 0.6) \\ &= 921.43 + 9.94 = 931.37 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

از آنجایی که $l_f > l_c$ از معادله 3.17 داریم:

ادامہ

جواب حالت ۲، موقعیت ب)

When $\tau_i = 41.1$ MPa, $l_c = 0.2414$ mm. Thus, $l_f > l_c$.

$$\sigma_{Ltu} = 1441.28 \text{ MPa.}$$

حالت های (مودهای) میکرو شکست در کشش طولی

تا پیش از این فرض کردیم همه الیاف ها دارای استحکام یکسانی هستند در حالیکه در عمل اینگونه نیست. بنابراین انتظار می رود تعدادی از الیافها در تنشهای کمتری دچار شکست شوند.

وقتی الیافی دچار شکست می شود تنش نرمال وارد بر دو انتهای آن صفر می شود ولی در فاصله $lc/2$ از انتها به مقدار تنش نرمال متوسط می رسد (به دلیل تنش برشی فصل مشترک الیاف و ماتریس)

در منطقه نزدیک شکست الیاف حالت تنش بصورت زیر است:

- تمرکز تنش در حفره ایجاد شده با شکست الیاف
- تمرکز تنش برشی بالا در ماتریس نزدیک انتهای الیاف
- افزایش در تنش نرمال متوسط در جاورت الیاف (شکل b)

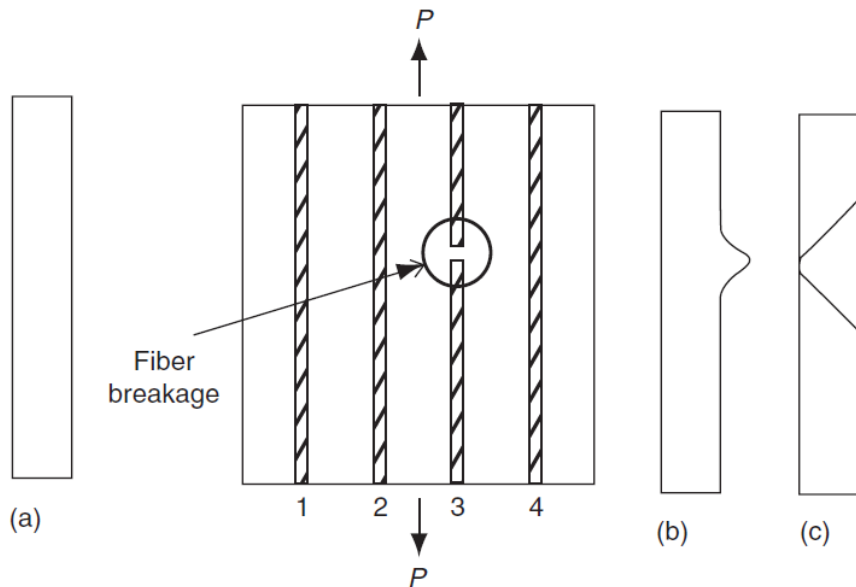
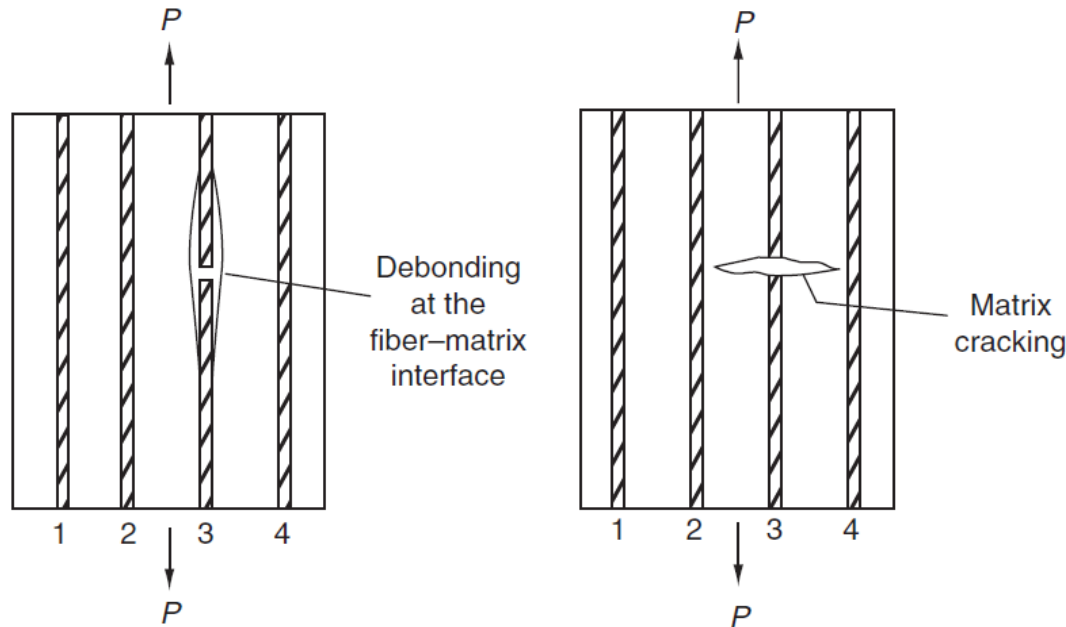


FIGURE 3.11 Longitudinal stress distributions (a) in unidirectional continuous fibers before the failure of fiber 3, (b) in fibers 2 and 4 after the failure of fiber 3, and (c) in fiber 3 after it fails.

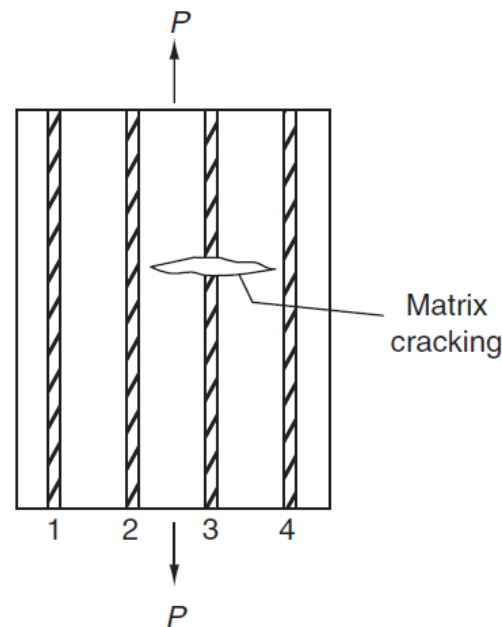
حالت های (مودهای) میکرو شکست در کشش طولی

به دلیل این تنش های موضعی، احتمال چندین مود میکروشکست وجود دارد:

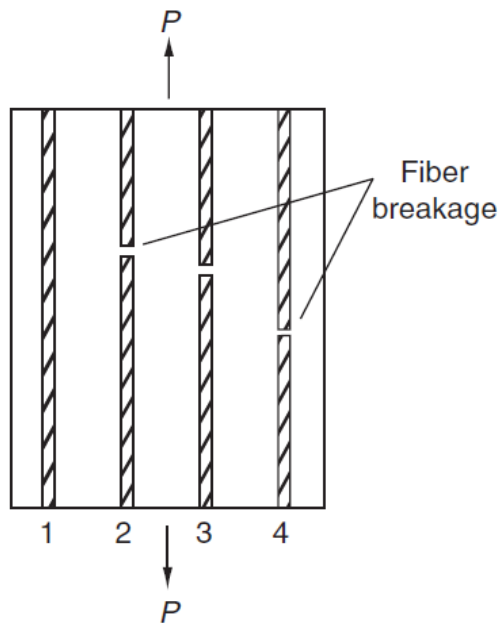
1. جدا شدن جزئی یا کلی الیاف شکسته شده از ماتریس به دلیل تنشهای برشی بالا در انتهای الیاف. در نتیجه اثر الیاف کاهش می یابد (شکل a).
2. شروع میکروتُرک ها در ماتریس به دلیل تمرکز تنش بالا در انتهای الیاف شکسته (شکل B).
3. تغییر شکل پلاستیک در ماتریس
4. شکست الیاف های دیگر در مجاورت اولین الیاف شکسته شده به دلیل تنش های نرمال بالا و تمرکز تنش (شکل C).



(a)

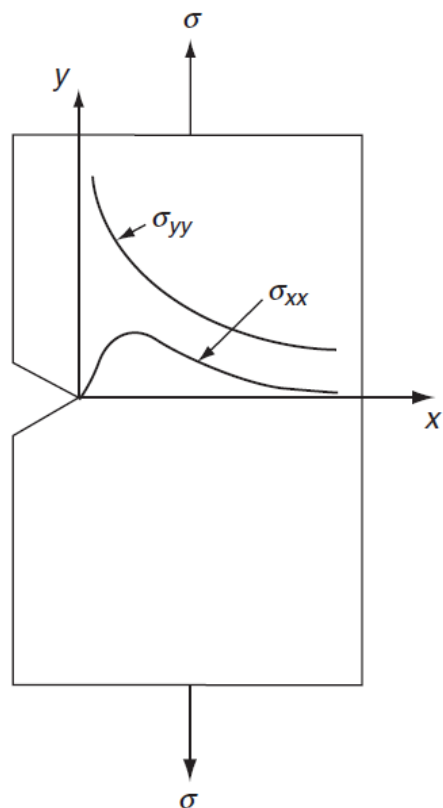


(b)

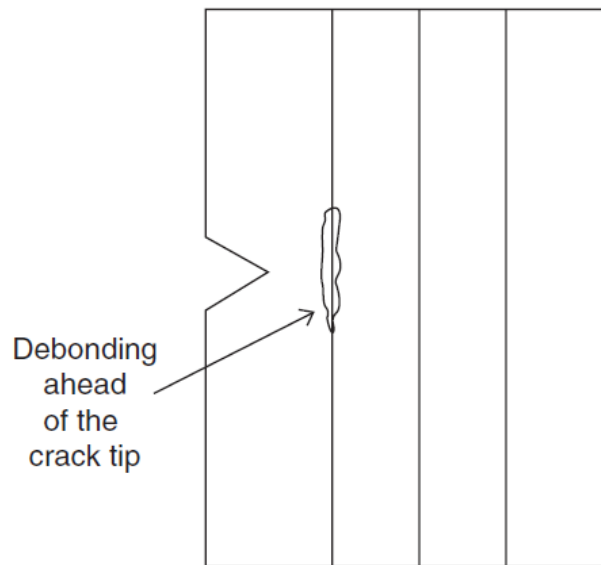


(c)

حالت های (مودهای) میکرو شکست در کشش طولی



(a)



(b)

وجود تنشهای طولی (σ_{yy}) در نوک ترک باعث پیشروی آن می شود.

اجزاء تنش σ_{xx} و τ_{xy} اندکی جلوتر از نوک ترک به بیشترین مقدار خود می رسند (شکل a).

بستگی استحکام فصل مشترک الیاف و ماتریس، این اجزاء تنش قادرند الیاف را از ماتریس جدا کنند (شکل b).

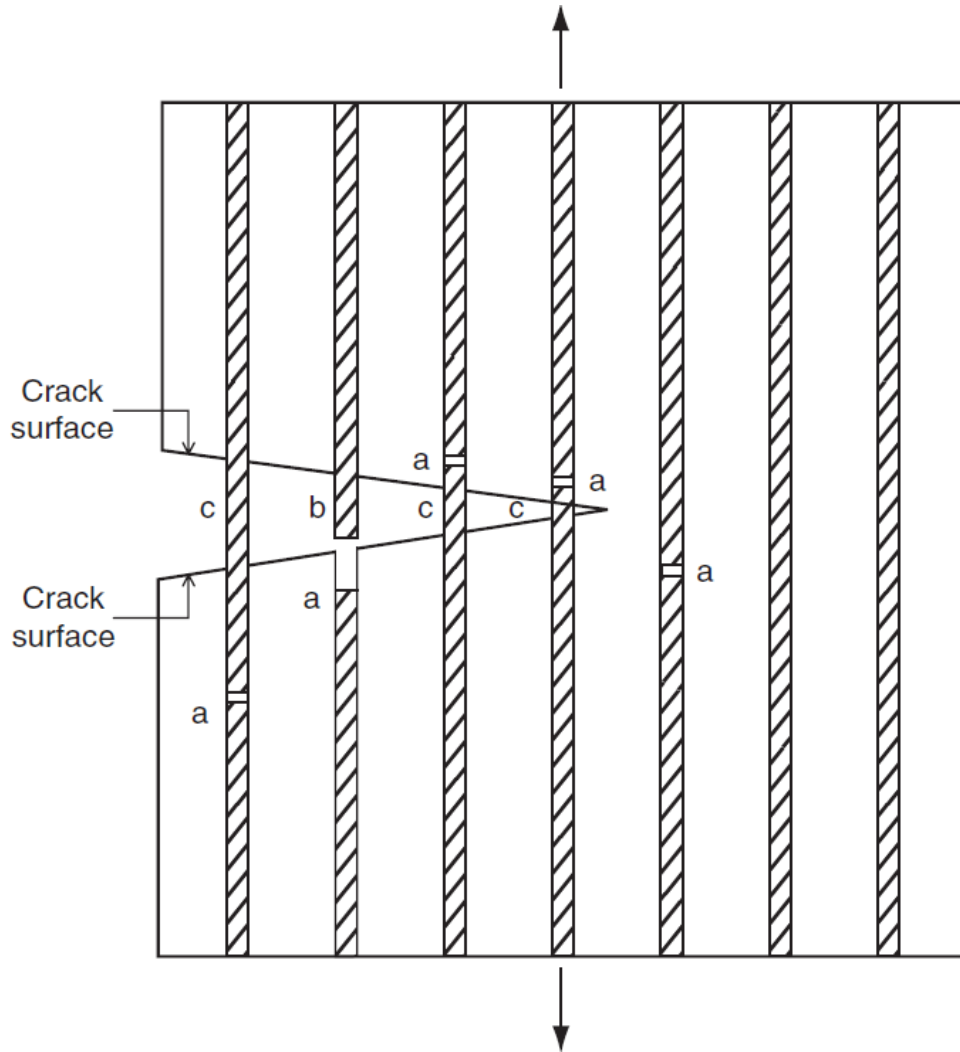
جدا شدن الیاف از زمینه در جلوی ترک اثر کند کردن پیشروی ترک را دارد.

حالت های (مودهای) میکرو شکست در کشش طولی

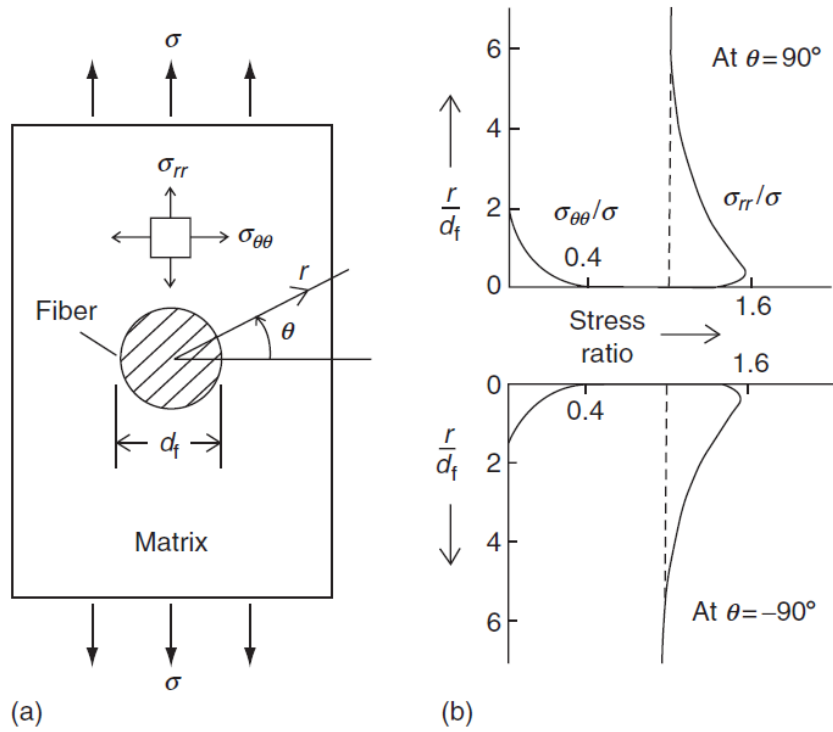
با افزایش نیروی اعمالی به کامپوزیت، شکست الیافها بصورت تصادفی ادامه می یابد. به دلیل توزیع آماری عیوب سطحی، شکست الیاف همیشه در صفحه ترک رخ نمی دهد (شکل مقابل).

بنابراین باز شدن ترک ماتریس ممکن است باعث بیرون زدن (pull out) الیاف از ماتریس شود.

اگر استحکام فصل مشترک بالا باشد و یا طول الیاف شکسته بزرگتر از $lc/2$ باشد، بیرون زدن الیاف بر جدا شدن آن از ماتریس، مقدم می شود. بنابراین الیافهای شکسته شده مانند پلی بین پیشانی ترک ها عمل کرده و باعث می شود ماتریس قبل از شکست دچار تغییر شکل قابل توجهی شود.



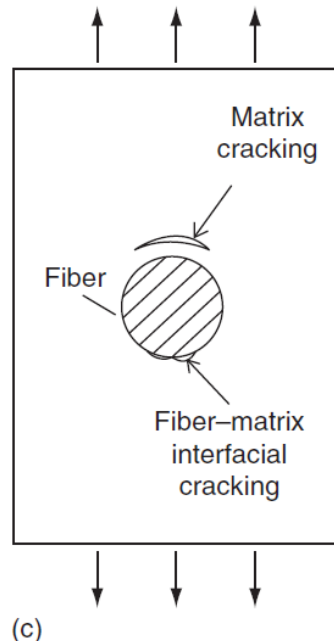
بارگذاری عرضی



وقتی بار کششی عرضی به تک لایه وارد می شود، الیاف ها در ماتریس مانند نقص عمل می کنند.

اگرچه مدول ماتریس در حضور الیاف افزایش می یابد، تنش ها و کرنش های موضعی در ماتریس اطراف الیاف بیشتر از تنش اعمالی است. در شکل b مشاهده می شود تنش های کششی شعاعی نزدیک فصل مشترک الیاف و زمینه ۵۰٪ بیشتر از تنش اعمالی است.

به دلیل این تنش های شعاعی، ترک های عمود بر جهت بارگذاری ممکن است یا در فصل مشترک الیاف-ماتریس یا در ماتریس و در جهت $\theta = 90^\circ$ پیشروی کنند (شکل c).



بارگذاری عرضی

وجود الیاف باعث افزایش مدول جانبی ولی کاهش استحکام جانبی (به خصوص در E_f/E_m و V_f بالا) میشود. با افزایش نسبت E_f/E_m و کسر حجمی الیاف، مطابق شکل زیر، بیشنه تنش اصلی افزایش می یابد.

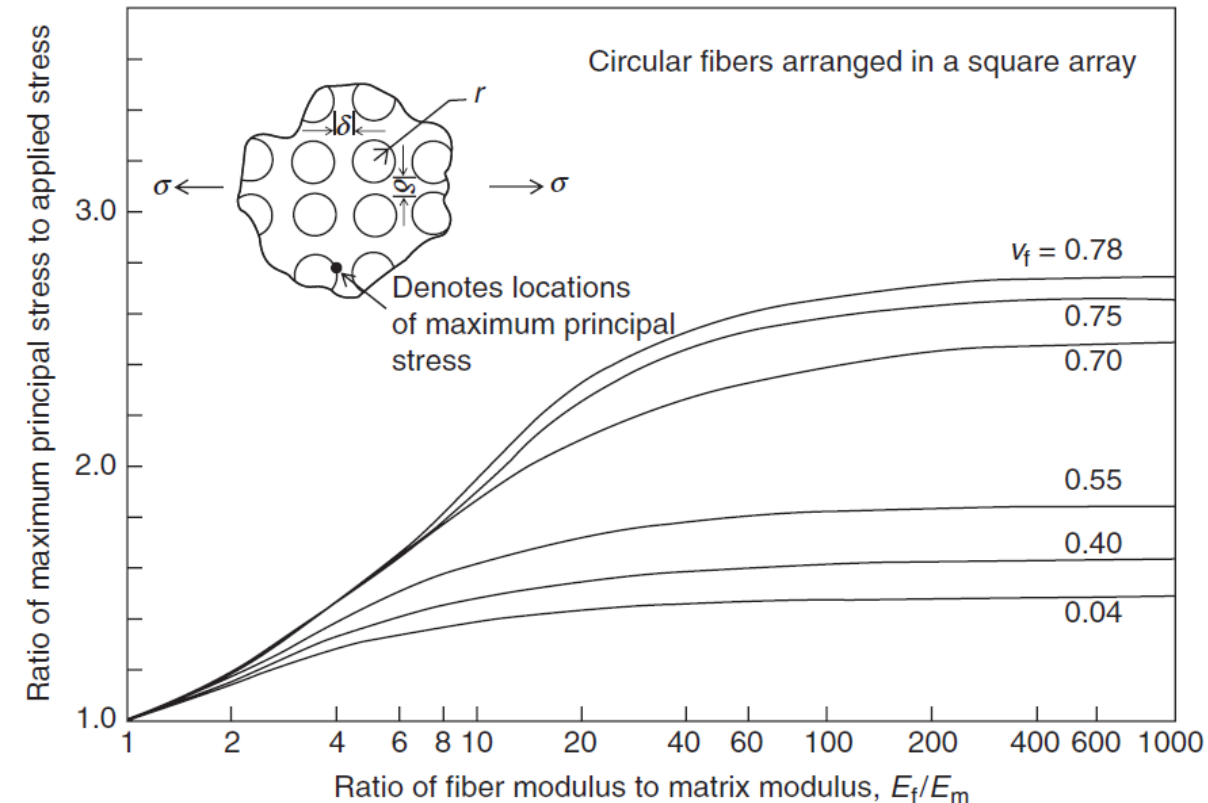
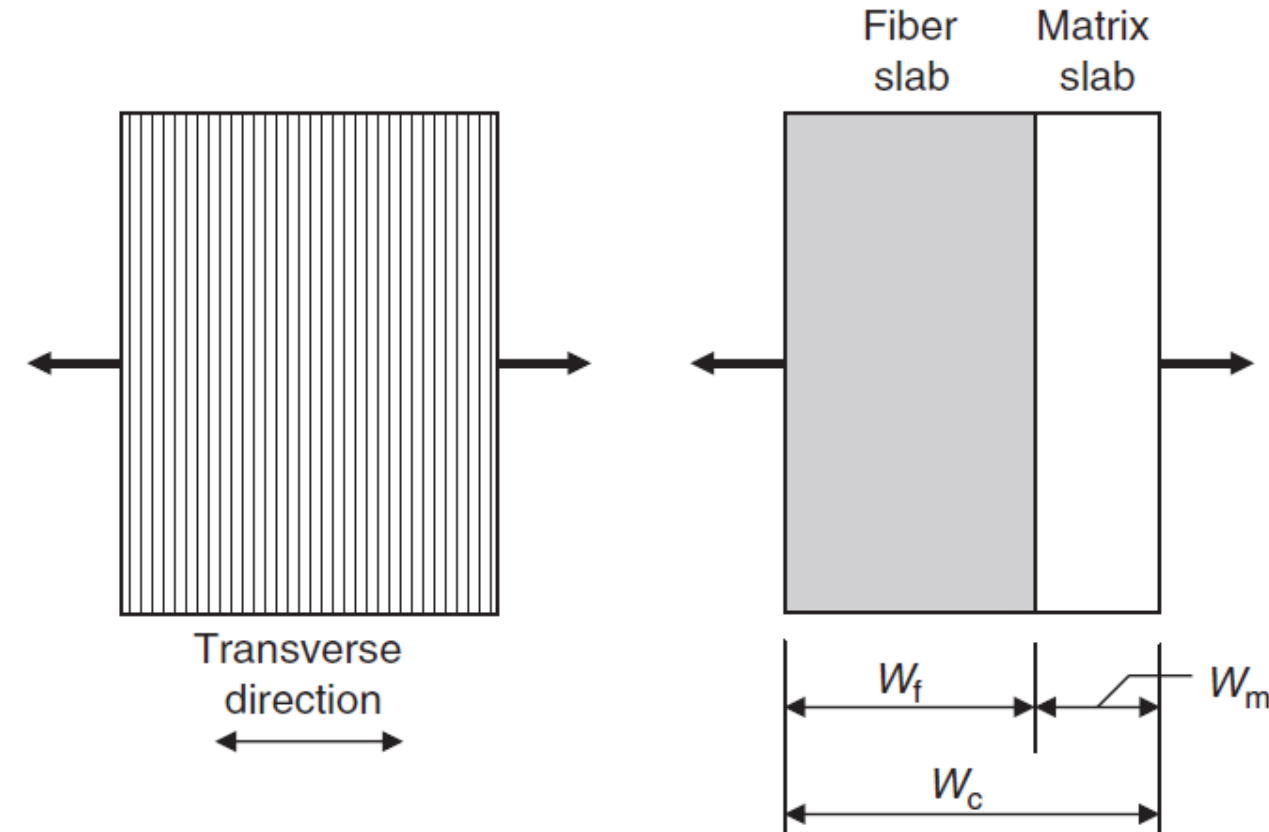


TABLE 3.3
Effect of Transverse Loading in a Unidirectional Composite

Composite Material	$\frac{E_f}{E_m}$	v_f (%)	Transverse Modulus, GPa (Msi)	Transverse Strength, MPa (ksi)
E-glass-epoxy	20	39	8.61 (1.25)	47.2 (6.85)
		67	18.89 (2.74)	30.87 (4.48)
E-glass-epoxy	24	46	8.96 (1.30)	69.1 (10.03)
		57	13.23 (1.92)	77.92 (11.31)
		68	21.91 (3.18)	67.93 (9.86)
		73	25.9 (3.76)	41.27 (5.99)
Boron-epoxy	120	65	23.43 (3.4)	41.96 (6.09)

Source: Adapted from Adams, D.F. and Doner, D.R., *J. Compos. Mater.*, 1, 152, 1967.

محاسبه مدول در بارگذاری عرضی



ساده ترین مدل برای محاسبه مدول جانبی بدینصورت است که الیاف و ماتریس را بصورت دو ماده مجزا با همان نسبت حجمی با چسبندگی کامل در وجه مشترک مدل شوند.

فرضیات این مدل به شرح زیر است:

1. کل تغییر شکل جانبی برابر مجموع تغییر شکل جانبی

الیاف بعلاوه ماتریس است. $\Delta W_c = \Delta W_f + \Delta W_m$

2. تنش جانبی کششی در ماتریس و الیاف برابر است.

$$\sigma_f = \sigma_m = \sigma_c$$

محاسبه مدول در بارگذاری عرضی

از آنجایی که داریم:

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta W_c}{W_c} \quad \varepsilon_f = \frac{\Delta W_f}{W_f} \quad \varepsilon_m = \frac{\Delta W_m}{W_m}$$

پس می توان نوشت:

$$\varepsilon_c W_c = \varepsilon_f W_f + \varepsilon_m W_m$$

با تقسیم دو طرف بر W_c و اینکه $\frac{W_f}{W_c} = v_f$ و $\frac{W_m}{W_c} = v_m$ داریم:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_f v_f + \varepsilon_m v_m$$

از آنجایی که داریم:

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_T} \quad \varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_f} \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E_m}$$

رابطه فوق به این صورت نوشته می شود:

$$\frac{\sigma_c}{E_T} = \frac{\sigma_f}{E_f} v_f + \frac{\sigma_m}{E_m} v_m$$

با توجه به فرض: $\sigma_f = \sigma_m = \sigma_c$

مدول عرضی به این صورت نوشته می شود:

$$\frac{1}{E_T} = \frac{v_f}{E_f} + \frac{v_m}{E_m}$$

محاسبه استحکام کششی عرضی

یک معادله ساده برای پیش بینی استحکام کششی عرضی تک لایه کامپوزیتی بصورت زیر می باشد:

$$\sigma_{Ttu} = \frac{\sigma_{mu}}{K_{\sigma}},$$

بطوریکه در آن:

$$K_{\sigma} = \frac{1 - v_f[1 - (E_m/E_f)]}{1 - (4v_f/\pi)^{1/2}[1 - (E_m/E_f)]}$$

پارامتر K_{σ} بیانگر بیشینه تمرکز تنش در ماتریس است که در آن الیاف ها دارای آرایه مربعی می باشند.

مثال)

یک کامپوزیت الیاف پیوسته حاوی ۴۰٪ کسر حجمی الیاف شیشه و ۶۰٪ کسر حجمی رزین پلی استر میباشد. مدول الاستیسیته الیاف شیشه ۶۹ Gpa و پلی استر بعد از آنکه سخت شد، ۳.۴ Gpa است. موارد زیر را حساب کنید:

الف) مدول الاستیسیته کامپوزیت در جهت طولی

ب) اگر سطح مقطع کامپوزیت 250 mm^2 باشد و تنش در راستای طولی ۵۰ Mpa به کامپوزیت اعمال شود، مقدار باری که توسط هر یک از فازها تحمل میشود.

ج) کرنش هر فاز را محاسبه نمایید.

حل:

$$E_{cl} = 3.4 \times 0.6 + 69 \times 0.4 = 30 \text{ GPa}$$

جواب

$$\frac{F_f}{F_m} = \frac{69 \times 0.4}{3.4 \times 0.6} = 13.5 \Rightarrow F_f = 13.5 F_m$$

$$F_c = \sigma_c A_c = 50 \times 250 = 12500 \text{ N}$$

$$F_f + F_m = 14.5 F_m = 12500 \Rightarrow F_m = 860 \text{ N} , F_f = 11640 \text{ N}$$

محاسبه کرنش هر فاز

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{50 \times 10^6}{30 \times 10^9} = 1.67 \times 10^{-3}$$

$$A_m = V_m A_c = 0.6 \times 250 = 150 \text{ mm}^2$$

$$A_f = V_f A_c = 0.4 \times 250 = 100 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_m = \frac{F_m}{A_m} = \frac{860}{150} = 5.73 \text{ MPa} , \sigma_f = \frac{F_f}{A_f} = \frac{11640}{100} = 116.4 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E_m} = 1.68 \times 10^{-3} , \varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_f} = 1.68 \times 10^{-3}$$

بارگذاری طولی فشاری

یکی از وظایف ماتری محافظت جانبی الیاف در بارگذاری فشاری می باشد.

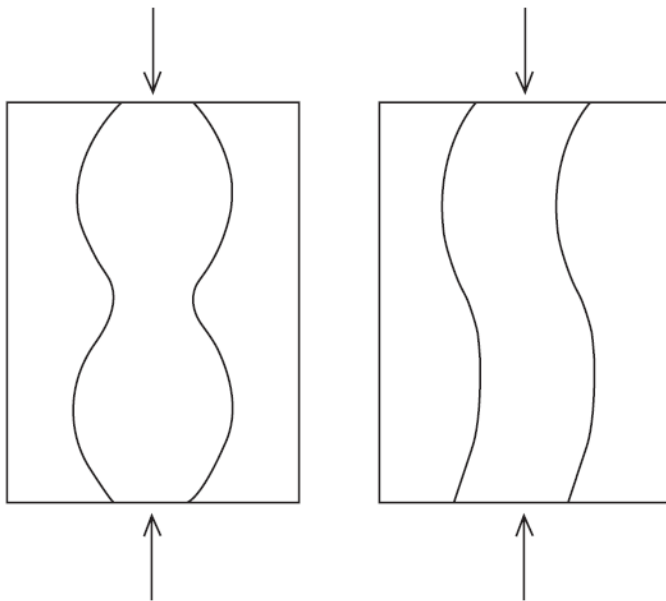
در ماتریس های پلیمری که مدول الاستیک نسبت به الیاف خیلی پایین است، شکست در فشار طولی اغلب با کمانش موضعی الیاف شروع می شود.

بستگی به اینکه ماتریس تغییر شکل الاستیک یا پلاستیک می دهد، دو نوع مود کمانش موضعی شامل ۱- میکروکمانش موضعی و ۲- تابیدگی الیاف مشاهده می شود.

دو مود میکروکمانش الاستیک الیاف در شکل زیر نشان داده شده است.

مود کششی (شکل a) که در کسر حجمی پایین (کمتر از ۲۰٪) رخ می دهد.

مود برشی (شکل b) که در کسر حجمی بالا رخ می دهد.



(a)

(b)

بارگذاری طولی فشاری

با استفاده از تئوری کمانش، استحکام فشاری در مود انبساطی و برشی بصورت زیر است:

$$\text{Extensional mode: } \sigma_{\text{Lcu}} = 2\nu_f \left(\frac{\nu_f E_m E_f}{3(1 - \nu_f)} \right)^{1/2}, \quad (3.28a)$$

$$\text{Shear mode: } \sigma_{\text{Lcu}} = \frac{G_m}{(1 - \nu_f)}, \quad (3.28b)$$

G_m مدول برشی ماتریس

بارگذاری فشاری طولی

تابیدگی الیاف Fiber kinking

این مود زمانی روی میدهد که راستای الیاف مقداری نسبت به جهت اعمال بارگذاری فشاری، زاویه داشته باشد.

در اثر اعمال بار فشاری، دسته ای از الیاف تابیده و دچار زاویه انحراف بیشتری علاوه بر انحراف اولیه شده و موجب تغییر شکلهای بزرگ برشی در ماتریس میشود.

معمولاً الیاف در محل تابیدگی دچار شکست می شود.

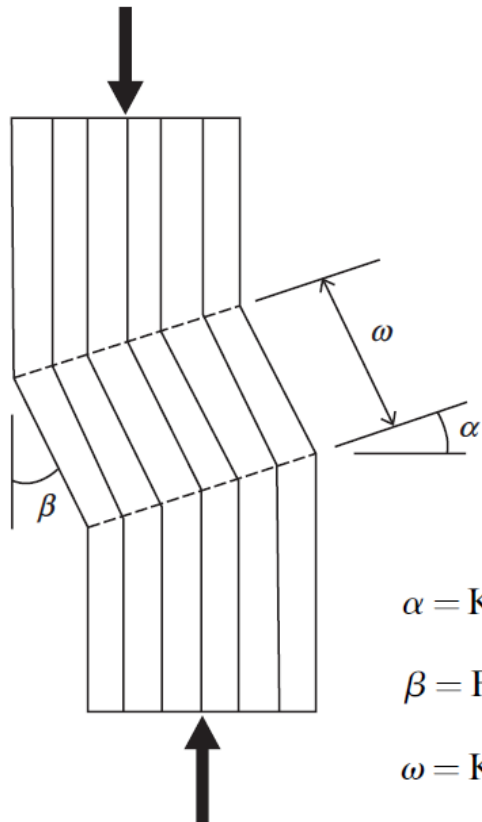
تنش مورد نیاز برای شروع تابیدگی با فرض رفتار الاستیک-پلاستیک کامل از رابطه زیر تعیین می شود:

$$\sigma_{ck} = \frac{\tau_{my}}{\varphi + \gamma_{my}}$$

τ_{my} استحکام تسلیم ماتریس

γ_{my} کرنش تسلیم ماتریس

φ زاویه انحراف اولیه الیاف



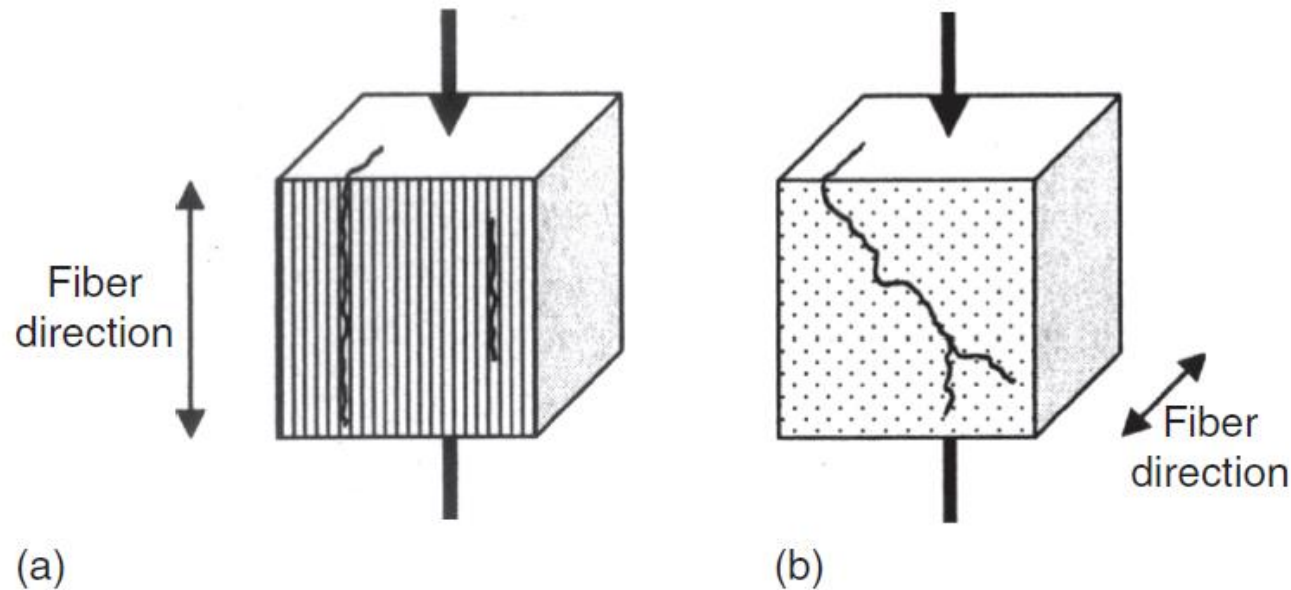
α = Kink band angle

β = Fiber tilt angle

ω = Kink band width

بارگذاری فشاری عرضی

در بارگذاری فشاری عرضی، بار فشاری عمود بر الیاف وارد می شود، و رایجترین مود شکست آن شکست برشی ماتریس در طول صفحاتی است که موازی با جهت الیاف بوده اما با جهت بارگذاری زاویه دارند. شکست با جدا شدن الیاف از ماتریس شروع می شود.



شکل a: بارگذاری فشاری طولی
شکل b: بارگذاری فشاری عرضی

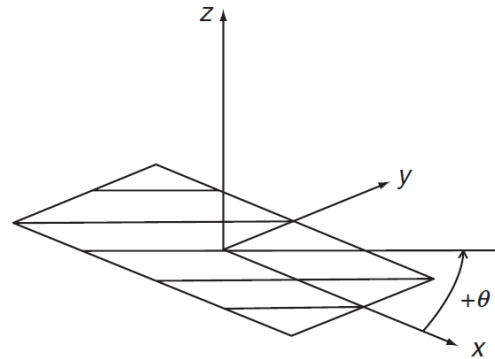
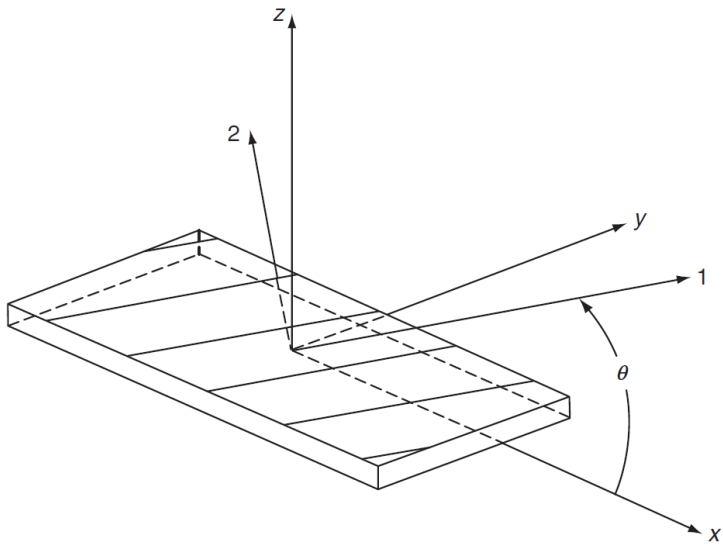
مشخصه های تک لایه تقویت شده با الیاف

اصول

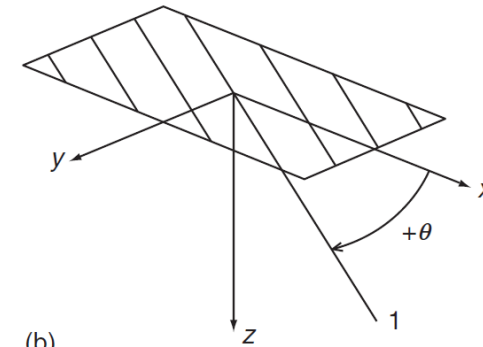
محورهای مختصات

جهات ۱ و ۲ جهات موازی و عمود بر الیاف هستند.

برای تعیین محورهای مختصات از قانون دست راست استفاده می شود.



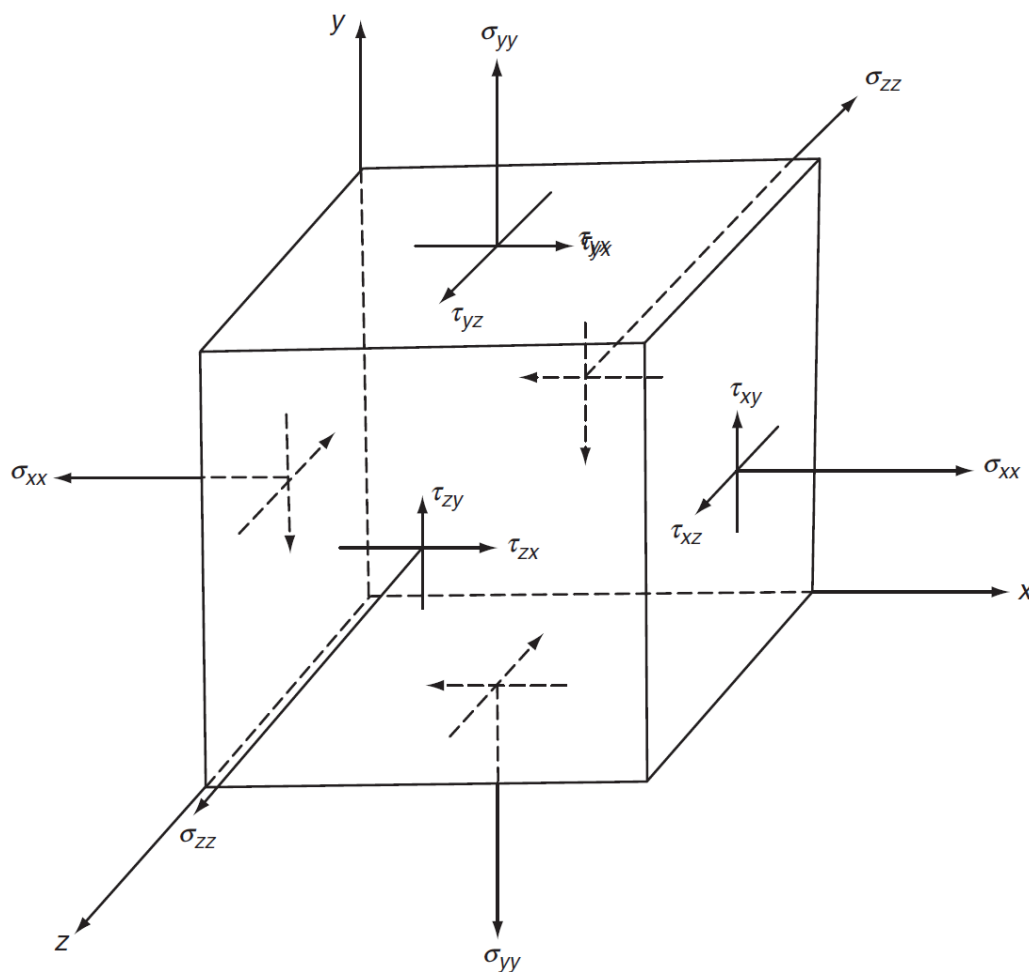
(a)



(b)

نشانه گذاری

اجزاء تنشهای نرمال و برشی وارد بر یک المان



تبدیل تنش و کرنش در یک تک لایه تحت تنشهای صفحه ای

در آنالیز تنش یک تک لایه با زاویه الیاف θ ، اغلب بهتر است طبق روابط زیر تنشها و کرنشها در جهت X-Y به جهت 1-2 تبدیل شود.

$$\sigma_{11} = \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta,$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta,$$

$$\tau_{12} = (-\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).$$

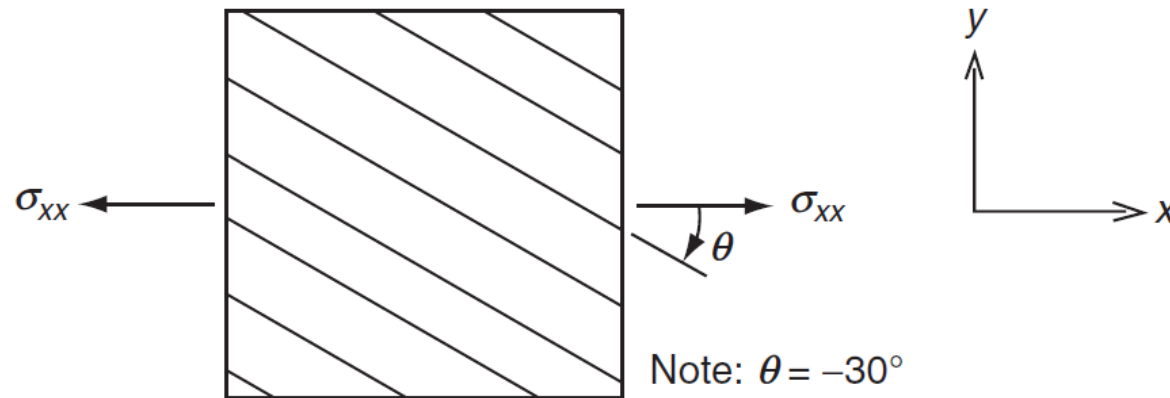
$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} \cos^2 \theta + \varepsilon_{yy} \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \cos \theta \sin \theta,$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{xx} \sin^2 \theta + \varepsilon_{yy} \cos^2 \theta - \gamma_{xy} \cos \theta \sin \theta,$$

$$\gamma_{12} = 2(-\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).$$

مثال

تنش نرمال σ_{xx} به مقدار ۱۰ مگاپاسکال طبق شکل زیر به یک تک لایه با زاویه الیاف ۳۰ درجه اعمال می شود. تنشها در جهات اصلی ماده (۱-۲) را تعیین کنید.



جواب

از آنجایی که $\sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$ داریم:

$$\sigma_{11} = \sigma_{xx} \cos^2 \theta,$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{xx} \sin^2 \theta,$$

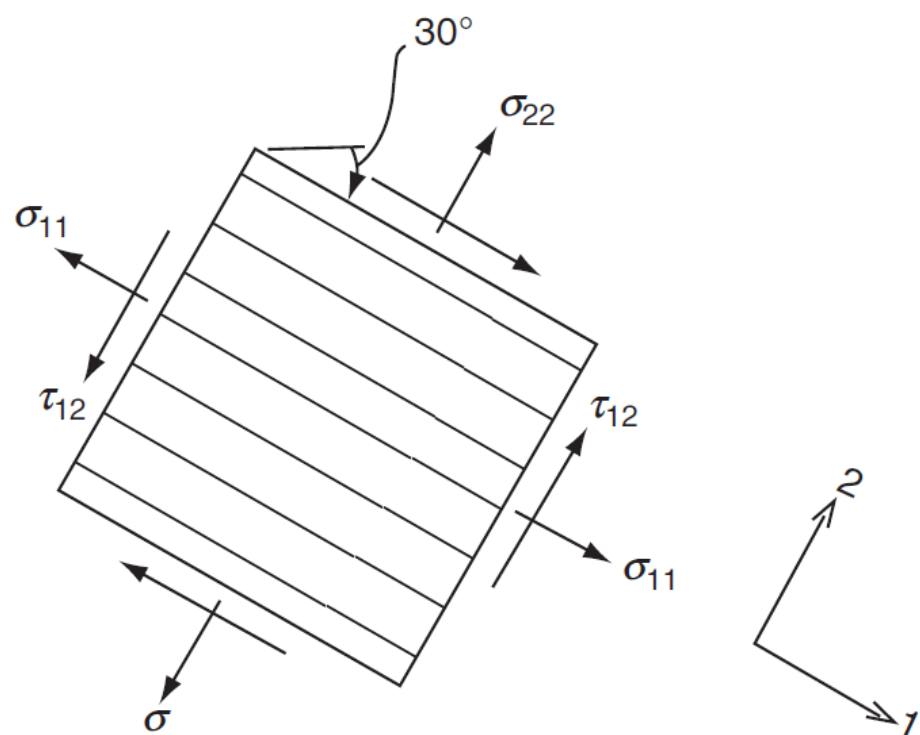
$$\tau_{12} = -\sigma_{xx} \sin \theta \cos \theta.$$

$$\sigma_{xx} = +10 \text{ MPa and } \theta = -30^\circ$$

$$\sigma_{11} = 7.5 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{22} = 2.5 \text{ MPa},$$

$$\tau_{12} = 4.33 \text{ MPa}.$$

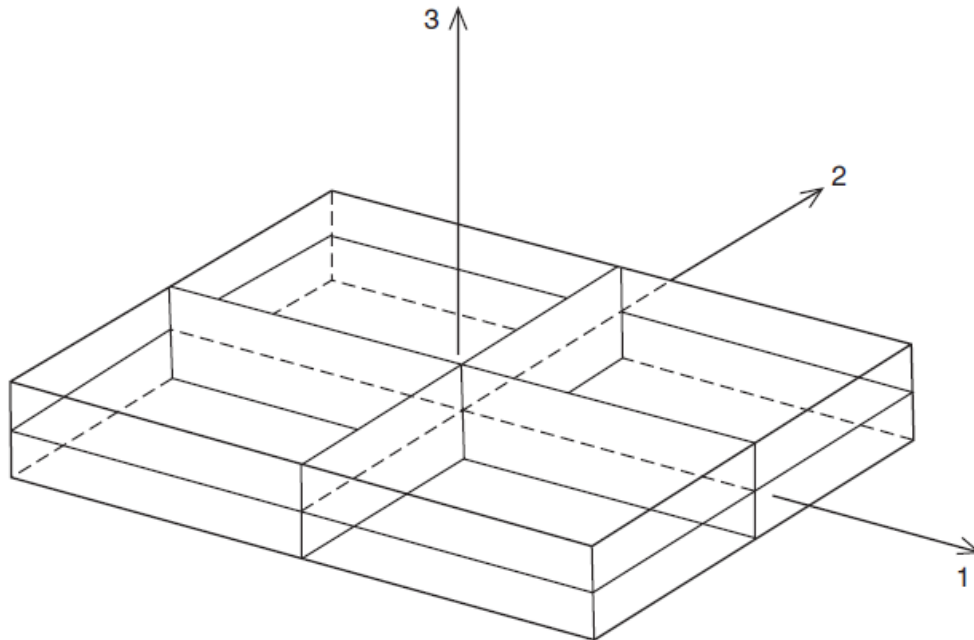


مواد همسانگرد، ناهمسانگرد و ارتوتروپیک

در مواد همسانگرد (آیزوتروپیک Isotropic) خواص در تمامی جهات یکسان است. لذا بینهایت صفحه تقارن برای خواص مواد وجود دارد.

در مواد ناهمسانگرد (Anisotropic) خواص مواد در جهات گوناگون، مختلف است.

کامپوزیتهای تقویت شده با الیاف دارای سه صفحه تقارن عمود بر هم برای خواص مواد دارند (1-2,2-3,1-3). به این مواد ارتوتروپیک (Orthotropic) گویند.



مواد همسانگرد، ناهمسانگرد و ارتوتروپیک

اگر یک ماده ایزوتروپیک در هر جهتی تحت تنش نرمال قرار گیرد، در آن جهت دچار افزایش طول و در جهت دیگر منقبض میشود.

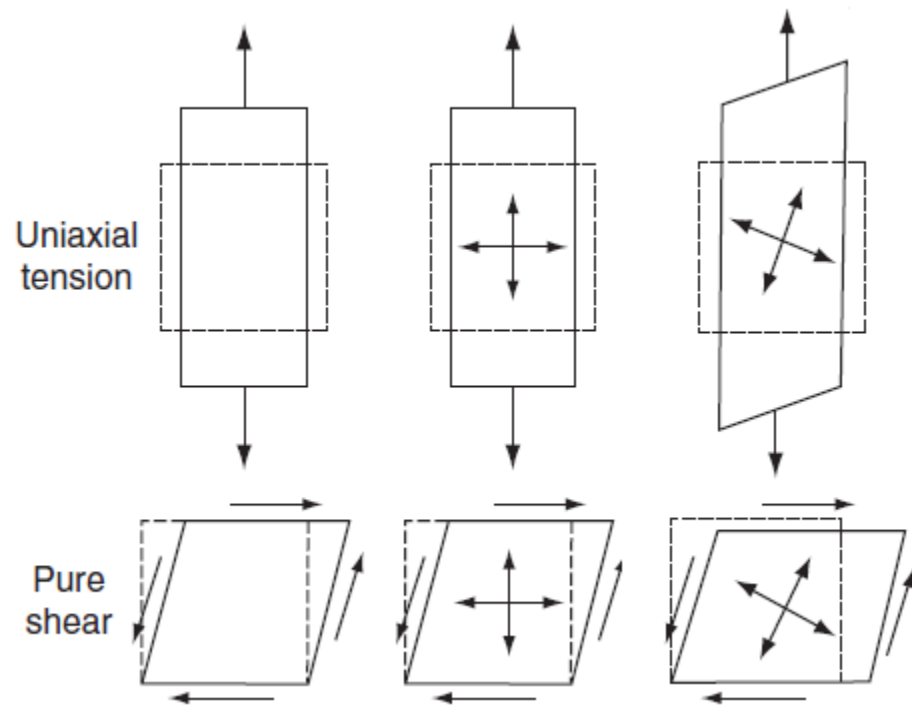
ماده ارتوتروپیک اگر در جهات اصلی مادی دچار بارگذاری شود، رفتاری مشابه مواد ایزوتروپیک دارد.

اما اگر در جهاتی غیر از جهات اصلی مادی تحت تنش نرمال قرار گیرد، همزمان دچار تغییرشکلهای گسترشی

و برشی میشود.

به این پدیده که تحت اثر بارگذاری تنش نرمال خالص و یا تنش برشی خالص هر دو تغییر شکل انبساطی و برشی روی دهد، کوپل گستردگی-برشی گویند.

(extension-shear coupling)

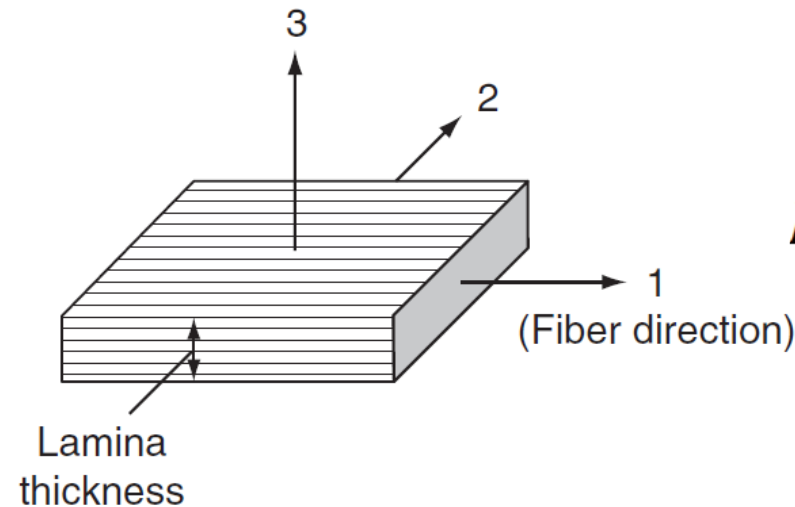
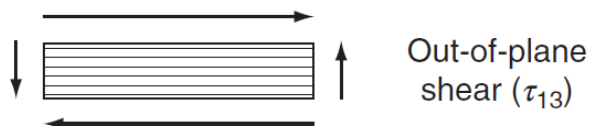
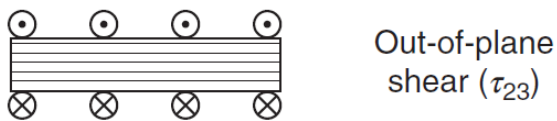
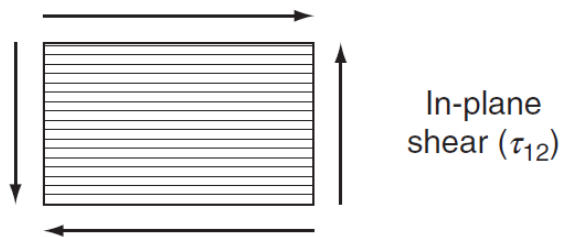
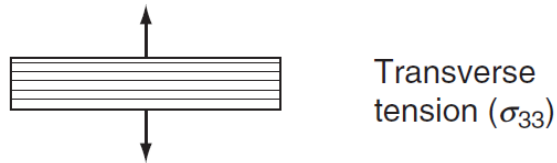
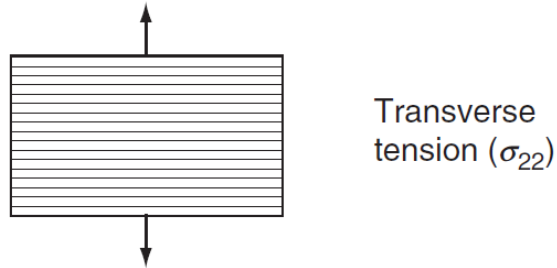
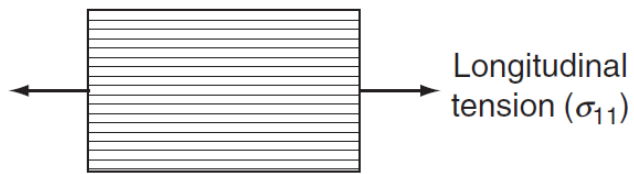


ثوابت الاستیک ماده همسانگرد

ثوابت الاستیک ماده همسانگرد شامل مدول الاستیک E ، ضریب پواسان ν و مدول برشی G می باشد که تنها دوتا از این ثوابت مستقل هستند. با داشتن دو ثابت طبق رابطه زیر ثابت سوم تعیین می شود.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

ثوابت الاستیک ماده همسانگرد عرضی



○ تعداد ثوابت الاستیک مستقل برای مواد ناهمسانگرد و ارتوتروپیک به ترتیب ۲۱ و ۹ عدد است.

○ ثوابت ماده ارتوتروپیک بصورت زیر است

$$E_{11}, E_{22}, E_{33}, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{13}, \text{ and } \nu_{23}.$$

○ طبق شکل روبرو، در ماده در تک لایه خواص جهات ۱ و ۲ یکسان است یعنی:

$$E_{22} = E_{33} \quad \nu_{12} = \nu_{13} \quad G_{12} = G_{13}$$

○ و G_{23} بصورت زیر تعیین می شود:

$$G_{23} = \frac{E_{22}}{2(1 + \nu_{23})}$$

ثوابت الاستیک ماده همسانگرد عرضی

○ بنابراین تعداد ثوابت الاستیک به ۵ عدد به صورت زیر کاهش می یابد. این مواد را آیزوتروپیک عرضی (Transversely Isotropic) گویند.

$$E_{11}, E_{22}, \nu_{12}, G_{12}, \text{ and } \nu_{23}.$$

○ ثابت ν_{12} و ν_{21} توسط رابطه زیر به هم مربوط می شوند:

$$\nu_{21} = \left(\frac{E_{22}}{E_{11}} \right) \nu_{12}.$$

○ همچنین اثبات شده که:

$$\nu_{23} = \nu_{32} = \nu_{12} \frac{(1 - \nu_{21})}{(1 - \nu_{12})}.$$

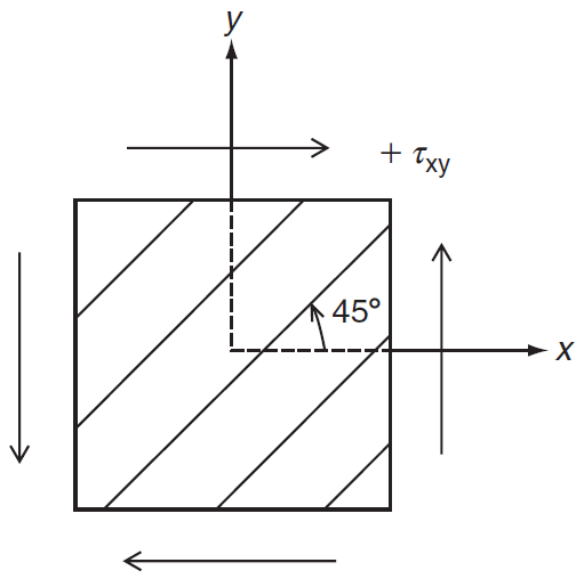
اهمیت علامت تنش برشی

○ برای مواد همسانگرد علامت تنش برشی اهمیت ندارد.

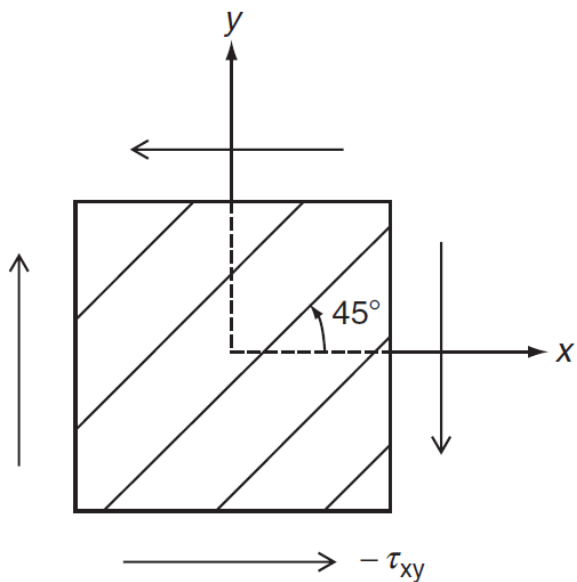
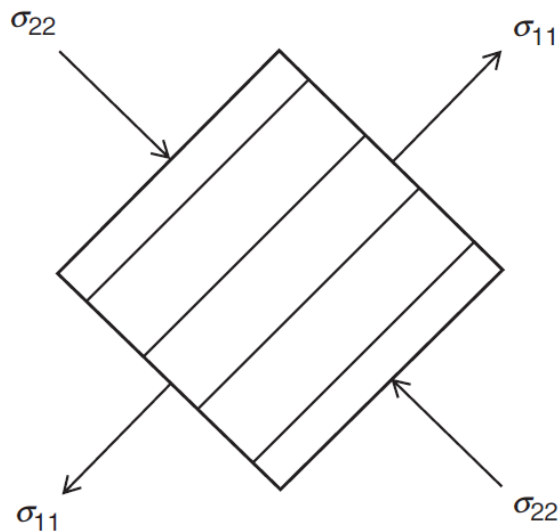
○ برای مواد ناهمسانگرد، همسانگرد عرضی و ارتوتروپیک علامت تنش برشی مهم است.

○ در شکل a، علامت تنش برشی مثبت است. در این حالت تنش اصلی (کششی) بیشینه موازی با جهت الیاف است.

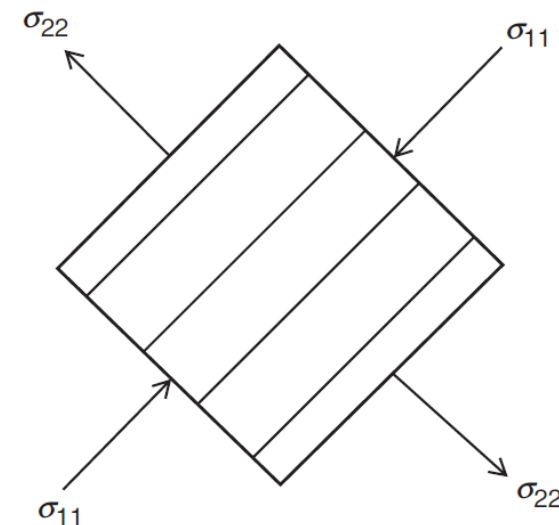
○ در شکل b، علامت تنش برشی منفی است. در این حالت تنش اصلی (کششی) بیشینه عمود بر جهت الیاف است.



(a)



(b)



خواص الاستیک تک لایه

○ خواص الاستیک تک لایه تک جهته با زاویه الیاف صفر:

○ مدول الاستیک طولی: $E_{11} = E_f V_f + E_m V_m$

○ ضریب پواسان اصلی (عمده): $\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m$,

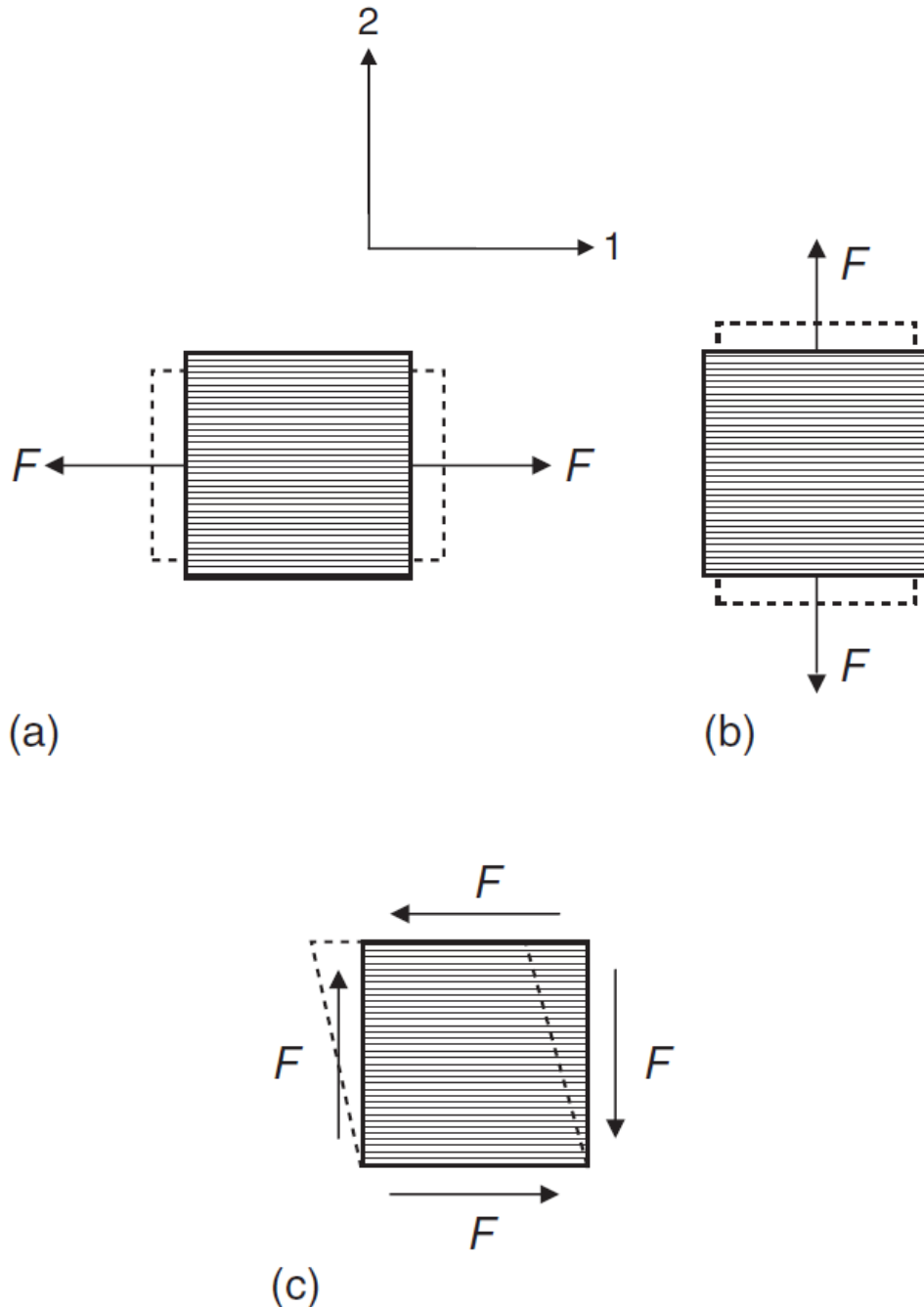
$$\nu_{12} = - \frac{\text{Strain in the 2-direction}}{\text{Strain in the 1-direction (i.e., the stress direction)}}$$

$$E_{22} = \frac{E_f E_m}{E_f V_m + E_m V_f}$$

○ مدول الاستیک عرضی:

○ ضریب پواسان جزئی:

$$\nu_{21} = \frac{E_{22}}{E_{11}} \nu_{12},$$



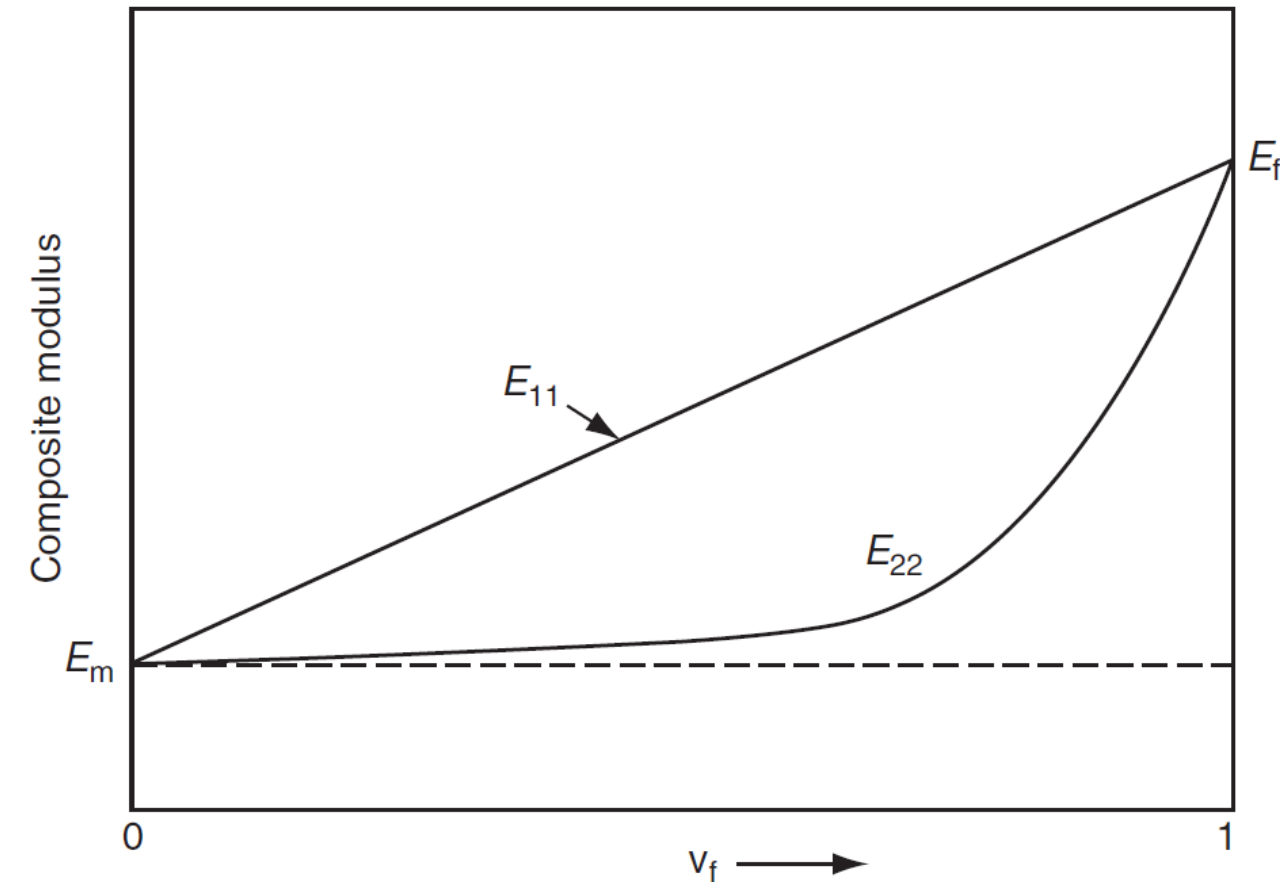
خواص الاستیک تک لایه

○ خواص الاستیک لایه تک جهته با زاویه الیاف صفر:

○ مدول برشی:

$$G_{12} = G_{21} = \frac{G_f G_m}{G_f v_m + G_m v_f}.$$

○ تغییرات مدول الاستیک طولی و عرضی تک لایه با الیف تک جهته صفر درجه نسبت به کسر حجمی الیف در شکل روبرو نشان داده شده است.



خواص الاستیک تک لایه

○ خواص الاستیک لایه تک جهته با زاویه الیاف صفر:

فرض ایزوتروپیک بودن برای اغلب ماتریسها درست است. ولی اغلب الیاف ناهمسانگرد هستند. مدول طولی آنها E_{fL} بزرگتر از مدول جانبی E_{fT} است.

○ لذا فرمولها بصورت زیر تصحیح میشوند :

$$E_{11} = E_{fL}V_f + E_mV_m,$$

$$E_{22} = \frac{E_{fT}E_m}{E_{fT}V_m + E_mV_f}.$$

مثال

○ یک صفحه کامپوزیتی مربعی شامل الیاف تک جهته کربن با زاویه صفر درجه و ماتریس اپوکسی که در معرض بار کششی تک محوره ۱۰۰۰ نیوتن است را در نظر بگیرید. ضخامت صفحه ۱ میلیمتر بوده و طول L_0 و عرض W_0 آن ۱۰۰ میلیمتر است. مطلوبست تغییر در طول و عرض صفحه کامپوزیتی در دو حالت (۱) بار موازی با الیاف اعمال شود، (۲) بار عمود بر جهت الیاف اعمال شود. خواص کامپوزیت عبارتست از:

$$E_{11} = 138 \text{ GPa}, E_{22} = 10 \text{ GPa}, \text{ and } \nu_{12} = 0.21.$$

جواب:

$$\nu_{21} = \frac{E_{22}}{E_{11}} \nu_{12} = \left(\frac{10 \text{ GPa}}{138 \text{ GPa}} \right) (0.21) = 0.0152.$$

مثال

ادامه:

$$\sigma_{11} = \frac{1000 \text{ N}}{(100 \text{ mm})(1 \text{ mm})} = 10$$



$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_{11}} = \frac{10 \text{ MPa}}{138 \text{ GPa}} = 0.725 \times 10^{-4},$$

$$\sigma_{22} = 0$$


$$\varepsilon_{22} = -\nu_{12}\varepsilon_{11} = -(0.21)(0.725 \times 10^{-4}) = -0.152 \times 10^{-4}.$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad \varepsilon_{22} = \frac{\Delta W}{W_0}$$


$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta L = L_0 \varepsilon_{11} = (100 \text{ mm})(0.725 \times 10^{-4}) = 0.00725 \text{ mm}, \\ \Delta W = W_0 \varepsilon_{22} = (100 \text{ mm})(-0.152 \times 10^{-4}) = -0.00152 \text{ mm}. \end{array} \right.$$

مثال

ادامه:

حالت ۲: بار عمود بر جهت الیاف اعمال شود:

$$\sigma_{22} = \frac{1000 \text{ N}}{(100 \text{ mm})(1 \text{ mm})} = 10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{11} = 0$$



$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E_{22}} = \frac{10 \text{ MPa}}{10 \text{ GPa}} = 10 \times 10^{-4}$$

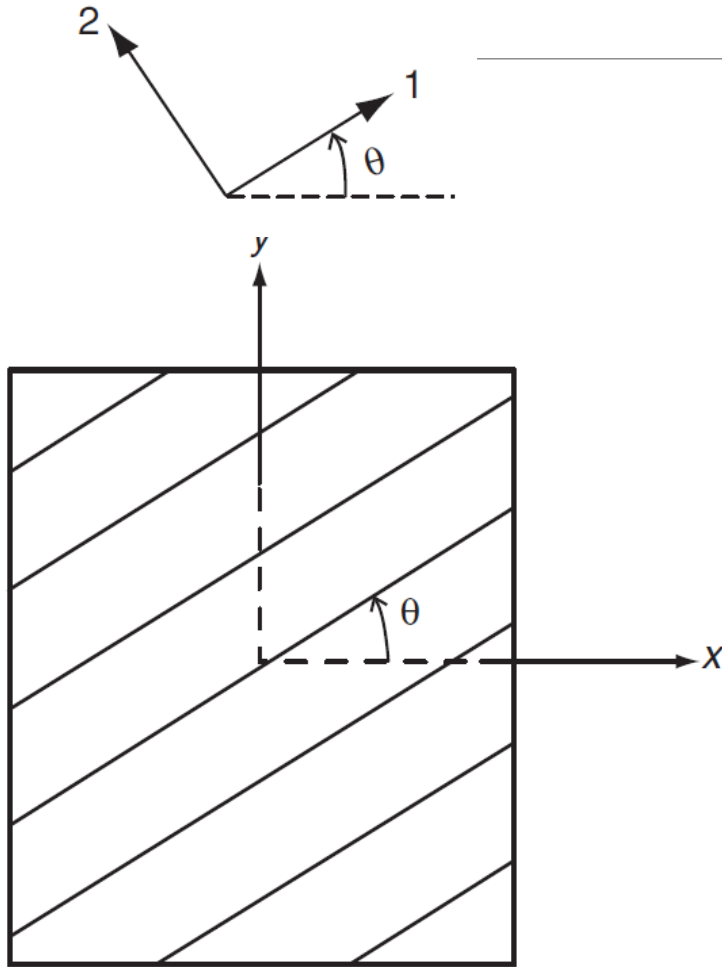

$$\varepsilon_{11} = -\nu_{21} \varepsilon_{22} = -(0.0152) (10 \times 10^{-4}) = -0.152 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad \varepsilon_{22} = \frac{\Delta W}{W_0}$$


$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta L = L_0 \varepsilon_{11} = (100 \text{ mm}) (-0.152 \times 10^{-4}) = -0.00152 \text{ mm} \\ \Delta W = W_0 \varepsilon_{22} = (100 \text{ mm}) (10 \times 10^{-4}) = 0.1 \text{ mm} \end{array} \right.$$

خواص الاستیک تک لایه

○ خواص الاستیک تک لایه تک جهته زاویه دار:



$$\frac{1}{E_{xx}} = \frac{\cos^4 \theta}{E_{11}} + \frac{\sin^4 \theta}{E_{22}} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} \right) \sin^2 2\theta,$$

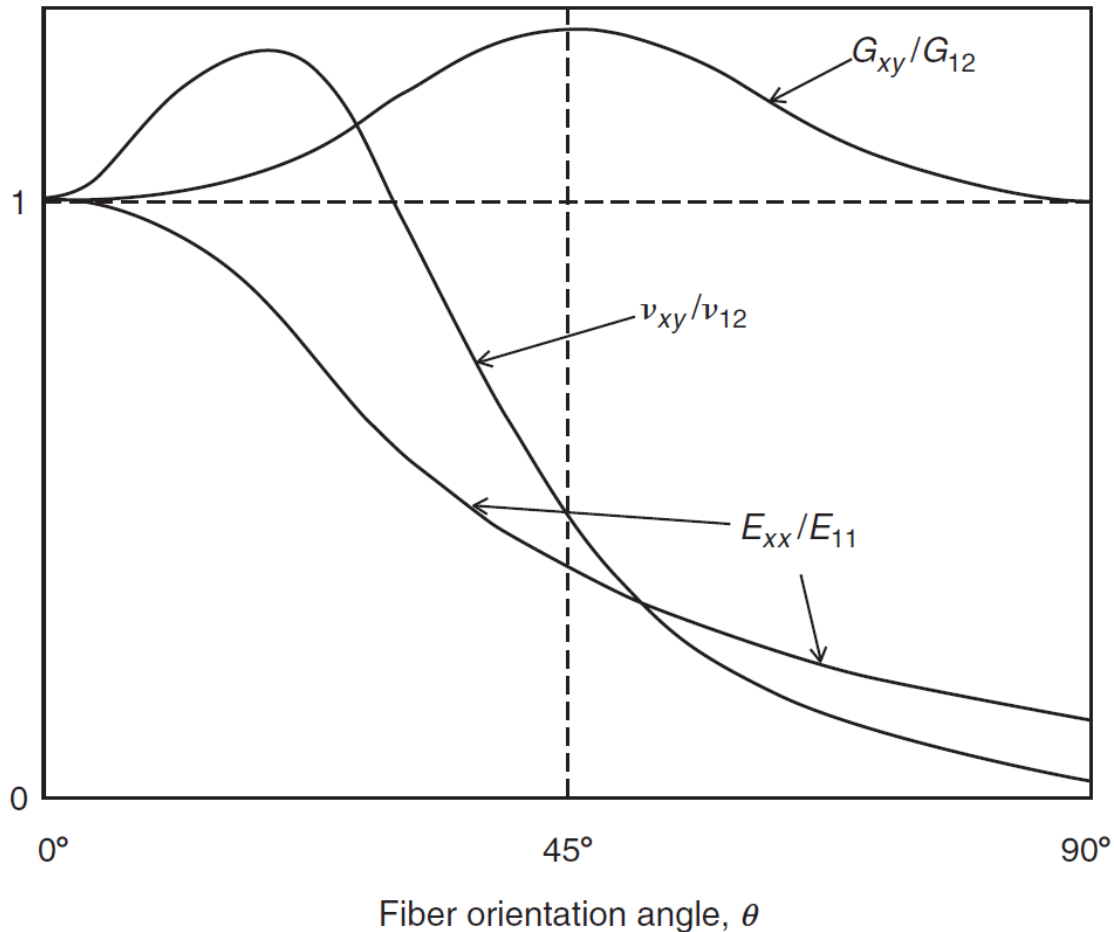
$$\frac{1}{E_{yy}} = \frac{\sin^4 \theta}{E_{11}} + \frac{\cos^4 \theta}{E_{22}} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} \right) \sin^2 2\theta,$$

$$\frac{1}{G_{xy}} = \frac{1}{E_{11}} + \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} + \frac{1}{E_{22}} - \left(\frac{1}{E_{11}} + \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} + \frac{1}{E_{22}} - \frac{1}{G_{12}} \right) \cos^2 2\theta,$$

$$\nu_{xy} = E_{xx} \left[\frac{\nu_{12}}{E_{11}} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{E_{11}} + \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} + \frac{1}{E_{22}} - \frac{1}{G_{12}} \right) \sin^2 2\theta \right],$$

$$\nu_{yx} = \frac{E_{yy}}{E_{xx}} \nu_{xy},$$

خواص الاستیک تک لایه



○ خواص الاستیک تک لایه تک جهته زاویه دار:

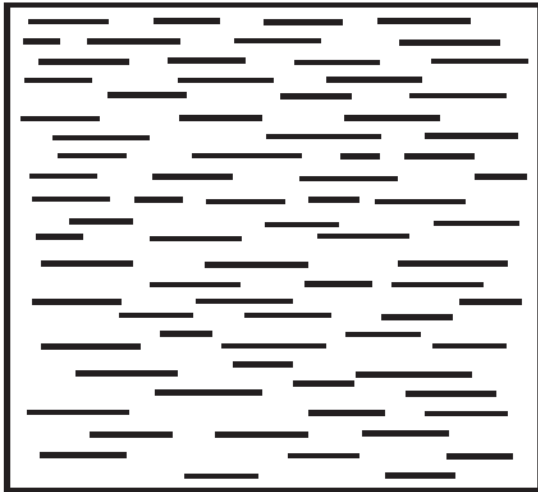
○ در شکل روبرو تغییرات E_{xx} ، ν_{xx} و G_{xx} نسبت به زاویه الیاف نشان داده شده است. در زاویه صفر، مقدار E_{xx} برابر با E_{11} بوده و در زاویه 90° برابر با E_{22} است.

○ برای آنکه همیشه $E_{22} < E_{xx} < E_{11}$ باشد، G_{12} باید در محدوده زیر باشد:

$$\frac{E_{11}}{2(1 + \nu_{12})} > G_{12} > \frac{E_{11}}{2\left(\frac{E_{11}}{E_{22}} + \nu_{12}\right)}.$$

○ بستگی به مقدار مدول برشی G_{12} این امکان وجود دارد که مقدار E_{xx} حتی از E_{11} فراتر رود یا حتی از E_{22} کوچکتر شود.

خواص الاستیک تک لایه



○ تک لایه با الیاف ناپیوسته تک جهته (صفر درجه)

○ خواص الاستیک این تک لایه توسط روابط زیر تعیین می شود (روابط هالپین-تسای):

مدول الاستیک طولی:

$$E_{11} = \frac{1 + 2(l_f/d_f)\eta_L\nu_f}{1 - \eta_L\nu_f} E_m,$$

مدول الاستیک عرضی:

$$E_{22} = \frac{1 + 2\eta_T\nu_f}{1 - \eta_T\nu_f} E_m,$$

مدول برشی:

$$G_{12} = G_{21} = \frac{1 + \eta_G\nu_f}{1 - \eta_G\nu_f} G_m,$$

ضریب پواسان اصلی:

$$\nu_{12} = \nu_f\nu_f + \nu_m\nu_m,$$

ضریب پواسان فرعی:

$$\nu_{21} = \frac{E_{22}}{E_{11}} \nu_{12},$$

$$\eta_L = \frac{(E_f/E_m) - 1}{(E_f/E_m) + 2(l_f/d_f)}$$

$$\eta_T = \frac{(E_f/E_m) - 1}{(E_f/E_m) + 2}$$

$$\eta_G = \frac{(G_f/G_m) - 1}{(G_f/G_m) + 1}$$

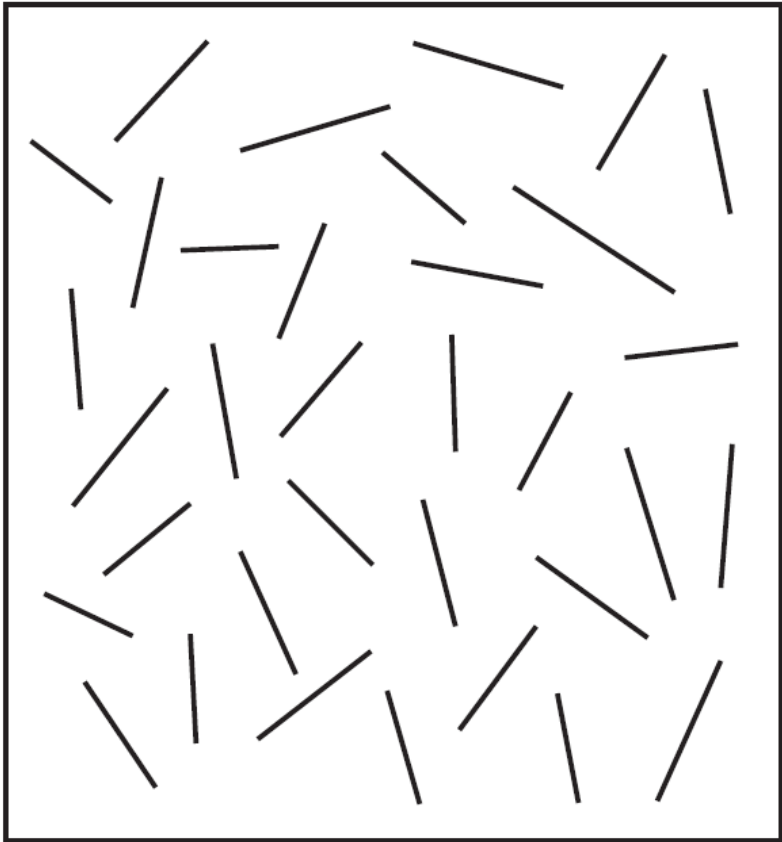
خواص الاستیک تک لایه

○ تک لایه با الیاف ناپیوسته تک جهته (صفر درجه)

○ روابط اسلاید قبل که از روابط Halpin-Tsai استخراج شده با فرضیات زیر می باشد:

1. سطح مقطع الیاف دایره ای باشد.
2. الیاف دارای آرایش مربعی باشند.
3. الیاف ها بطور یکنواخت در زمینه توزیع شده باشند.
4. اتصال کاملی بین الیاف و ماتریس باشد.
5. ماتریس حاوی حباب نباشد.

خواص الاستیک تک لایه



○ تک لایه با الیاف ناپیوسته با توزیع تصادفی

○ خواص الاستیک این تک لایه تقریباً در همه جهات یکسان است.

$$E_{\text{random}} = \frac{3}{8}E_{11} + \frac{5}{8}E_{22},$$

مدول الاستیک :

$$G_{\text{random}} = \frac{1}{8}E_{11} + \frac{1}{4}E_{22},$$

مدول برشی:

$$\nu_{\text{random}} = \frac{E_{\text{random}}}{2G_{\text{random}}} - 1.$$

ضریب پواسن:

○ مقادیر E_{11} و E_{22} از روابط دو اسلاید قبل تعیین می شود.

مثال

○ یک ورق کامپوزیتی شامل ۰/۶۵ وزنی الیاف ناپیوسته شیشه با توزیع تصادفی و ماتریس پلی استر را در نظر بگیرید. خواص الیاف و ماتریس در زیر آمده است. مدول کششی (الاستیک)، مدول برشی و ضریب پواسان این لایه کامپوزیتی را محاسبه کنید.

$$E_f = 68.9 \text{ GPa}$$

$$\rho_f = 2.54 \text{ g/cm}^3$$

$$l_f = 25 \text{ mm}$$

$$d_f = 2.5 \text{ mm.}$$

خواص الاستیک الیاف:

$$E_m = 3.45 \text{ GPa}$$

$$\rho_m = 1.1 \text{ g/cm}^3.$$

خواص الاستیک ماتریس:

جواب

ابتدا با توجه به روابط فصل قبل درصد وزنی به درصد حجمی تبدیل می شود:

$$v_f = \frac{0.65/2.54}{(0.65/2.54) + (1 - 0.65)/1.1} = 0.446 \text{ or } 44.6\%.$$

مقادیر E11 و E22 برای تک لایه با الیاف ناپیوسته تک جهته بصورت زیر محاسبه می شود:

$$\frac{E_f}{E_m} = \frac{68.9}{3.45} = 19.97,$$

$$\frac{l_f}{d_f} = \frac{25}{2.5} = 10.$$

$$\longrightarrow \eta_L = \frac{19.97 - 1}{19.97 + (2)(10)} = 0.475. \longrightarrow$$

$$\eta_T = \frac{19.97 - 1}{19.97 + 2} = 0.863. \longrightarrow$$

$$E_{11} = \frac{1 + (2)(10)(0.475)(0.446)}{1 - (0.475)(0.446)} \\ = 22.93 \text{ GPa.}$$

$$E_{22} = \frac{1 + (2)(0.863)(0.446)}{1 - (0.863)(0.446)} \\ = 9.93 \text{ GPa.}$$

ادامه جواب

مقادیر مدول کششی، مدول برشی و ضریب پواسان برای تک لایه با الیاف ناپیوسته تصادفی بصورت زیر تعیین می شود:

$$E = E_{\text{random}} = \frac{3}{8}E_{11} + \frac{5}{8}E_{22} = 14.81 \text{ GPa},$$

$$G = G_{\text{random}} = \frac{1}{8}E_{11} + \frac{1}{4}E_{22} = 5.35 \text{ GPa},$$

$$\nu = \nu_{\text{random}} = \frac{E}{2G} - 1 = 0.385.$$

ضریب انبساط حرارتی خطی

○ ضریب انبساط خطی لایه تک جهته با زاویه الیاف صفر:

$$\alpha_{11} = \frac{\alpha_{fl} E_f V_f + \alpha_m E_m V_m}{E_f V_f + E_m V_m} \quad \text{ضریب انبساط خطی در راستای طولی:}$$

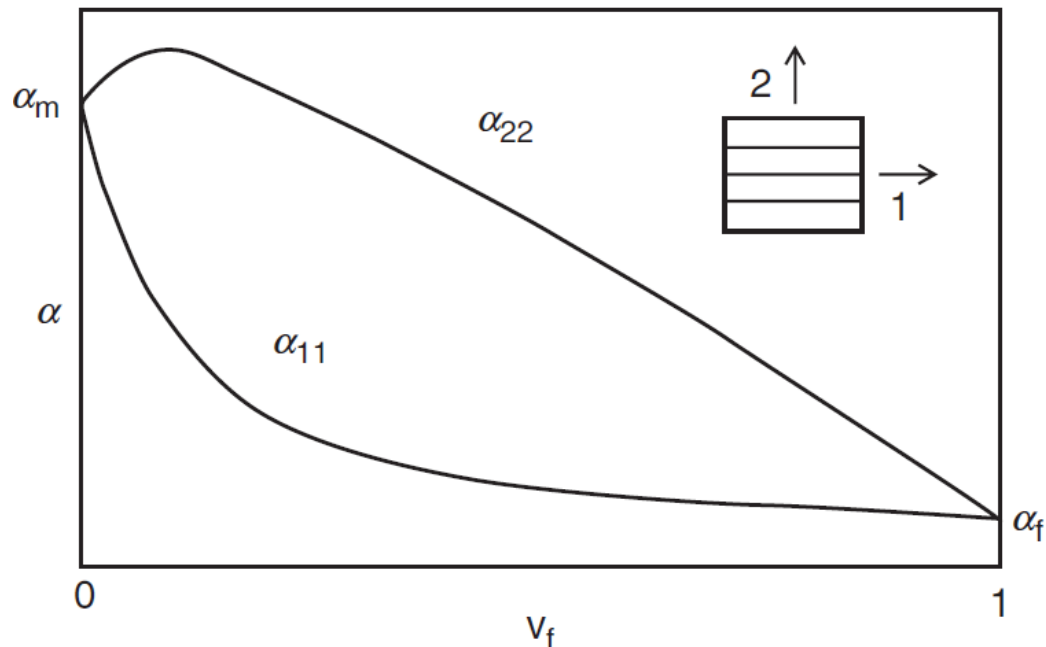
$$\alpha_{22} = (1 + \nu_f) \frac{(\alpha_{fl} + \alpha_{fr})}{2} V_f + (1 + \nu_m) \alpha_m V_m - \alpha_{11} \nu_{12}, \quad \text{ضریب انبساط خطی در راستای عرضی:}$$

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m$$

α_{fl} ضریب انبساط خطی الیاف در جهت طولی:

α_{fr} ضریب انبساط خطی الیاف در جهت شعاعی:

α_m ضریب انبساط خطی ماتریس:



ضریب انبساط حرارتی خطی

○ ضریب انبساط خطی لایه تک جهته با الیاف زاویه دار:

$$\alpha_{xx} = \alpha_{11} \cos^2 \theta + \alpha_{22} \sin^2 \theta,$$

$$\alpha_{yy} = \alpha_{11} \sin^2 \theta + \alpha_{22} \cos^2 \theta,$$

$$\alpha_{xy} = (2 \sin \theta \cos \theta) (\alpha_{11} - \alpha_{22}),$$

α_{xx} : ضریب انبساط خطی در جهت X

α_{yy} : ضریب انبساط خطی در جهت Y

α_{xy} : ضریب انبساط برشی

نکته: وقتی الیاف دارای زاویه ای به غیر از ۰ یا ۹۰ درجه باشد، تغییر در دما به دلیل وجود α_{xy} باعث ایجاد تنش برشی می شود.

روابط تنش- کرنش برای تک لایه نازک

○ تک لایه همسانگرد (آیزوتروپیک):

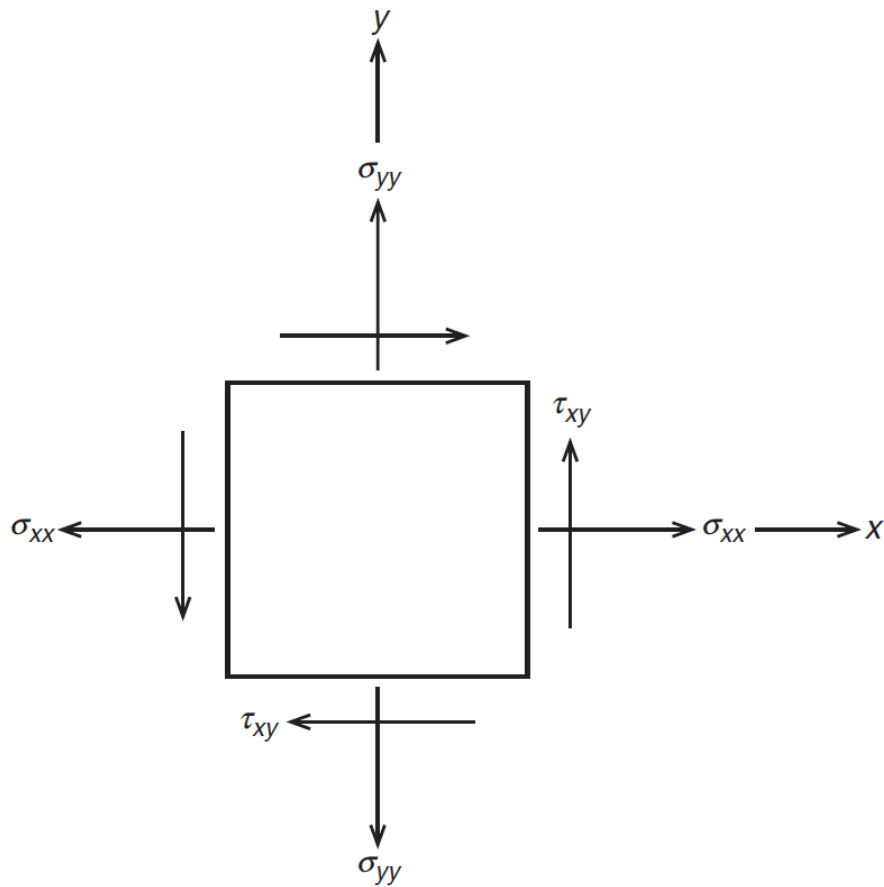
○ برای تک لایه همسانگرد در حالت تنش صفحه ای $\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ (شکل روبرو) روابط زیر بین تنش و کرنش حاکم است:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}),$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{xx} + \sigma_{yy}),$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy},$$

○ نکته: هیچ کوپلی بین تنش برشی و تنش های نرمال وجود ندارد.



روابط تنش-کرنش برای تک لایه نازک

○ تک لایه ارتوتروپیک:

○ برای تک لایه ارتوتروپیک در حالت تنش صفحه ای $\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ (شکل روبرو) روابط زیر بین تنش و کرنش حاکم است:

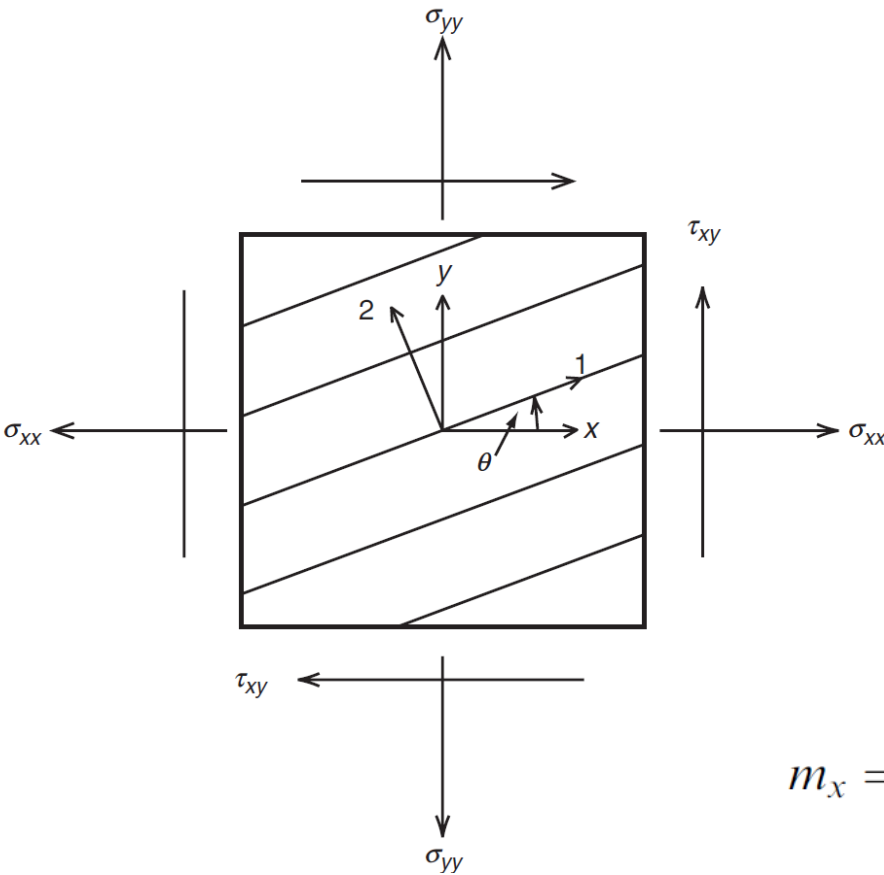
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E_{xx}} - \nu_{yx} \frac{\sigma_{yy}}{E_{yy}} - m_x \tau_{xy},$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu_{xy} \frac{\sigma_{xx}}{E_{xx}} + \frac{\sigma_{yy}}{E_{yy}} - m_y \tau_{xy},$$

$$\gamma_{xy} = -m_x \sigma_{xx} - m_y \sigma_{yy} + \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}},$$

$$m_x = (\sin 2\theta) \left[\frac{\nu_{12}}{E_{11}} + \frac{1}{E_{22}} - \frac{1}{2G_{12}} - (\cos^2 \theta) \left(\frac{1}{E_{11}} + \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} + \frac{1}{E_{22}} - \frac{1}{G_{12}} \right) \right],$$

$$m_y = (\sin 2\theta) \left[\frac{\nu_{12}}{E_{11}} + \frac{1}{E_{22}} - \frac{1}{2G_{12}} - (\sin^2 \theta) \left(\frac{1}{E_{11}} + \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} + \frac{1}{E_{22}} - \frac{1}{G_{12}} \right) \right].$$

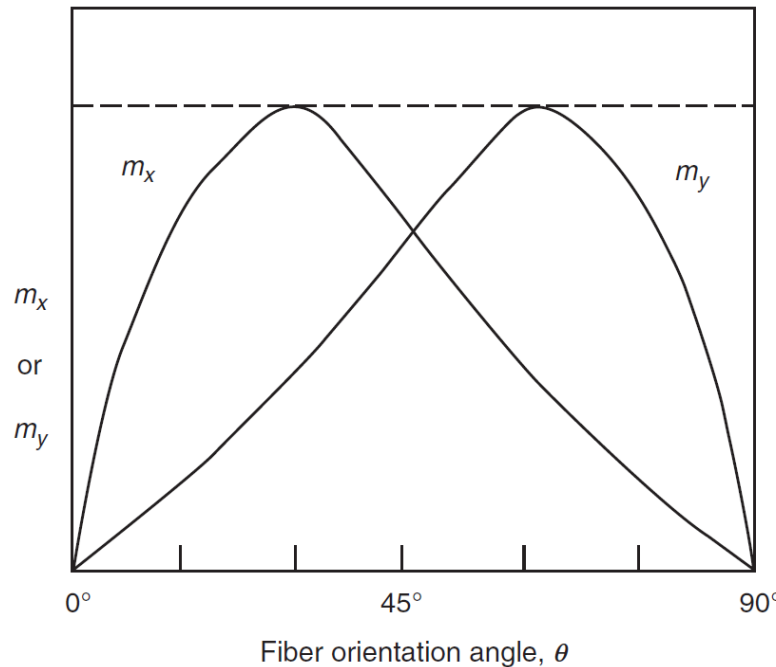
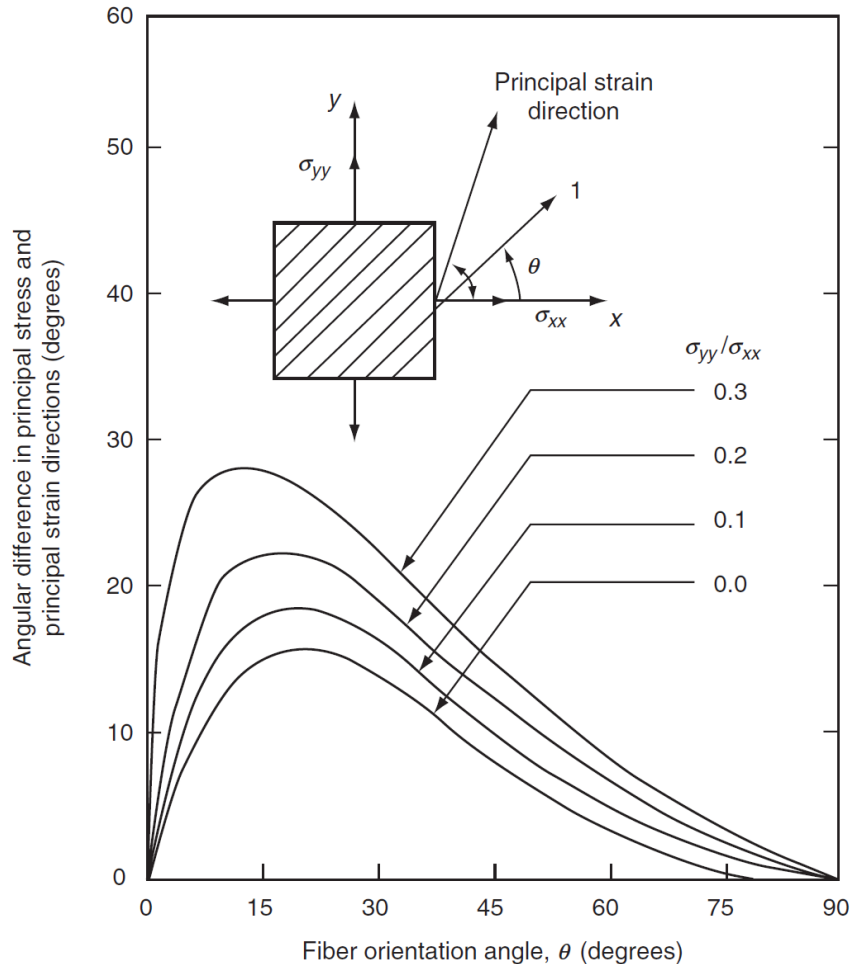


روابط تنش-کرنش برای تک لایه نازک

○ تک لایه ارتوتروپیک:

○ ثوابت الاستیک m_x و m_y بیانگر اثر تنش های برشی روی کرنش های کششی و اثر تنش های نرمال روی کرنش های برشی هستند. به این ثوابت **ضرایب اثر متقابل** گویند.

○ نکته بحرانی این است که برخلاف مواد همسانگرد، جهات تنش های اصلی و کرنشهای اصلی در تک لایه ارتوتروپیک همراستا نیستند.



روابط تنش-کرنش برای تک لایه نازک

○ تک لایه ارتوتروپیک ویژه:

در زاویه ۰ و ۹۰ درجه، ثوابت $m_x=m_y=0$ و اثر کوپل از بین می‌رود. به این ماده **ارتوتروپیک ویژه** گویند. در لایه ارتوتروپیک ویژه روابط تنش-کرنش بصورت زیر است:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{xx}}{E_{11}} - \nu_{21} \frac{\sigma_{yy}}{E_{22}},$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{22} = -\nu_{12} \frac{\sigma_{xx}}{E_{11}} + \frac{\sigma_{yy}}{E_{22}},$$

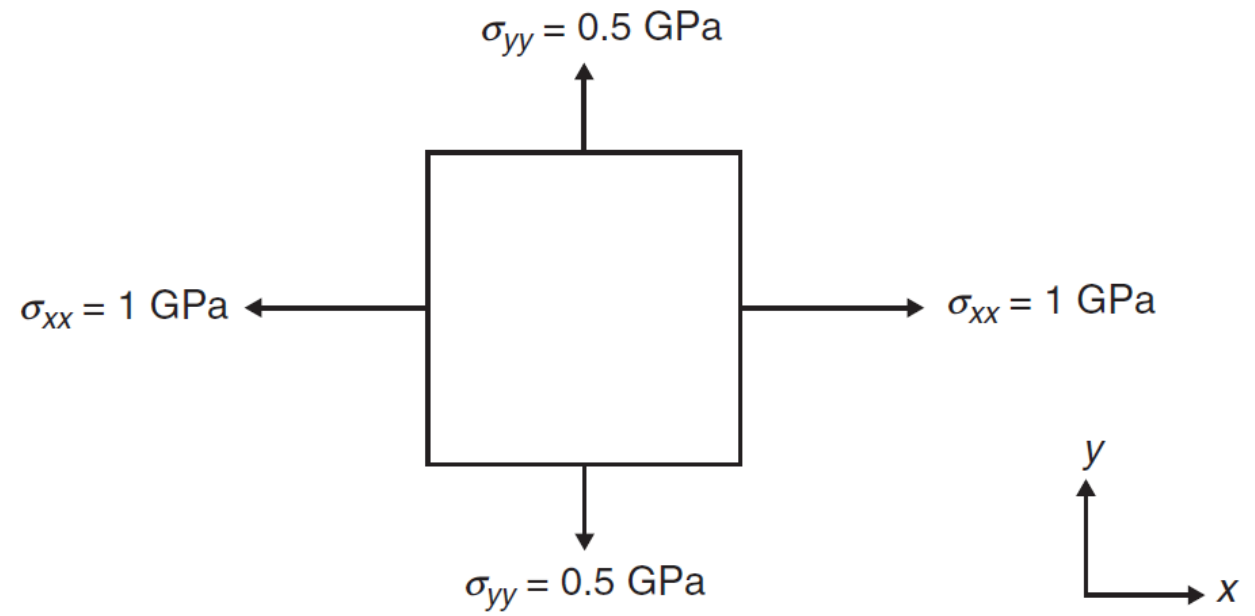
$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{\tau_{xy}}{G_{12}}.$$

مثال

○ یک صفحه نازک در معرض تنش های دو محوره $\sigma_{xx} = 1 \text{ GPa}$ و $\sigma_{yy} = 0.5 \text{ GPa}$ قرار می گیرد. کرنش ها در جهات xy را برای الف) قطعه فولادی، ب) تک لایه تک جهته اپوکسی-الیاف برون با زاویه صفر درجه و ج) تک لایه تک جهته اپوکسی-الیاف برون با زاویه ۴۵ درجه را محاسبه کنید.

برای فولاد: $E = 207 \text{ GPa}$ and $\nu = 0.33$

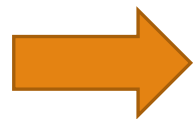
$E_{11} = 207 \text{ GPa}$	} برای تک لایه تک جهته اپوکسی-الیاف برون با زاویه صفر :
$E_{22} = 19 \text{ GPa}$	
$\nu_{12} = 0.21$	
$G_{12} = 6.4 \text{ GPa}$	



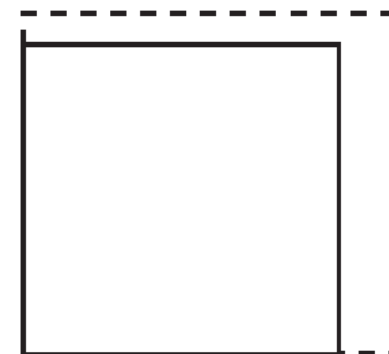
جواب

○ الف) برای قطعه فولادی:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(-\nu\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy},\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{207}[1 - (0.33)(0.5)] = 4.034 \times 10^{-3}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{207}[-(0.33)(1) + 0.5] = 0.821 \times 10^{-3}, \\ \gamma_{xy} &= 0.\end{aligned}$$



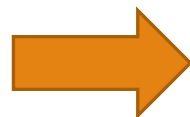
○ ب) تک لایه تک جهته اپوکسی-الیاف برون با زاویه صفر درجه: این یک تک لایه ارتوروپیک ویژه است.

$$\nu_{21} = (0.21)\frac{19}{207} = 0.0193.$$

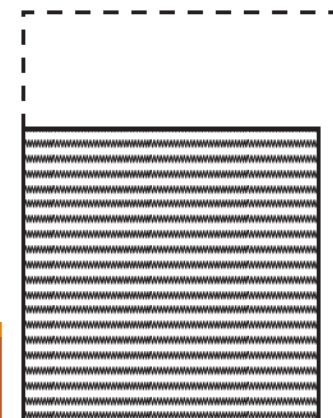
$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{xx}}{E_{11}} - \nu_{21}\frac{\sigma_{yy}}{E_{22}},$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{22} = -\nu_{12}\frac{\sigma_{xx}}{E_{11}} + \frac{\sigma_{yy}}{E_{22}},$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{\tau_{xy}}{G_{12}}.$$



$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{207} - (0.0193)\frac{0.5}{19} = 4.323 \times 10^{-3}, \\ \varepsilon_{yy} &= -(0.21)\frac{1}{207} + \frac{0.5}{19} = 25.302 \times 10^{-3}, \\ \gamma_{xy} &= 0.\end{aligned}$$



جواب

○ ج) تک لایه تک جهته اپوکسی-الیاف برون با زاویه ۴۵ درجه:

$$\frac{1}{E_{xx}} = \frac{\cos^4 \theta}{E_{11}} + \frac{\sin^4 \theta}{E_{22}} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} \right) \sin^2 2\theta,$$

$$\frac{1}{E_{yy}} = \frac{\sin^4 \theta}{E_{11}} + \frac{\cos^4 \theta}{E_{22}} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} \right) \sin^2 2\theta,$$

$$\longrightarrow E_{xx} = E_{yy} = 18.896 \text{ GPa},$$

$$\nu_{yx} = \frac{E_{yy}}{E_{xx}} \nu_{xy}, \longrightarrow \nu_{xy} = \nu_{yx} = 0.476.$$

$$m_x = (\sin 2\theta) \left[\frac{\nu_{12}}{E_{11}} + \frac{1}{E_{22}} - \frac{1}{2G_{12}} - (\cos^2 \theta) \left(\frac{1}{E_{11}} + \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} + \frac{1}{E_{22}} - \frac{1}{G_{12}} \right) \right],$$

$$m_y = (\sin 2\theta) \left[\frac{\nu_{12}}{E_{11}} + \frac{1}{E_{22}} - \frac{1}{2G_{12}} - (\sin^2 \theta) \left(\frac{1}{E_{11}} + \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} + \frac{1}{E_{22}} - \frac{1}{G_{12}} \right) \right].$$

$$\longrightarrow m_x = m_y = 0.0239 \text{ GPa}^{-1}.$$

جواب

○ ج) تک لایه تک جهته اپوکسی-الیاف برون با زاویه ۴۵ درجه:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E_{xx}} - \nu_{yx} \frac{\sigma_{yy}}{E_{yy}} - m_x \tau_{xy},$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu_{xy} \frac{\sigma_{xx}}{E_{xx}} + \frac{\sigma_{yy}}{E_{yy}} - m_y \tau_{xy},$$

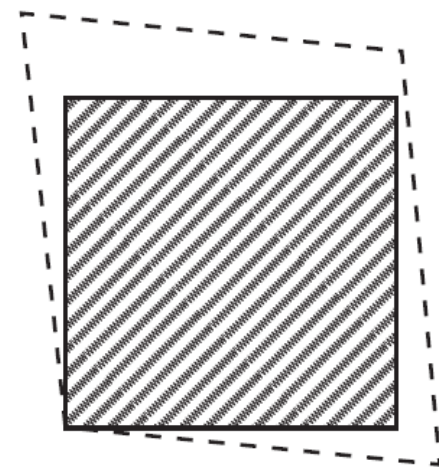
$$\gamma_{xy} = -m_x \sigma_{xx} - m_y \sigma_{yy} + \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}},$$



$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{18.896} - (0.476) \frac{0.5}{18.896} = 40.326 \times 10^{-3},$$

$$\varepsilon_{yy} = -(0.476) \frac{1}{18.896} + \frac{0.5}{18.896} = 1.270 \times 10^{-3},$$

$$\gamma_{xy} = -(0.0239) (1 + 0.5) = -35.85 \times 10^{-3}.$$



ماتریس سفتی و کامپلینس Stiffness & Compliance

○ تک لایه همسانگرد :

○ برای تک لایه همسانگرد ماتریس کامپلینس S بصورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix},$$

○ برای تک لایه همسانگرد ماتریس کامپلینس Q بصورت زیر تعریف می شود:

$$[Q] = [S]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}.$$

ماتریس سفتی و کامپلینس Stiffness & Compliance

○ تک لایه ارتوتروپیک ویژه :

○ برای تک لایه ارتوتروپیک ویژه ماتریس کامپلینس S بصورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21}(=S_{12}) & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_{11}} & S_{22} &= \frac{1}{E_{22}} \\ S_{12} = S_{21} &= -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned}$$

○ برای تک لایه ارتوتروپیک ویژه ماتریس سفتی Q بصورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21}(=Q_{12}) & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{12} = Q_{21} &= \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{66} &= G_{12}. \end{aligned}$$

ماتریس سفتی و کامپلینس Stiffness & Compliance

○ تک لایه ارتوتروپیک :

○ برای تک لایه ارتوتروپیک ماتریس کامپلینس S بصورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [\bar{S}] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix},$$

$$\bar{S}_{11} = \frac{1}{E_{xx}} = S_{11} \cos^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \sin^4 \theta,$$

$$\bar{S}_{12} = -\frac{\nu_{xy}}{E_{xx}} = S_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

$$\bar{S}_{22} = \frac{1}{E_{yy}} = S_{11} \sin^4 \theta + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{22} \cos^4 \theta,$$

$$\bar{S}_{16} = -m_x = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta,$$

$$\bar{S}_{26} = -m_y = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta,$$

$$\bar{S}_{66} = \frac{1}{G_{xy}} = 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + S_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta).$$

ماتریس سفتی و کامپلینس Stiffness & Compliance

○ تک لایه ارتوتروپیک :

○ برای تک لایه ارتوتروپیک ماتریس سفتی Q بصورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix},$$

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta,$$

$$\bar{Q}_{12} = Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta,$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta,$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta,$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta).$$

ماتریس سفتی و کامپلینس Stiffness & Compliance

○ تک لایه ارتوتروپیک :

نکاتی در مورد روابط قبل:

1. المانهای S_{16}, S_{26} در ماتریس کامپلینس و Q_{16}, Q_{26} در ماتریس سفتی بیانگر کوپلینگ برش و کشیدگی است.
2. در بررسی ماتریس کامپلینس و سفتی مشاهده میشود که 6 ثابت الاستیک در روابط تنش-کرنش وجود دارد:
 $Q_{11}, Q_{22}, Q_{12}, Q_{66}, Q_{16}, Q_{26}$ که دو ثابت Q_{16}, Q_{26} ترکیب خطی ثوابت دیگر بوده و مستقل نیستند.
3. لذا در کل 4 ثابت الاستیک مستقل وجود دارد.

ماتریس سفتی و کامپلینس Stiffness & Compliance

○ ثوابت مستقل از زاویه Angle-invariant:

○ اجزای المان ماتریس S, Q را میتوان بر حسب ۵ ثابت مستقل از زاویه چیدمان الیاف بیان کرد.

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta, & U_1 &= \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}), & \bar{Q}_{11}(-\theta) &= \bar{Q}_{11}(\theta), \\ \bar{Q}_{12} &= \bar{Q}_{21} = U_4 - U_3 \cos 4\theta, & U_2 &= \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22}), & \bar{Q}_{12}(-\theta) &= \bar{Q}_{12}(\theta), \\ \bar{Q}_{22} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta, & U_3 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}), & \bar{Q}_{22}(-\theta) &= \bar{Q}_{22}(\theta), \\ \bar{Q}_{16} &= \frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta, & U_4 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}), & \bar{Q}_{66}(-\theta) &= \bar{Q}_{66}(\theta), \\ \bar{Q}_{26} &= \frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta, & U_5 &= \frac{1}{2}(U_1 - U_4), & \bar{Q}_{16}(-\theta) &= -\bar{Q}_{16}(\theta), \\ \bar{Q}_{66} &= U_5 - U_3 \cos 4\theta, & & & \bar{Q}_{26}(-\theta) &= -\bar{Q}_{26}(\theta).\end{aligned}$$

ماتریس سفتی و کامپلینس Stiffness & Compliance

○ ثوابت مستقل از زاویه Angle-invariant:

$$\bar{S}_{11} = V_1 + V_2 \cos 2\theta + V_3 \cos 4\theta,$$

$$\bar{S}_{12} = \bar{S}_{21} = V_4 - V_3 \cos 4\theta,$$

$$\bar{S}_{22} = V_1 - V_2 \cos 2\theta + V_3 \cos 4\theta,$$

$$\bar{S}_{16} = V_2 \sin 2\theta + 2V_3 \sin 4\theta,$$

$$\bar{S}_{26} = V_2 \sin 2\theta - 2V_3 \sin 4\theta,$$

$$\bar{S}_{66} = V_5 - 4V_3 \cos 4\theta,$$

$$V_1 = \frac{1}{8}(3S_{11} + 3S_{22} + 2S_{12} + S_{66}),$$

$$V_2 = \frac{1}{2}(S_{11} - S_{22}),$$

$$V_3 = \frac{1}{8}(S_{11} + S_{22} - 2S_{12} - S_{66}),$$

$$V_4 = \frac{1}{8}(S_{11} + S_{22} + 6S_{12} - S_{66}),$$

$$V_5 = 2(V_1 - V_4).$$

مثال

○ المانهای ماتریس سفتی را برای کامپوزیت اپوکسی-۶۰٪ حجمی الیاف کربن با زاویه +۴۵ و -۴۵ درجه را تعیین کنید.

$$E_f = 220 \text{ GPa} \quad \nu_f = 0.2, \quad E_m = 3.6 \text{ GPa} \quad \nu_m = 0.35$$

○ جواب:

گام ۱:

$$\left. \begin{aligned} E_{11} &= E_f \nu_f + E_m \nu_m \\ \nu_{12} &= \nu_f \nu_f + \nu_m \nu_m, \\ E_{22} &= \frac{E_f E_m}{E_f \nu_m + E_m \nu_f} \\ \nu_{21} &= \frac{E_{22}}{E_{11}} \nu_{12}, \end{aligned} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{aligned} E_{11} &= (220)(0.6) + (3.6)(1 - 0.6) = 133.44 \text{ GPa}, \\ E_{22} &= \frac{(220)(3.6)}{(220)(1 - 0.6) + (3.6)(0.6)} = 8.78 \text{ GPa}, \\ \nu_{12} &= (0.2)(0.6) + (0.35)(1 - 0.6) = 0.26, \\ \nu_{21} &= \frac{8.78}{133.44} (0.26) = 0.017. \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} G_{12} &= G_{21} = \frac{G_f G_m}{G_f \nu_m + G_m \nu_f} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{aligned} G_f &= \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)} = \frac{220}{2(1 + 0.2)} = 91.7 \text{ GPa}, \\ G_m &= \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)} = \frac{3.6}{2(1 + 0.35)} = 1.33 \text{ GPa}. \end{aligned} \right. \longrightarrow G_{12} = \frac{(91.7)(1.33)}{(91.7)(1 - 0.6) + (1.33)(0.6)} = 3.254 \text{ GPa}.$$

ادامه جواب

○ گام ۲:

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},$$

$$Q_{66} = G_{12}.$$

$$Q_{11} = \frac{133.44}{1 - (0.26)(0.017)} = 134.03 \text{ GPa},$$

$$Q_{22} = \frac{8.78}{1 - (0.26)(0.017)} = 8.82 \text{ GPa},$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{(0.26)(8.78)}{1 - (0.26)(0.017)} = 2.29 \text{ GPa},$$

$$Q_{66} = 3.254 \text{ GPa}.$$

○ گام ۳:

$$U_1 = \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}),$$

$$U_2 = \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22}),$$

$$U_3 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}),$$

$$U_4 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}),$$

$$U_5 = \frac{1}{2}(U_1 - U_4).$$

$$U_1 = \frac{1}{8}[(3)(134.03) + (3)(8.82) + (2)(2.29) + (4)(3.254)] = 55.77 \text{ GPa},$$

$$U_2 = \frac{1}{2}(134.03 - 8.82) = 62.6 \text{ GPa},$$

$$U_3 = \frac{1}{8}[134.03 + 8.82 - (2)(2.29) - (4)(3.254)] = 15.66 \text{ GPa},$$

$$U_4 = \frac{1}{8}[134.03 + 8.82 + (6)(2.29) - (4)(3.259)] = 17.95 \text{ GPa},$$

$$U_5 = \frac{1}{2}(55.77 - 17.95) = 18.91 \text{ GPa}.$$

ادامه جواب

گام ۴: $\bar{Q}_{11} = U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta,$
 $\bar{Q}_{12} = \bar{Q}_{21} = U_4 - U_3 \cos 4\theta,$
 $\bar{Q}_{22} = U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta,$
 $\bar{Q}_{16} = \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta,$
 $\bar{Q}_{26} = \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta,$
 $\bar{Q}_{66} = U_5 - U_3 \cos 4\theta,$

→

$\bar{Q}_{11} = 55.77 + (62.6) \cos 90^\circ + (15.66) \cos 180^\circ = 40.11 \text{ GPa},$
 $\bar{Q}_{22} = 55.77 - (62.6) \cos 90^\circ + (15.66) \cos 180^\circ = 40.11 \text{ GPa},$
 $\bar{Q}_{12} = 17.95 - (15.66) \cos 180^\circ = 33.61 \text{ GPa},$
 $\bar{Q}_{66} = 18.91 - (15.66) \cos 180^\circ = 34.57 \text{ GPa},$
 $\bar{Q}_{16} = \frac{1}{2} (62.6) \sin 90^\circ + (15.66) \sin 180^\circ = 31.3 \text{ GPa},$
 $\bar{Q}_{26} = \frac{1}{2} (62.6) \sin 90^\circ - (15.66) \sin 180^\circ = 31.3 \text{ GPa}.$

برای حالتی که زاویه ۴۵- درجه است:

$\bar{Q}_{11}(-\theta) = \bar{Q}_{11}(\theta),$
 $\bar{Q}_{12}(-\theta) = \bar{Q}_{12}(\theta),$
 $\bar{Q}_{22}(-\theta) = \bar{Q}_{22}(\theta),$
 $\bar{Q}_{66}(-\theta) = \bar{Q}_{66}(\theta),$
 $\bar{Q}_{16}(-\theta) = -\bar{Q}_{16}(\theta),$
 $\bar{Q}_{26}(-\theta) = -\bar{Q}_{26}(\theta).$

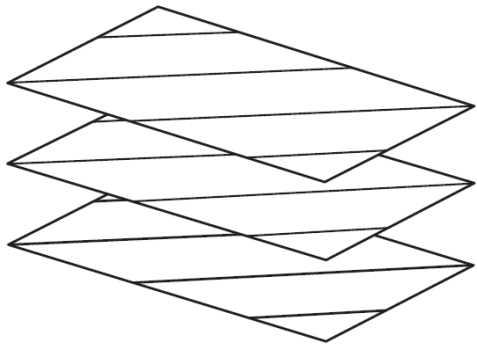
→

$\bar{Q}_{11} = 40.11 \text{ GPa},$
 $\bar{Q}_{22} = 40.11 \text{ GPa},$
 $\bar{Q}_{12} = 33.61 \text{ GPa},$
 $\bar{Q}_{66} = 34.57 \text{ GPa},$
 $\bar{Q}_{16} = -31.3 \text{ GPa},$
 $\bar{Q}_{26} = -31.3 \text{ GPa}.$

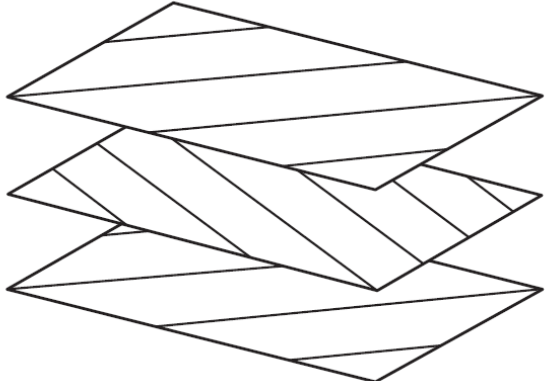
$[\bar{Q}]_{45^\circ} = \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & 31.3 \\ 33.61 & 40.11 & 31.3 \\ 31.3 & 31.3 & 34.57 \end{bmatrix} \text{ GPa},$

$[\bar{Q}]_{-45^\circ} = \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & -31.3 \\ 33.61 & 40.11 & -31.3 \\ -31.3 & -31.3 & 34.57 \end{bmatrix} \text{ GPa}.$

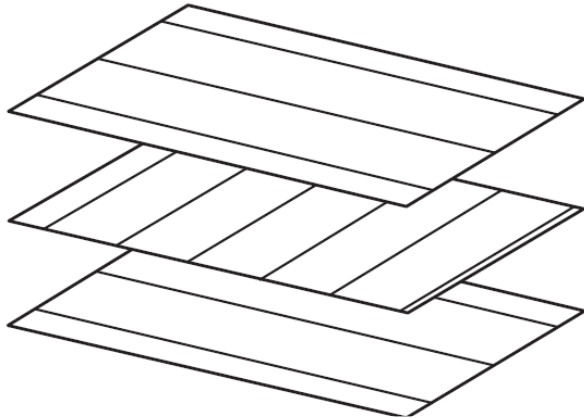
ساختار چندلایه (لمینیتی)



Unidirectional laminate.



Angle-ply laminate.



Cross-ply laminate.

○ از تک لایه تا چند لایه:

○ یک چندلایه از روی هم انباشته شدن چند لایه تشکیل می شود.

○ برخی حالات چندلایه ها به شرح زیر است:

- چند لایه تک جهته unidirectional laminate: همه لایه ها دارای زاویه الیاف یکسان هستند.
- چند لایه زاویه دار Angle-ply laminate: لایه ها دارای زاویه الیاف متفاوت هستند.
- چند لایه متقاطع Cross-ply laminate: لایه ها دارای زاویه الیاف صفر و ۹۰ درجه هستند.

معیارهای واماندگی در مواد مرکب

1. معیار تنش حداکثر

2. معیار کرنش حداکثر

3. تسای هیل Tsai-Hill

4. هافمن Hoffman

5. تسای-وو Tsai- Wu

معیار تنش حداکثر

○ بر اساس این معیار شکست موقعی اتفاق می افتد که هر کدام از تنش های اصلی ماده بیشتر از استحکام ماده باشد یا به عبارت دیگر شرایط عدم واماندگی عبارتست از:

برای تنش ها کششی: فشار:

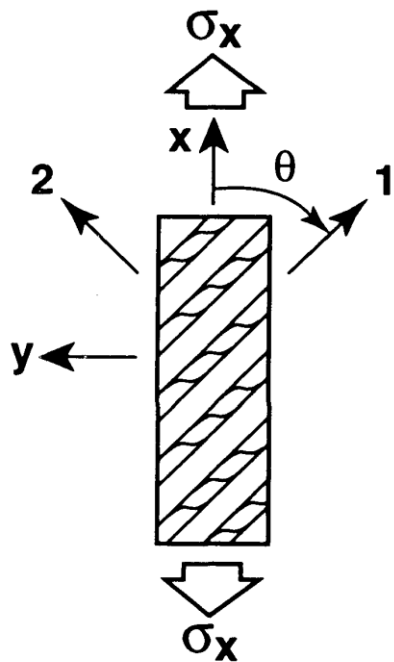
$$\sigma_1 < X_t \quad \sigma_2 < Y_t$$

برای تنش های فشاری:

$$\sigma_1 > X_c \quad \sigma_2 > Y_c$$

برای تنش های برشی:

$$|\tau_{12}| < S$$



$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2 \theta$$

$$\sigma_2 = \sigma_x \sin^2 \theta$$

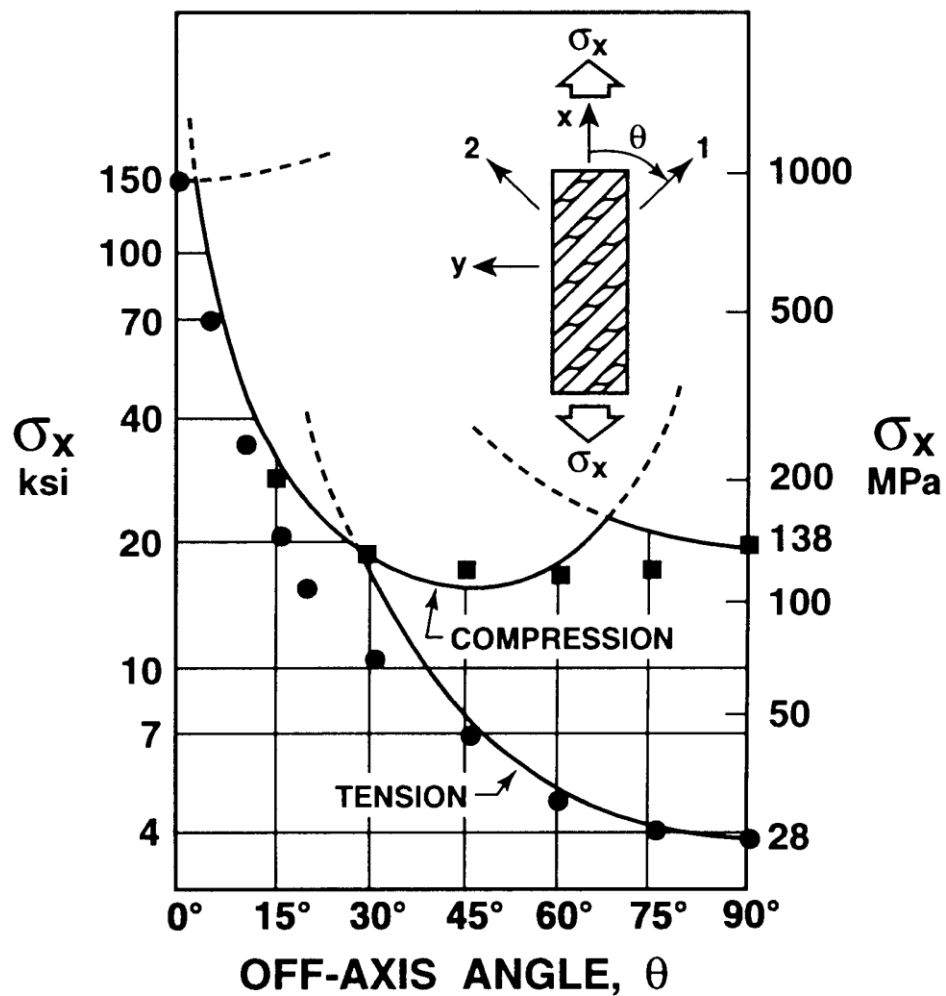
$$\tau_{12} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta$$

معیار تنش حداکثر

○ به عبارت دیگر می توان نوشت:

$$\frac{X_c}{\cos^2 \theta} < \sigma_x < \frac{X_t}{\cos^2 \theta} \quad \frac{Y_c}{\sin^2 \theta} < \sigma_x < \frac{Y_t}{\sin^2 \theta} \quad |\sigma_x| < \left| \frac{S}{\sin \theta \cos \theta} \right|$$

معیار تنش حداکثر



○ با توجه به نمودار روبرو داده های آزمایشگاهی با نتایج تئوری همبستگی مناسب ندارد از اینرو این معیار مناسبی نیست.

○ نقاط داده های آزمایشگاهی هستند و منحنی تئوری است.

معیار کرنش حداکثر

○ بر اساس این معیار شکست موقعی اتفاق می افتد که هر کدام از کرنش های اصلی ماده بیشتر از کرنش مربوط به استحکام ماده باشد یا به عبارت دیگر شرایط عدم واماندگی عبارتست از:

$$\epsilon_1 < X_{\epsilon_1} \quad \epsilon_2 < Y_{\epsilon_1} \quad \text{برای تنش ها کششی:}$$

$$\epsilon_1 > X_{\epsilon_c} \quad \epsilon_2 > Y_{\epsilon_c} \quad \text{برای تنش های فشاری:}$$

$$|\gamma_{12}| < S_{\epsilon} \quad \text{برای تنش های برشی:}$$

$X_{\epsilon_1}(X_{\epsilon_c})$ = maximum tensile (compressive) normal strain in the 1-direction

$Y_{\epsilon_1}(Y_{\epsilon_c})$ = maximum tensile (compressive) normal strain in the 2-direction

S_{ϵ} = maximum shear strain in the 1-2 coordinates

معیار کرنش حداکثر

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} (\sigma_1 - \nu_{12} \sigma_2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_2} (\sigma_2 - \nu_{21} \sigma_1)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}$$

$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2 \theta$$

$$\sigma_2 = \sigma_x \sin^2 \theta$$

$$\tau_{12} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} (\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta) \sigma_x$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_2} (\sin^2 \theta - \nu_{21} \cos^2 \theta) \sigma_x$$

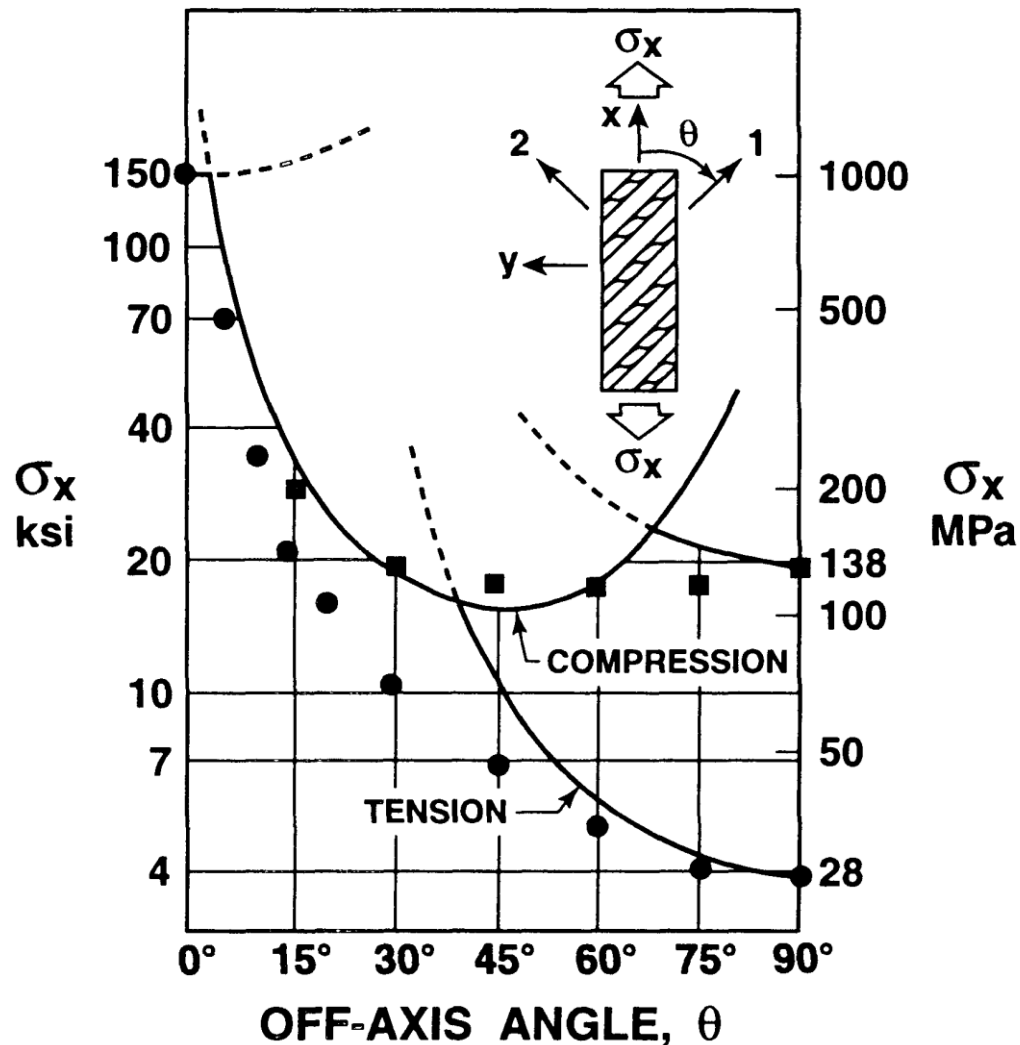
$$\gamma_{12} = -\frac{1}{G_{12}} (\sin \theta \cos \theta) \sigma_x$$

معیار کرنش حداکثر

$$X_{\varepsilon_t} = \frac{X_t}{E_1} \quad Y_{\varepsilon_t} = \frac{Y_t}{E_2} \quad S_{\varepsilon} = \frac{S}{G_{12}} \quad X_{\varepsilon_c} = \frac{X_c}{E_1} \quad Y_{\varepsilon_c} = \frac{Y_c}{E_2}$$

$$\frac{X_c}{\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta} < \sigma_x < \frac{X_t}{\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta}$$
$$\frac{Y_c}{\sin^2 \theta - \nu_{21} \cos^2 \theta} < \sigma_x < \frac{Y_t}{\sin^2 \theta - \nu_{21} \cos^2 \theta}$$
$$|\sigma_x| < \left| \frac{S}{\sin \theta \cos \theta} \right|$$

معیار تنش حداکثر



○ با توجه به نمودار روبرو داده های آزمایشگاهی با نتایج تئوری همبستگی مناسب ندارد از اینرو این معیار مناسبی نیست.

○ نقاط داده های آزمایشگاهی هستند و منحنی تئوری است.

معیار Tsi-Hill

این معیار شبیه معیار وون-میزز در مواد آیزوتروپیک است:

$$(G + H)\sigma_1^2 + (F + H)\sigma_2^2 + (F + G)\sigma_3^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 - 2G\sigma_1\sigma_3 - 2F\sigma_2\sigma_3 \\ + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 = 1$$

ثوابت F, H, G و M بصورت زیر تعیین می شوند:

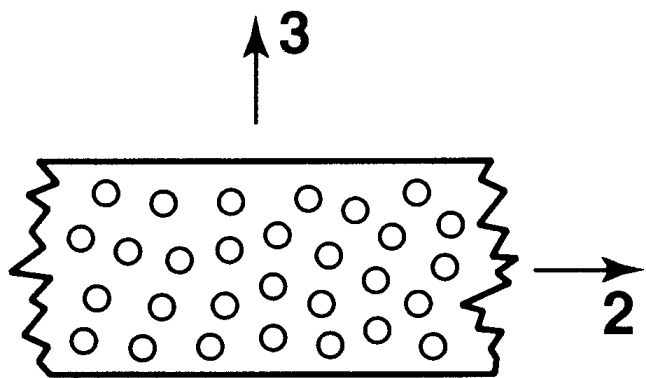
$$2N = \frac{1}{S^2} \quad G + H = \frac{1}{X^2} \quad F + H = \frac{1}{Y^2} \quad F + G = \frac{1}{Z^2}$$

از ترکیب معادلات فوق داریم:

$$2F = \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2} \quad 2G = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2} \quad 2H = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}$$

معیار Tsi-Hill

○ برای حالت تنش صفحه ای $\sigma_3 = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$ و در نظر گرفتن تقارن در سطح مقطع ماده (شکل زیر) $Y=Z$ داریم:



$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} = 1$$

○ با توجه به علامت σ_1, σ_2 و τ_{12} می بایست از X_t, X_c, Y_t و Y_c استفاده کرد.

معیار Tsi-Hill

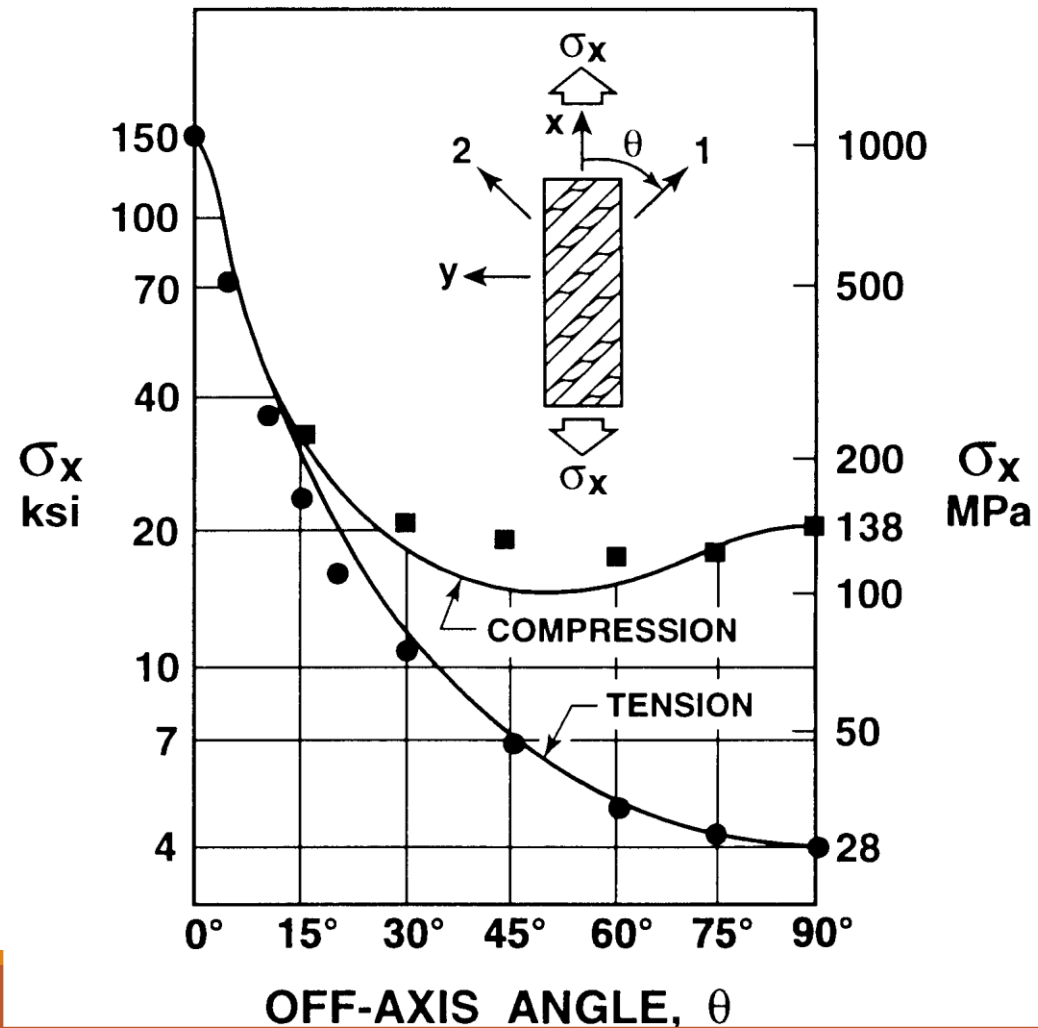
$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2 \theta$$

$$\sigma_2 = \sigma_x \sin^2 \theta$$

$$\tau_{12} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{\cos^4 \theta}{X^2} + \left[\frac{1}{S^2} - \frac{1}{X^2} \right] \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{Y^2} = \frac{1}{\sigma_x^2}$$

معیار Tsi-Hill



○ با توجه به نمودار روبرو داده های آزمایشگاهی با نتایج تئوری تطابق مناسبی دارد.

○

معیار Hoffman

○ با توجه به اینکه در مواد مرکب استحکام کششی و فشاری متفاوت است، Hoffman یک سری عبارات را به معادله Hill اضافه کرده است.

$$C_1(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + C_2(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + C_3(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \\ + C_4\sigma_1 + C_5\sigma_2 + C_6\sigma_3 + C_7\tau_{23}^2 + C_8\tau_{31}^2 + C_9\tau_{12}^2 = 1$$

○ ۹ ثابت در معادله فوق را می توان از استحکام ماده مرکب در جهات مختلف بدست آورد.

○ برای حالت تنش صفحه ای و تقارن سطح مقطع داریم:

$$\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$$

$$Z_t = Y_t, Z_c = Y_c, S_{31} = S_{12}$$

معیار Hoffman

در نتیجه معادله قبل بصورت زیر ساده سازی می شود:

$$-\frac{\sigma_1^2}{X_c X_t} + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_c X_t} - \frac{\sigma_2^2}{Y_c Y_t} + \frac{X_c + X_t}{X_c X_t} \sigma_1 + \frac{Y_c + Y_t}{Y_c Y_t} \sigma_2 + \frac{\tau_{12}^2}{S_{12}^2} = 1$$

در معادله فوق X_c و Y_c منفی هستند.

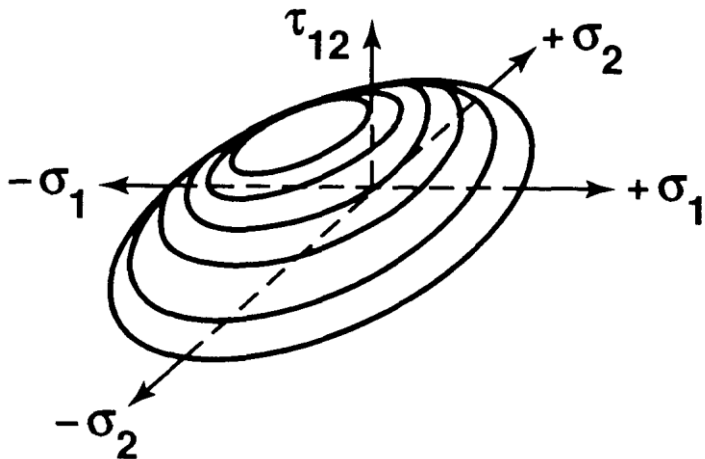
رابطه Hoffman بصورت یک بیضی گون بوده که نسبت به صفحه σ_1 - σ_2 تقارن دارد.

زاویه بین محوره‌های اصلی برابر است با:

$$\beta = \frac{1}{2} \cot^{-1} \left[\frac{Y_c Y_t}{X_c X_t} - 1 \right]$$

مختات مرکز:

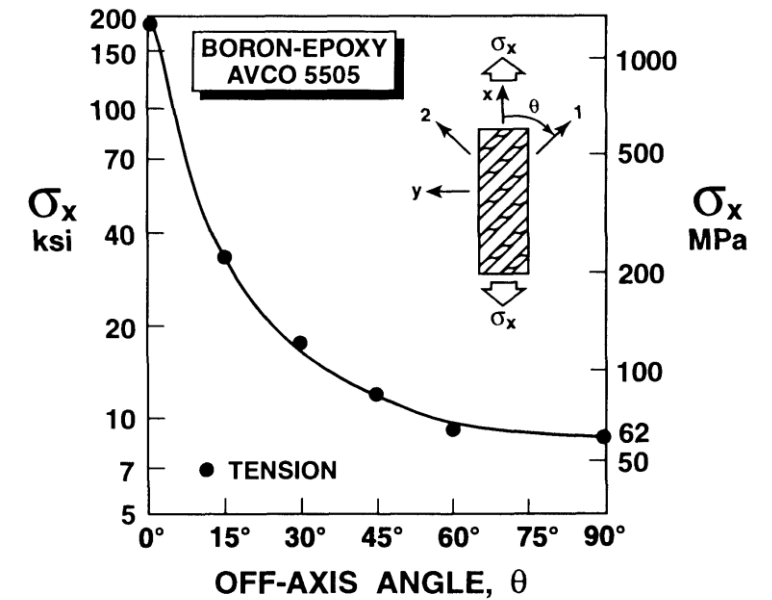
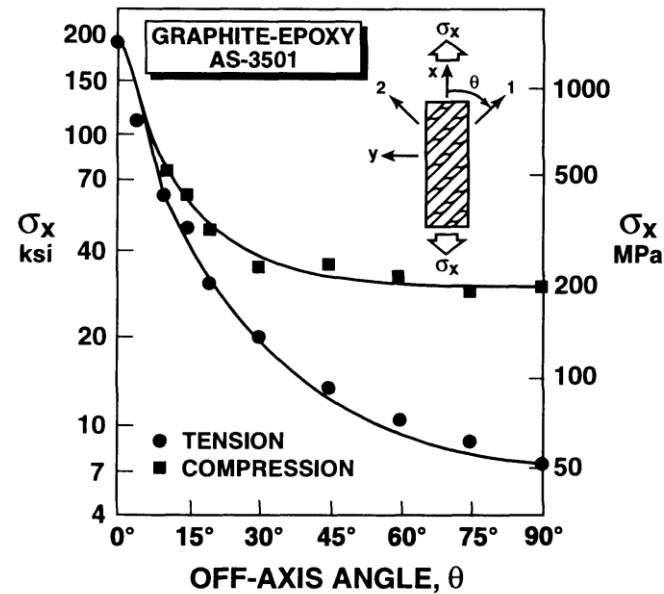
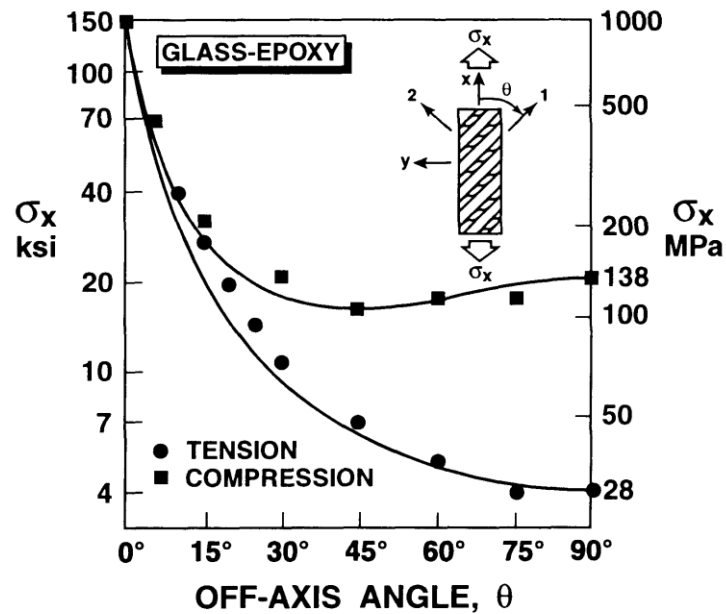
$$\sigma_1 = \frac{X_t + X_c}{2} + \frac{Y_t + Y_c}{2} \quad \sigma_2 = \frac{Y_t + Y_c}{2} + \frac{(X_t + X_c) Y_t Y_c}{4 X_t X_c}$$



معيار Hoffman

این معيار با داده آزمایشگاهی تطابق خوبی دارد.

این معيار در طراحی به عنوان یک معيار ساده و دقيق شناخته می شود.



معیار Tsai-Wu

- معیارهای Tsai-Hill و Hoffman به طور کامل با نتایج آزمایشگاهی منطبق نیستند.
- یکی از راههای افزایش انطباق بین تئوری و آزمایش، اضافه کردن تعداد ترم ها در معادله پیش بینی شکست است.
- از اینرو Tsai و Wu یک تعریف جدید استحکام برای بیان برهمکنش بین تنش ها در دو جهت ارائه کردند.
- آنها یک سطح شکست در فضای تنش شش بعدی بصورت زیر ارائه کردند:

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad i, j = 1, \dots, 6$$

- بطوریکه F_i و F_{ij} تانسورهای تنش از مرتبه دوم و چهارم هستند.
- برای حالت تنش صفحه ای معادله پیچیده فوق بصورت زیر ساده می شود:

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \sigma_6 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 = 1$$

معيار Tsai-Wu

وقتی نمونه فقط تحت تنش کششی در راستای x : $F_1 X_t + F_{11} X_t^2 = 1$ وقتی نمونه فقط تحت تنش فشاری در راستای x : $F_1 X_c + F_{11} X_c^2 = 1$

با حل همزمان دو معادله فوق داریم: $F_1 = \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c}$ $F_{11} = -\frac{1}{X_t X_c}$

بطور مشابه در راستای y داریم: $F_2 = \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c}$ $F_{22} = -\frac{1}{Y_t Y_c}$

مشاهدات نشان داده که استحکام برشی در جهات اصلی ماده مستقل از علامت تنش برشی است، پس داریم: $F_6 = 0$ $F_{66} = \frac{1}{S^2}$

اگر استحکام کششی و فشاری یکسان باشد داریم: $F_1 = 0$ $F_{11} = \frac{1}{X^2}$ $F_2 = 0$ $F_{22} = \frac{1}{Y^2}$

در نهایت با توجه به موارد بالا رابطه Tsai-Wu بصورت زیر ساده می شود:

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} = 1$$

معیار Tsai-Wu

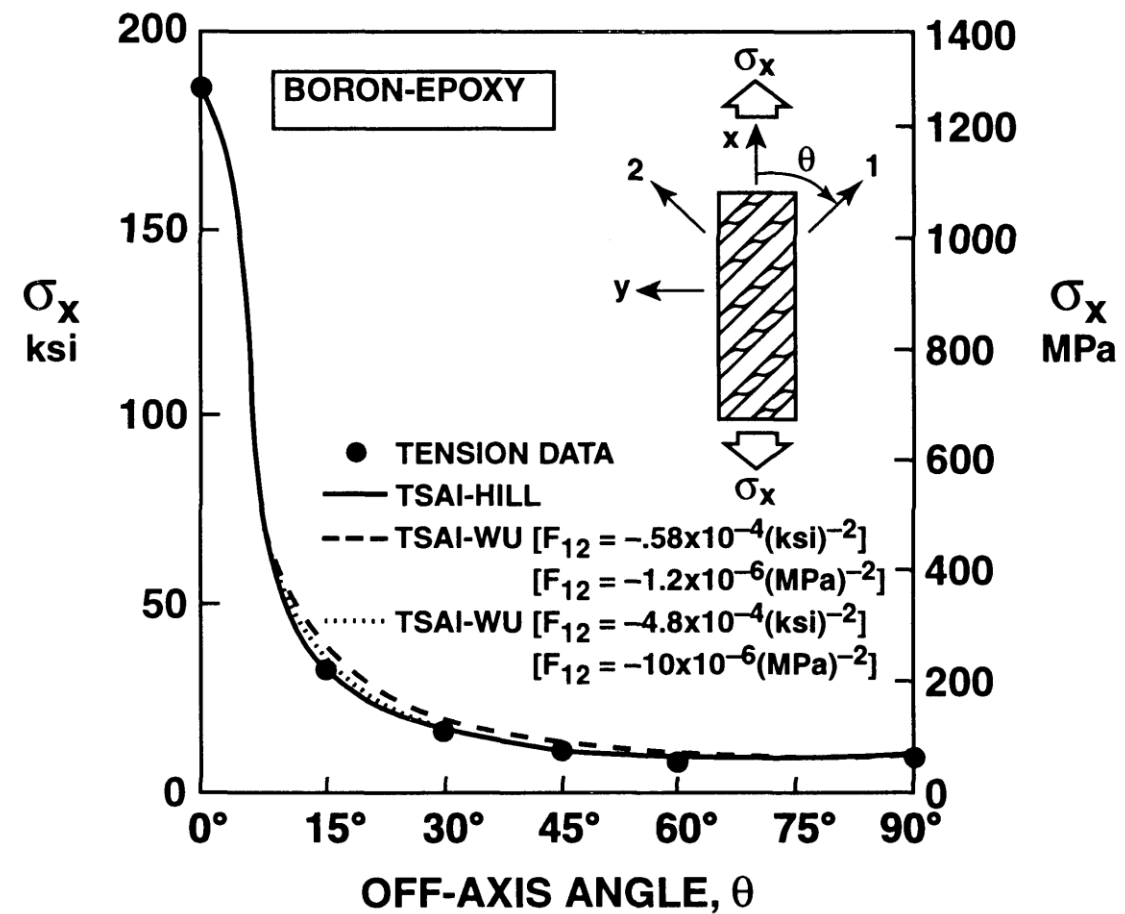
برای تعیین تانسور F_{12} چون حاصل ضرب σ_1 در σ_2 است بایستی از تست دو محوره استفاده کرد. برای این منظور قرار می دهیم:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[1 - \left[\frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c} \right] \sigma + \left[\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} \right] \sigma^2 \right] \quad \text{در نتیجه داریم:}$$

تعیین این ثابت کار مشکلی است. در بسیاری از موارد مشاهده شده که این ثابت دارای مقدار ناچیزی بوده و تاثیر چندانی ندارد از اینرو میتوان آن را صفر در نظر گرفت.

معيار Tsai-Wu

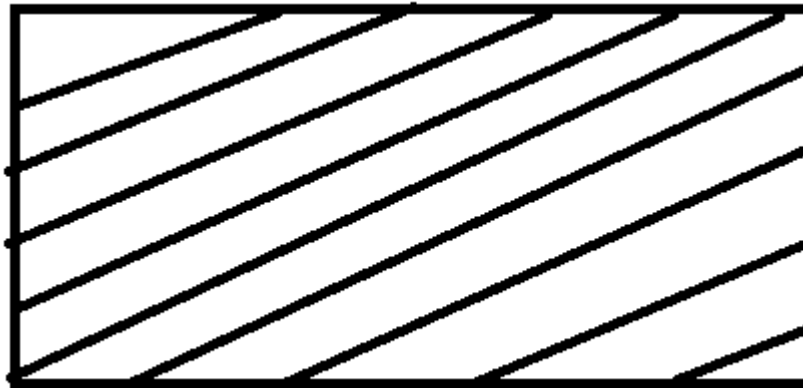


این معیار با داده آزمایشگاهی تطابق خوبی دارد.

مثال

○ برای تک لایه نشان داده شده در شکل زیر با زاویه الیاف 30° درجه اگر $\sigma_x = 650 \text{ Mpa}$ ، $\sigma_y = -200 \text{ Mpa}$ و $\tau = 50 \text{ MPa}$ باشد با توجه به معیارهای گفته شده تعیین کنید که آیا واماندگی رخ می دهد یا خیر؟

$$X_t = 2280 \text{ MPa}, X_c = 1450 \text{ MPa}, Y_t = 59 \text{ MPa}, Y_c = 228 \text{ MPa}, S = 69 \text{ MPa}$$



ساختار چندلایه (لمینیتی)

○ از تک لایه تا چند لایه:

- چند لایه متقارن Symmetric laminate: زاویه الیاف هر لایه مشابه لایه متقارن نسبت به خط مرکزی است. یعنی $\theta(z) = \theta(-z)$ بطوریکه Z فاصله از خط میانی است. چند مثال در زیر آمده است:

شماره لایه ← 1 2 3 4 5 6

1. Code: $[0/+45/90/90 +45/0]$
 $[0/45/90]_S$ ← S نماد تقارن است.

نکته: وقتی تعداد لایه ها زوج است، خط مرکزی (صفحه تقارن) بین دو لایه وسط است. در مثال شماره ۱ خط مرکزی بین لایه ۳ و ۴ است. برای تعداد لایه فرد، وسط لایه میانی است مانند مثال ۲.

2. Code: $[0/+45/90/\overline{+45}/0]$
 $[0/45/\overline{90}]_S$ علامت بار بالای ۹۰ نشان می دهد صفحه تقارن وسط این لایه است.

3. Code: $[0/+45/-45/90/\overline{-45}/+45/0]$
 $[0/\pm 45/\overline{90}]_S$

ساختار چند لایه (لمینیتی)

• ادامه:

4.
$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ [0 / 90 / 0 / 0 / 0 / 0 / 45 / 45 / 0 / 0 / 0 / 0 / 90 / 0] \\ \text{Code:} & & & & & & & & & & & & & & [0/90/0_4/45]_s \end{array}$$

وقتی چند لایه مشابه کنار هم هستند یکی را نوشته و تعداد آنها بصورت اندیس نوشته می شود.

5.
$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ [0/45/-45/+45/-45/-45/+45/-45/+45/0] \\ \text{Code:} & & & & & & & & & & [0/(\pm 45)_2]_s \end{array}$$

6.
$$[0/45/-45/45/-45/45/-45/0/0/0/0/0/-45/45/-45/45/-45/45/0]$$

Code: $[0/(\pm 45)_3/0_2/\bar{0}]_s$

7.
$$[\theta/-\theta/\theta/-\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta]$$

Code: $[\theta/-\theta]_{2s}$ or $[\pm\theta]_{2s}$ کل چیدمان دو بار تکرار و بعد متقارن

ساختار چندلایه (لمینیتی)

• ادامه:

8. Symmetric angle-ply laminate

چند لایه angle-ply متقارن: حتما تعداد لایه ها بایستی فرد باشد. $[\theta / -\theta / \theta / -\theta / \theta / -\theta / \theta]$

Code: $[\pm\theta / \theta / -\theta]_s$

9. Symmetric cross-ply laminate

چند لایه متقاطع متقارن: حتما تعداد لایه ها بایستی فرد باشد.

$[0 / 90 / 0 / 90 / 0 / 90 / 0 / 90 / 0]$

Code: $[(0 / 90)_2 / \bar{0}]_s$

10. Hybrid (interply) laminate.

$[0_B / 0_B / 45_C / -45_C / 90_G / 90_G / -45_C / 45_C / 0_B / 0_B]$

Code: $[0_{2B} / (\pm 45)_C / 90_G]_s$

چند لایه ترکیبی :

در مثال روبرو نمادهای B، C و G به ترتیب بیانگر الیاف کربن، بور و شیشه است.

ساختار چندلایه (لمینیتی)

- چند لایه پاد متقارن Anti-Symmetric laminate: چیدمان الیاف نسبت به صفحه میانی چندلایه، پاد متقارن است، یعنی: $\theta(z) = -\theta(-z)$. مثال: $\theta / -\theta / \theta / -\theta$
- چند لایه نامتقارن Unsymmetric laminate: در چیدمان الیاف هیچ رابطه خاصی وجود ندارد.

0/0/0/90/90/90

- چندلایه شبه همسانگرد (quasi-isotropic): متشکل از حداقل سه لایه (یا بیشتر) از لایه های یکسان (حتی ضخامت)، بگونه ای که هر لایه نسبت به لایه مجاورش دارای اختلاف زاویه الیاف یکسان باشد. اختلاف زاویه هر لایه با لایه مجاور در یک چند لایه با n لایه برابر است با $180/n$ درجه. ثوابت الاستیک این چندلایه در صفحه xy رفتار همسانگرد دارد. مثالهایی از این چند لایه عبارتند از: $[+60/0/-60]$ و $[+45/0/-45/90]$

تئوری چندلایه

○ تئوری چند لایه برای محاسبه تنش ها و کرنش ها در هر لایه در یک ساختار چندلایه مفید است. مراحل کار به ترتیب بصورت زیر است:

- محاسبه ماتریس های سفتی برای چند لایه
- محاسبه کرنش ها و انحنای صفحه میانی و برای چندلایه به خاطر نیروها و گشتاورهای اعمال شده به چند لایه
- محاسبه کرنش های صفحه ای ϵ_{xx} ، ϵ_{yy} و γ_{xy} برای هر لایه
- محاسبه تنش های صفحه ای σ_{xx} ، σ_{yy} و τ_{xy} برای هر لایه

○ فرضیات

- چند لایه نازک و پهن است (ضخامت $\gg$ عرض)
- اتصال کاملی بین لایه ها وجود دارد.
- توزیع کرنش در جهت ضخامت خطی است.
- همه لایه ها از نظر ماکروسکوپی همگن بوده دارای رفتار الاستیک خطی هستند.

تئوری چندلایه

نیروها و گشتاورهای چندلایه:

$$N_{xx} = A_{11}\varepsilon_{xx}^0 + A_{12}\varepsilon_{yy}^0 + A_{16}\gamma_{xy}^0 + B_{11}k_{xx} + B_{12}k_{yy} + B_{16}k_{xy},$$

$$N_{yy} = A_{12}\varepsilon_{xx}^0 + A_{22}\varepsilon_{yy}^0 + A_{26}\gamma_{xy}^0 + B_{12}k_{xx} + B_{22}k_{yy} + B_{26}k_{xy},$$

$$N_{xy} = A_{16}\varepsilon_{xx}^0 + A_{26}\varepsilon_{yy}^0 + A_{66}\gamma_{xy}^0 + B_{16}k_{xx} + B_{26}k_{yy} + B_{66}k_{xy},$$

$$M_{xx} = B_{11}\varepsilon_{xx}^0 + B_{12}\varepsilon_{yy}^0 + B_{16}\gamma_{xy}^0 + D_{11}k_{xx} + D_{12}k_{yy} + D_{16}k_{xy},$$

$$M_{yy} = B_{12}\varepsilon_{xx}^0 + B_{22}\varepsilon_{yy}^0 + B_{26}\gamma_{xy}^0 + D_{12}k_{xx} + D_{22}k_{yy} + D_{26}k_{xy},$$

$$M_{xy} = B_{16}\varepsilon_{xx}^0 + B_{26}\varepsilon_{yy}^0 + B_{66}\gamma_{xy}^0 + D_{16}k_{xx} + D_{26}k_{yy} + D_{66}k_{xy}.$$

N_{xx} نیروهای نرمال منتج در جهت X (بر واحد عرض)

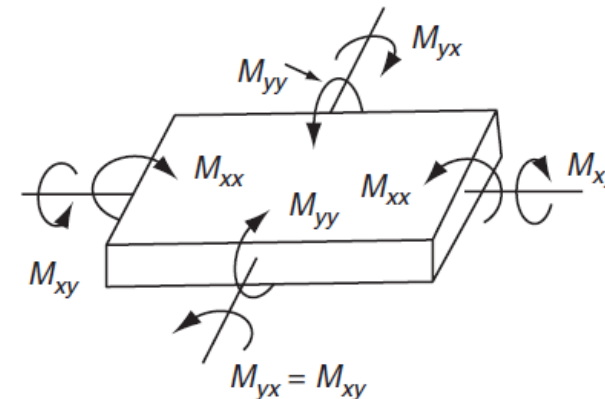
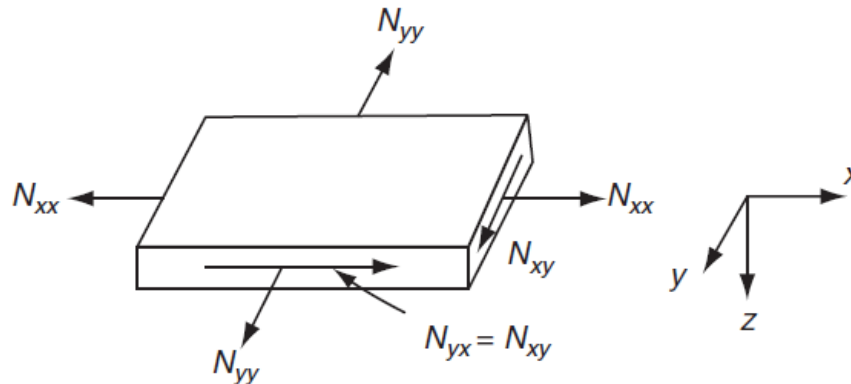
N_{yy} نیروهای نرمال منتج در جهت Y (بر واحد عرض)

N_{xy} نیروی برشی منتج در جهت (بر واحد عرض)

M_{xx} گشتاور خمشی منتج در صفحه YZ (بر واحد عرض)

M_{yy} گشتاور خمشی منتج در صفحه XZ (بر واحد عرض)

M_{xy} گشتاور پیچشی منتج (بر واحد عرض)



تئوری چندلایه

نیروها و گشتاورهای چندلایه:

$[A]$ ماتریس سفتی کششی چندلایه (N/m)

$[B]$ ماتریس سفتی کوپلینگ چندلایه (N)

$[D]$ ماتریس سفتی خمشی چندلایه (N)

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{yy}^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \end{bmatrix} + [B] \begin{bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [B] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{yy}^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \end{bmatrix} + [D] \begin{bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{bmatrix},$$

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}.$$

تئوری چندلایه

در روابط بالا نکات زیر وجود دارد:

1. A_{16}, A_{26} نیروهای نرمال داخل صفحه ای را به کرنش برشی صفحه میانی و بالعکس مربوط می کند.
2. B_{11}, B_{22}, B_{12} نیروهای نرمال داخل صفحه ای را به انحنای خمشی و بالعکس مربوط می کند.
3. B_{16}, B_{26} نیروهای نرمال داخل صفحه ای را به انحنای پیچشی و بالعکس مربوط می کند.
4. B_{66} نیروی برشی داخل صفحه ای را به انحنای پیچشی مربوط می کند.
5. D_{16}, D_{26} ممان خمشی را به انحنای پیچشی و بالعکس مربوط می کند.

تئوری چندلایه

○ اجزاء ماتریس های سفتی:

$$A_{mn} = \sum_{j=1}^N (\bar{Q}_{mn})_j (h_j - h_{j-1}), \quad B_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\bar{Q}_{mn})_j (h_j^2 - h_{j-1}^2), \quad D_{mn} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^N (\bar{Q}_{mn})_j (h_j^3 - h_{j-1}^3),$$

N = تعداد لایه ها

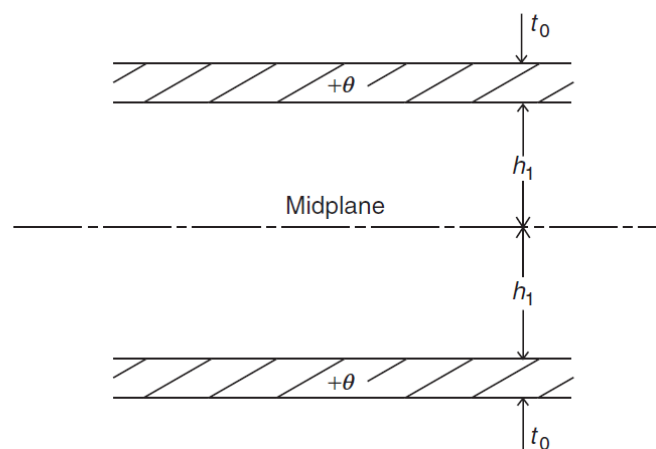
$(\bar{Q}_{mn})_j$ = اجزاء ماتریس سفتی لایه j ام

h_{j-1} = فاصله از صفحه میانی تا بالای لایه j ام

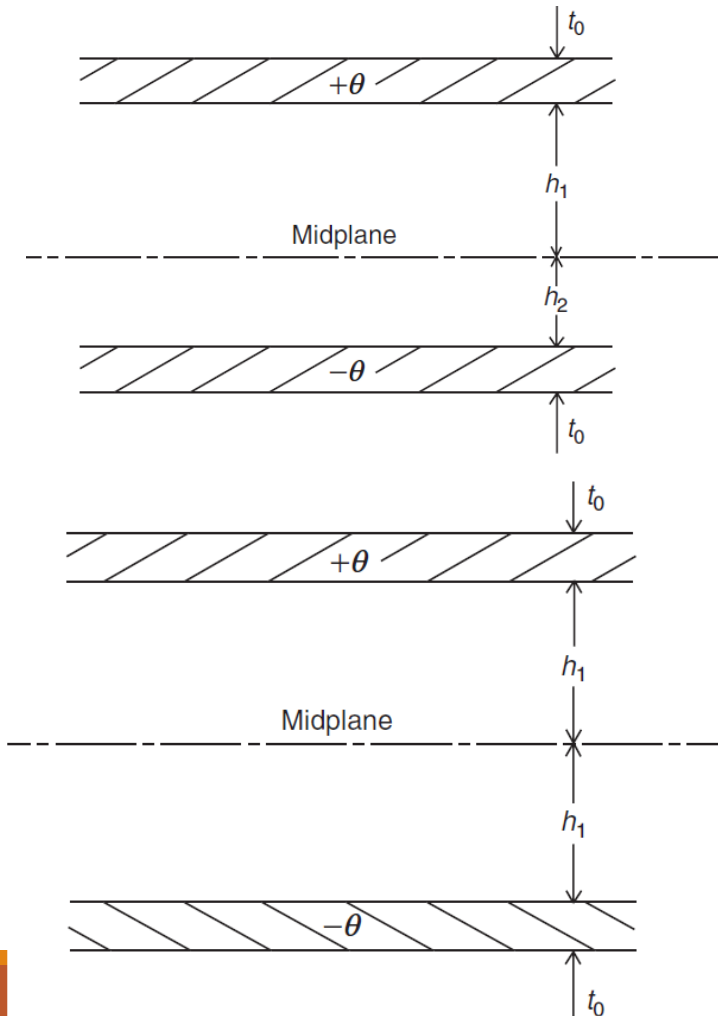
h_j = فاصله از صفحه میانی تا ته لایه j ام

○ اگر $[B]$ غیر صفر باشد، نیروهای نرمال باعث تغییر شکل های کششی و برشی و همچنین ممان های خمشی و پیچشی نیز باعث تغییر شکل های کششی-برشی می شود.

○ در یک چندلایه متقارن (شکل زیر) $[B]$ صفر بوده و هیچ کوپلی بین کشش-خمشی وجود ندارد.



تئوری چندلایه

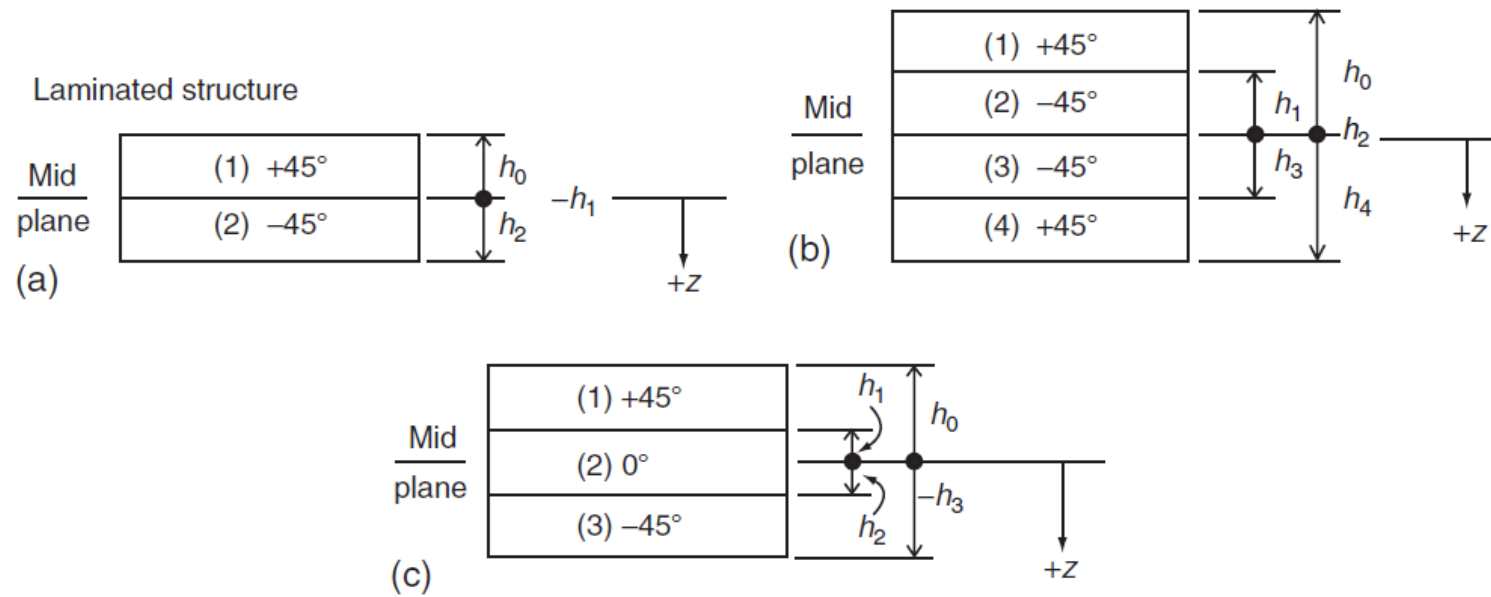


○ اگر برای هر لایه با زاویه $+\theta$ یک لایه همسان (ضخامت و جنس یکسان) با زاویه $-\theta$ وجود داشته باشد، کوپل تنش نرمال-کرنش برشی (A16 و A26 در [A]) برای چند لایه صفر است. به این چند لایه بالانس گویند. مثال: $[0/+30/-30/+30/-30/0]$

○ اگر برای هر لایه با زاویه $+\theta$ بالای صفحه میانی یک لایه همسان (ضخامت و جنس یکسان) با زاویه $-\theta$ در همان فاصله زیر صفحه میانی وجود داشته باشد کوپل گشتاور خمشی-انحناء پیچشی (D16 و D26 در [D]) برای چند لایه صفر است. مثال: $[0/+30/-30/+30/-30/0]$

مثال

○ ماتریس های $[A]$ ، $[B]$ و $[D]$ را برای الف) چند لایه $[+45/-45]$ ب) چند لایه متقارن $[+45/-45]_s$ و ج) چند لایه نامتقارن $[+45/0/-45]$ تعیین کنید. ضخامت هر لایه ۶ میلیمتر بوده و حاوی ۶۰ درصد حجمی الیاف کربن در ماتریس اپوکسی می باشد. خواص مواد شبیه مثال قبل است.



جواب

○ در مثال قبل داشتیم:

$$[\bar{Q}]_{0^\circ} = [Q]_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 134.03 & 2.29 & 0 \\ 2.29 & 8.82 & 0 \\ 0 & 0 & 3.254 \end{bmatrix} \text{ GPa}, \quad [\bar{Q}]_{+45^\circ} = \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & 31.3 \\ 33.61 & 40.11 & 31.3 \\ 31.3 & 31.3 & 34.57 \end{bmatrix} \text{ GPa}, \quad [\bar{Q}]_{-45^\circ} = \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & -31.3 \\ 33.61 & 40.11 & -31.3 \\ -31.3 & -31.3 & 34.57 \end{bmatrix} \text{ GPa}.$$

○ برای حالت الف داریم:

$$\bar{h}_0 = -0.006 \quad \bar{h}_1 = 0 \quad \bar{h}_2 = 0.006 \quad (\bar{Q}_{mn})_1 = (\bar{Q}_{mn})_{+45^\circ} \quad (\bar{Q}_{mn})_2 = (\bar{Q}_{mn})_{-45^\circ}$$

$$A_{mn} = (\bar{Q}_{mn})_1(h_1 - h_0) + (\bar{Q}_{mn})_2(h_2 - h_1)$$

$$= 6 \times 10^{-3}(\bar{Q}_{mn})_{+45^\circ} + 6 \times 10^{-3}(\bar{Q}_{mn})_{-45^\circ},$$

$$B_{mn} = \frac{1}{2}[(\bar{Q}_{mn})_1(h_1^2 - h_0^2) + (\bar{Q}_{mn})_2(h_2^2 - h_1^2)]$$

$$= -18 \times 10^{-6}(\bar{Q}_{mn})_{+45^\circ} + 18 \times 10^{-6}(\bar{Q}_{mn})_{-45^\circ},$$

$$D_{mn} = \frac{1}{3}[(\bar{Q}_{mn})_1(h_1^3 - h_0^3) + (\bar{Q}_{mn})_2(h_2^3 - h_1^3)]$$

$$= 72 \times 10^{-9}(\bar{Q}_{mn})_{+45^\circ} + 72 \times 10^{-9}(\bar{Q}_{mn})_{-45^\circ}.$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 481.32 & 403.32 & 0 \\ 403.32 & 481.32 & 0 \\ 0 & 0 & 414.84 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ N/m},$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1126.8 \\ 0 & 0 & -1126.8 \\ -1126.8 & -1126.8 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ N},$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 5775.84 & 4839.84 & 0 \\ 4839.84 & 5775.84 & 0 \\ 0 & 0 & 4978.08 \end{bmatrix} \text{ N m}.$$

این چندلایه بالانس است.

جواب

○ برای حالت ب داریم:

$$h_3 = -h_1 = 0.006 \text{ m} \quad h_4 = h_0 = 0.012 \text{ m} \quad h_2 = 0 \quad (\bar{Q}_{mn})_4 = (\bar{Q}_{mn})_1 = (\bar{Q}_{mn})_{+45^\circ} \quad (\bar{Q}_{mn})_3 = (\bar{Q}_{mn})_2 = (\bar{Q}_{mn})_{-45^\circ}.$$

$$\begin{aligned} A_{mn} &= (\bar{Q}_{mn})_1(h_1 - h_0) + (\bar{Q}_{mn})_2(h_2 - h_1) + (\bar{Q}_{mn})_3(h_3 - h_2) + (\bar{Q}_{mn})_4(h_4 - h_3) \\ &= (\bar{Q}_{mn})_{+45^\circ}(h_1 - h_0 + h_4 - h_3) + (\bar{Q}_{mn})_{-45^\circ}(h_2 - h_1 + h_3 - h_2) \\ &= 12 \times 10^{-3}(\bar{Q}_{mn})_{+45^\circ} + 12 \times 10^{-3}(\bar{Q}_{mn})_{-45^\circ}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{mn} &= \frac{1}{2} [(\bar{Q}_{mn})_1(h_1^2 - h_0^2) + (\bar{Q}_{mn})_2(h_2^2 - h_1^2) + (\bar{Q}_{mn})_3(h_3^2 - h_2^2) + (\bar{Q}_{mn})_4(h_4^2 - h_3^2)] \\ &= \frac{1}{2} [(\bar{Q}_{mn})_{45^\circ}(h_1^2 - h_0^2 + h_4^2 - h_3^2) + (\bar{Q}_{mn})_{-45^\circ}(h_2^2 - h_1^2 + h_3^2 - h_2^2)] \\ &= 0 \quad \text{since } h_1^2 = h_3^2 \text{ and } h_0^2 = h_4^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{mn} &= \frac{1}{3} [(\bar{Q}_{mn})_1(h_1^3 - h_0^3) + (\bar{Q}_{mn})_2(h_2^3 - h_1^3) + (\bar{Q}_{mn})_3(h_3^3 - h_2^3) + (\bar{Q}_{mn})_4(h_4^3 - h_3^3)] \\ &= \frac{1}{3} [(\bar{Q}_{mn})_{+45^\circ}(h_1^3 - h_0^3 + h_4^3 - h_3^3) + (\bar{Q}_{mn})_{-45^\circ}(h_2^3 - h_1^3 + h_3^3 - h_2^3)] \\ &= 1008 \times 10^{-9}(\bar{Q}_{mn})_{+45^\circ} + 144 \times 10^{-9}(\bar{Q}_{mn})_{-45^\circ}. \end{aligned}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 962.64 & 806.64 & 0 \\ 806.64 & 962.64 & 0 \\ 0 & 0 & 829.68 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ N/m},$$

$$[B] = [0],$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 46.21 & 38.72 & 27.04 \\ 38.72 & 46.21 & 27.04 \\ 27.04 & 27.04 & 39.82 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ N m}.$$

جواب

○ برای حالت ج داریم:

$$h_2 = -h_1 = 3 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad h_3 = -h_0 = 9 \times 10^{-3} \text{ m}. \quad (\bar{Q}_{mn})_1 = (\bar{Q}_{mn})_{+45^\circ}, \quad (\bar{Q}_{mn})_2 = (\bar{Q}_{mn})_{0^\circ}, \quad (\bar{Q}_{mn})_3 = (\bar{Q}_{mn})_{-45^\circ}.$$

$$\begin{aligned} A_{mn} &= (\bar{Q}_{mn})_1(h_1 - h_0) + (\bar{Q}_{mn})_2(h_2 - h_1) + (\bar{Q}_{mn})_3(h_3 - h_2) \\ &= 6 \times 10^{-3}(\bar{Q}_{mn})_{+45^\circ} + 6 \times 10^{-3}(\bar{Q}_{mn})_{0^\circ} + 6 \times 10^{-3}(\bar{Q}_{mn})_{-45^\circ}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{mn} &= \frac{1}{2} [(\bar{Q}_{mn})_1(h_1^2 - h_0^2) + (\bar{Q}_{mn})_2(h_2^2 - h_1^2) + (\bar{Q}_{mn})_3(h_3^2 - h_2^2)] \\ &= -36 \times 10^{-6}(\bar{Q}_{mn})_{+45^\circ} + 36 \times 10^{-6}(\bar{Q}_{mn})_{-45^\circ}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{mn} &= \frac{1}{3} [(\bar{Q}_{mn})_1(h_1^3 - h_0^3) + (\bar{Q}_{mn})_2(h_2^3 - h_1^3) + (\bar{Q}_{mn})_3(h_3^3 - h_2^3)] \\ &= 234 \times 10^{-9}(\bar{Q}_{mn})_{+45^\circ} + 18 \times 10^{-9}(\bar{Q}_{mn})_{0^\circ} + 234 \times 10^{-9}(\bar{Q}_{mn})_{-45^\circ}. \end{aligned}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1285.50 & 417.06 & 0 \\ 417.06 & 534.24 & 0 \\ 0 & 0 & 434.36 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ N/m},$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2253.6 \\ 0 & 0 & -2253.6 \\ -2253.6 & -2253.6 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ N},$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 21,183.84 & 15,770.70 & 0 \\ 15,770.70 & 18,930.24 & 0 \\ 0 & 0 & 16,237.33 \end{bmatrix} \text{ N m}.$$

کرنش ها و انحناء های صفحه میانی

○ اگر نیروها و ممان های عمل کننده بر روی چندلایه معلوم باشد، کرنشها و انحناءهای صفحه میانی از روابط زیر تعیین می شود:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} = [A_1] \begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} + [B_1] \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{bmatrix} = [C_1] \begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} + [D_1] \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix},$$

$$[A_1] = [A^{-1}] + [A^{-1}][B][(D^*)^{-1}][B][A^{-1}]$$

$$[B_1] = -[A^{-1}][B][(D^*)^{-1}]$$

$$[C_1] = -[(D^*)^{-1}][B][A^{-1}] = [B_1]^T$$

$$[D^*] = [D] - [B][A^{-1}][B]$$

$$[D_1] = [(D^*)^{-1}]$$

کرنش ها و انحناء های صفحه میانی

- نکته: برای چندلایه متقارن $[B]=0$ و بنابراین داریم: $[A_1]=[A-1]$, $[B_1]=[C_1]=0$, $[D_1]=[D-1]$
- در این حالت معادلات کرنش و انحناء بصورت زیر بدست می آید:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} = [A^{-1}] \begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{bmatrix} = [D^{-1}] \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix}.$$

خواص الاستیک چند لایه متقارن متعادل

$$\left. \begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \\ [B] &= [0] \end{aligned} \right\} \Rightarrow [A^{-1}] = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} & 0 \\ -A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}{A_{66}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} & 0 \\ -A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}{A_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix}$$

خواص الاستیک چند لایه متقارن متعادل

$$\varepsilon_{xx}^o = \frac{A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} h \sigma_{xx},$$

$$\varepsilon_{yy}^o = -\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} h \sigma_{xx},$$

$$\gamma_{xy}^o = 0,$$

$$E_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}^o} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{hA_{22}},$$

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_{yy}^o}{\varepsilon_{xx}^o} = \frac{A_{12}}{A_{22}}.$$

$$E_{yy} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{hA_{11}},$$

$$\nu_{yx} = \frac{A_{12}}{A_{11}} \left(\text{which is the same as } \nu_{xy} \frac{E_{yy}}{E_{xx}} \right),$$

$$G_{xy} = \frac{A_{66}}{h}.$$

خواص الاستیک چندلایه متقارن شبه همسانگرد (quasi-isotropic)

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} = A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} = \frac{A_{11} - A_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

$$[B] = [0]$$

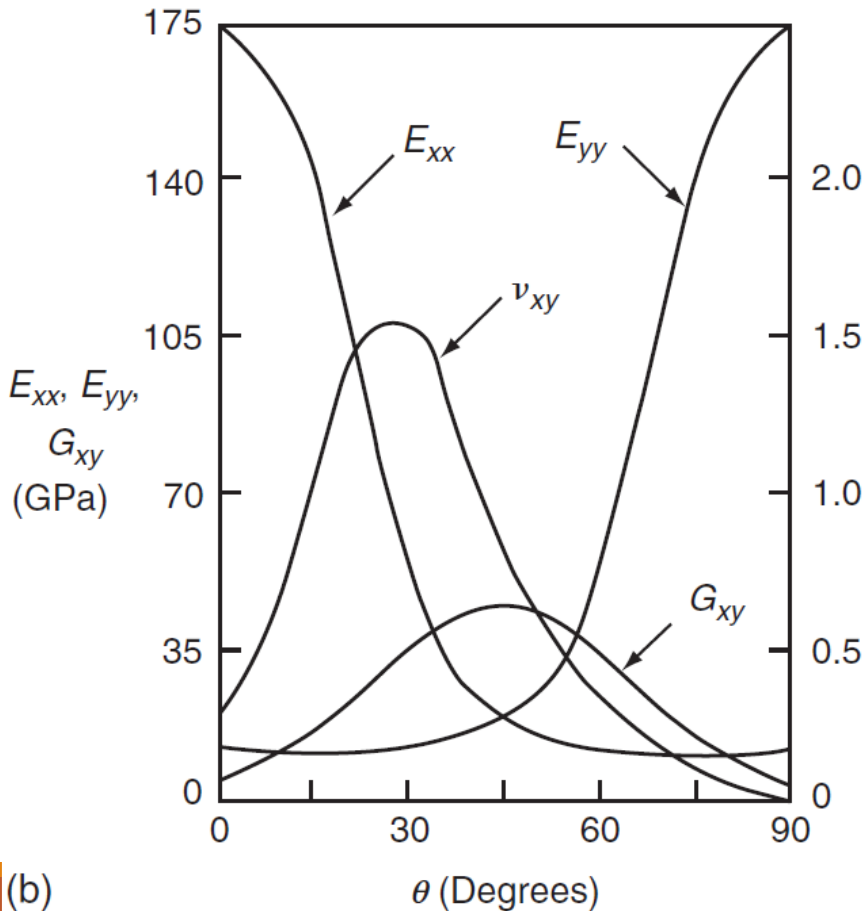
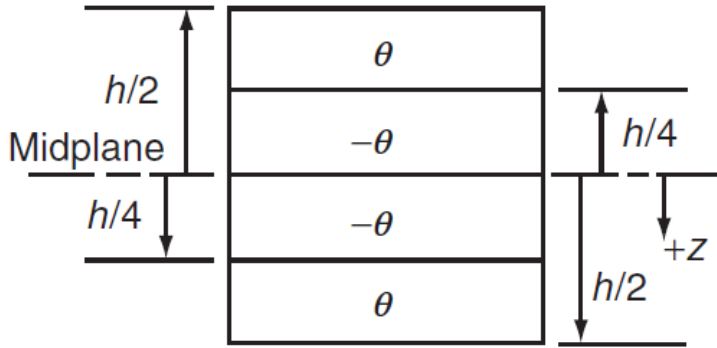
$$E_{xx} = E_{yy} = \frac{A_{11}^2 - A_{12}^2}{hA_{11}},$$

$$\nu_{xy} = \frac{A_{12}}{A_{11}},$$

$$G_{xy} = \frac{A_{11} - A_{12}}{2h},$$

$$G_{xy} = \frac{E_{xx}}{2(1 + \nu_{xy})}.$$

خواص الاستیک چند لایه متقارن زاویه دار (angle-ply)



$$\bar{Q}_{11}(\theta) = \bar{Q}_{11}(-\theta),$$

$$\bar{Q}_{22}(\theta) = \bar{Q}_{22}(-\theta),$$

$$\bar{Q}_{12}(\theta) = \bar{Q}_{12}(-\theta),$$

$$\bar{Q}_{66}(\theta) = \bar{Q}_{66}(-\theta),$$

$$\bar{Q}_{16}(\theta) = -\bar{Q}_{16}(-\theta),$$

$$\bar{Q}_{26}(\theta) = -\bar{Q}_{26}(-\theta).$$

$$\begin{aligned} A_{ij} &= (\bar{Q}_{ij})_{\theta} \left(-\frac{h}{4} + \frac{h}{2} \right) + (\bar{Q}_{ij})_{-\theta} \left(0 + \frac{h}{4} \right) \\ &\quad + (\bar{Q}_{ij})_{-\theta} \left(\frac{h}{4} - 0 \right) + (\bar{Q}_{ij})_{\theta} \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{4} \right) \\ &= \frac{h}{2} [(\bar{Q}_{ij})_{\theta} + (\bar{Q}_{ij})_{-\theta}]. \end{aligned}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} h\bar{Q}_{11} & h\bar{Q}_{12} & 0 \\ h\bar{Q}_{12} & h\bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & h\bar{Q}_{66} \end{bmatrix}.$$

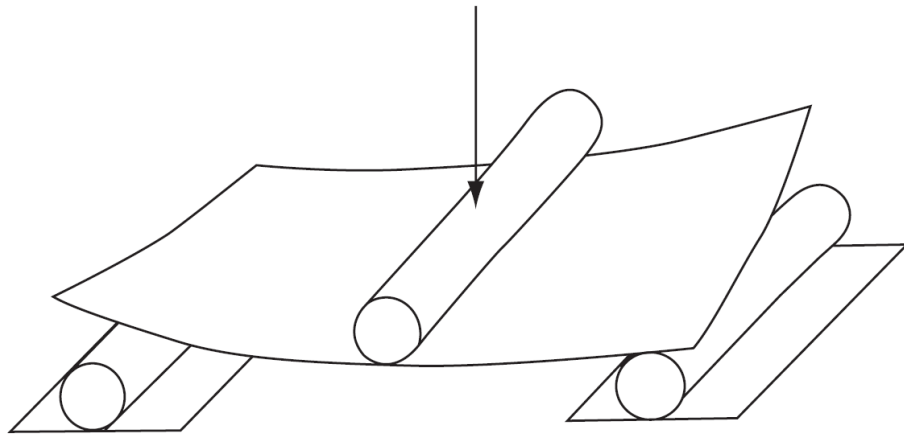
$$E_{xx} = \frac{\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{22} - \bar{Q}_{12}^2}{\bar{Q}_{22}},$$

$$\nu_{xy} = \frac{\bar{Q}_{12}}{\bar{Q}_{22}},$$

$$E_{yy} = \frac{\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{22} - \bar{Q}_{12}^2}{\bar{Q}_{11}},$$

$$G_{xy} = \bar{Q}_{66}.$$

خمش چندلایه متقارن متعادل



$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}, \quad [D^{-1}] = \frac{1}{D_0} \begin{bmatrix} D_{11}^{\circ} & D_{12}^{\circ} & D_{16}^{\circ} \\ D_{12}^{\circ} & D_{22}^{\circ} & D_{26}^{\circ} \\ D_{16}^{\circ} & D_{26}^{\circ} & D_{66}^{\circ} \end{bmatrix},$$

$$D_0 = D_{11}(D_{22}D_{66} - D_{26}^2) - D_{12}(D_{12}D_{66} - D_{16}D_{26}) + D_{16}(D_{12}D_{26} - D_{22}D_{16})$$

$$D_{11}^{\circ} = (D_{22}D_{66} - D_{26}^2)$$

$$D_{22}^{\circ} = (D_{11}D_{66} - D_{16}^2)$$

$$D_{12}^{\circ} = -(D_{12}D_{66} - D_{16}D_{26})$$

$$D_{26}^{\circ} = -(D_{11}D_{26} - D_{12}D_{16})$$

$$D_{16}^{\circ} = (D_{12}D_{26} - D_{22}D_{16})$$

$$D_{66}^{\circ} = (D_{11}D_{12} - D_{12}^2)$$

○ اگر ممان خمشی در صفحه yz اعمال شود (یعنی تنها M_{xx} داشته باشیم) و $M_{yy}=M_{xy}=0$ داریم:

$$k_{xx} = \frac{D_{11}^{\circ}}{D_0} M_{xx}, \quad k_{yy} = \frac{D_{12}^{\circ}}{D_0} M_{xx}, \quad k_{xy} = \frac{D_{16}^{\circ}}{D_0} M_{xx}.$$

○ بنابراین با آنکه گشتاور پیچشی به تیر اعمال نمیشود،

تیر تمایل به پیچش دارد.

تنش و کرنش هر لایه در چندلایه

○ با داشتن کرنشها و انحنای صفحه میانی، کرنش در هر لایه بصورت زیر تعیین می شود:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{yy}^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \end{bmatrix} + z_j \begin{bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{bmatrix},$$

z_j : فاصله لایه j ام از صفحه میانی

○ تنش ها در لایه j ام بصورت زیر بدست می آید:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_j = [\bar{Q}_{mn}]_j \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_j = [\bar{Q}_{mn}]_j \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{yy}^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \end{bmatrix} + z_j [\bar{Q}_{mn}]_j \begin{bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{bmatrix}.$$

مثال

○ تنشها در هر لایه از چندلایه $[+45/-45]$ تحت تاثیر $N_{xx} = 100 \text{ kN/m}$ تعیین کنید.

جواب:

از جواب مثال قبل ماتریس های $[A]$ ، $[B]$ و $[D]$ را داریم. پس:

$$[A^{-1}] = \begin{bmatrix} 0.697 & -0.584 & 0 \\ -0.584 & 0.697 & 0 \\ 0 & 0 & 0.241 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \text{ m/N}, \quad [D^*] = [D] - [B][A^{-1}][B] = \begin{bmatrix} 2715.84 & 1779.84 & 0 \\ 1779.84 & 2715.84 & 0 \\ 0 & 0 & 2108.08 \end{bmatrix} \text{ N m}$$

$$[B][A^{-1}][B] = \begin{bmatrix} 3.06 & 3.06 & 0 \\ 3.06 & 3.06 & 0 \\ 0 & 0 & 2.87 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ N m}, \quad [D_1] = [(D^*)^{-1}] = \begin{bmatrix} 6.45 & -4.23 & 0 \\ -4.23 & 6.45 & 0 \\ 0 & 0 & 4.74 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \frac{1}{\text{N m}},$$

ادامه جواب

$$[B_1] = -[A^{-1}][B][(D^*)^{-1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 603.54 \\ 0 & 0 & 603.54 \\ 602.74 & 602.74 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-9} \frac{1}{\text{N}}, \quad [C_1] = -[(D^*)^{-1}][B][A^{-1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 602.74 \\ 0 & 0 & 602.74 \\ 603.54 & 603.54 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-9} \frac{1}{\text{N}},$$

$$[A_1] = [A^{-1}] + [A^{-1}][B][(D^*)^{-1}][B][A^{-1}] = \begin{bmatrix} 7.7385 & -5.0715 & 0 \\ -5.0715 & 7.7385 & 0 \\ 0 & 0 & 5.683 \end{bmatrix} \times 10^{-9} \text{ m/N}.$$

کرنش ها و انحنای صفحه میانی:

$$[\varepsilon^o] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} = [A_1] \begin{bmatrix} 100 \times 10^3 \text{ N/m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \varepsilon_{xx}^o &= 77.385 \times 10^{-5} \text{ m/m}, \\ \varepsilon_{yy}^o &= -50.715 \times 10^{-5} \text{ m/m}, \\ \gamma_{xy}^o &= 0. \end{aligned}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{bmatrix} = [C_1] \begin{bmatrix} 100 \times 10^3 \text{ N/m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} k_{xx} &= 0 \\ k_{yy} &= 0 \\ k_{xy} &= 0.060354 \text{ per m} \end{aligned}$$

ادامه جواب

کرنش ها برای لایه های +45 و -45:-

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{+45^\circ} = \begin{bmatrix} 77.385 \times 10^{-5} \\ -50.715 \times 10^{-5} \\ 0 \end{bmatrix} + (-3 \times 10^{-3}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.060354 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77.385 \\ -50.715 \\ -18.106 \end{bmatrix} \times 10^{-5}.$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{-45^\circ} = \begin{bmatrix} 77.385 \\ -50.715 \\ 18.106 \end{bmatrix} \times 10^{-5}.$$

تنش ها برای لایه های +45 و -45:-

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_{+45^\circ} = \begin{bmatrix} 40.11 & 33.61 & 31.3 \\ 33.61 & 40.11 & 31.3 \\ 31.3 & 31.3 & 34.57 \end{bmatrix} \text{ GPa} \begin{bmatrix} 77.385 \times 10^{-5} \\ -50.715 \times 10^{-5} \\ -18.106 \times 10^{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.33 \\ 0 \\ 2.09 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_{-45^\circ} = \begin{bmatrix} 8.33 \\ 0 \\ -2.09 \end{bmatrix} \text{ MPa}.$$

تنش و کرنش حرارتی

○ اگر تغییرات دمایی در یک چندلایه به اندازه ΔT باشد، کرنش های هر لایه از روابط زیر بدست می آید:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^M + \varepsilon_{xx}^T = \varepsilon_{xx}^{\circ} + z k_{xx},$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}^M + \varepsilon_{yy}^T = \varepsilon_{yy}^{\circ} + z k_{yy},$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^M + \gamma_{xy}^T = \gamma_{xy}^{\circ} + z k_{xy},$$

نکته: نشانه های M و T به ترتیب بیانگر کرنش های مکانیکی و حرارتی هستند.

○ تنش های حرارتی بوسیله قید ایجاد شده توسط لایه های مجاور در مقابل انبساط حرارتی آزاد بوجود می آید.

○ نیروها و ممان های منتج با در نظر گرفتن اثرات دمایی بصورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{yy}^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \end{bmatrix} + [B] \begin{bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{bmatrix} - [T^*] \Delta T \quad \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [B] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{yy}^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \end{bmatrix} + [D] \begin{bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{bmatrix} - [T^{**}] \Delta T,$$

تنش و کرنش حرارتی

$$[T^*] = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N [(\bar{Q}_{11})_j(\alpha_{xx})_j + (\bar{Q}_{12})_j(\alpha_{yy})_j + (\bar{Q}_{16})_j(\alpha_{xy})_j] (h_j - h_{j-1}) \\ \sum_{j=1}^N [(\bar{Q}_{12})_j(\alpha_{xx})_j + (\bar{Q}_{22})_j(\alpha_{yy})_j + (\bar{Q}_{26})_j(\alpha_{xy})_j] (h_j - h_{j-1}) \\ \sum_{j=1}^N [(\bar{Q}_{16})_j(\alpha_{xx})_j + (\bar{Q}_{26})_j(\alpha_{yy})_j + (\bar{Q}_{66})_j(\alpha_{xy})_j] (h_j - h_{j-1}) \end{bmatrix}$$
$$[T^{**}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N [(\bar{Q}_{11})_j(\alpha_{xx})_j + (\bar{Q}_{12})_j(\alpha_{yy})_j + (\bar{Q}_{16})_j(\alpha_{xy})_j] (h_j^2 - h_{j-1}^2) \\ \sum_{j=1}^N [(\bar{Q}_{12})_j(\alpha_{xx})_j + (\bar{Q}_{22})_j(\alpha_{yy})_j + (\bar{Q}_{26})_j(\alpha_{xy})_j] (h_j^2 - h_{j-1}^2) \\ \sum_{j=1}^N [(\bar{Q}_{16})_j(\alpha_{xx})_j + (\bar{Q}_{26})_j(\alpha_{yy})_j + (\bar{Q}_{66})_j(\alpha_{xy})_j] (h_j^2 - h_{j-1}^2) \end{bmatrix}$$

تنش و کرنش حرارتی

- در صورت عدم وجود نیروهای خارجی ($[N]=[M]=0$) به دلیل اثرات دمایی (تنش های حرارتی)، در صفحه میانی کرنش ها و انحناهایی می تواند وجود داشته باشد.
- وقتی یک چندلایه کامپوزیتی از دمای پخت تا دمای محیط سرد می شود، به دلیل رفتار حرارتی متفاوت لایه ها، تنش های حرارتی قابل توجهی در قطعه بوجود می آید. برخی مواقع این تنش های حرارتی باعث ایجاد ترک های بین لایه ای می شود.
- به عنوان نمونه در چندلایه $[0/90]_s$ اگر لایه ها آزاد بودند، لایه 0 در جهت x بسیار کمتر از لایه 90 منقبض می شد. این قضیه در جهت y برعکس است. اما چسبندگی لایه ها باعث می شود که تغییر شکلها یکسان باشد. لذا تنشهای پشماند در لایه 0 فشاری و در لایه 90 کششی است.

ضرایب انبساط حرارتی برای چندلایه متقارن متعادل

○ برای چندلایه متقارن متعادل داریم:

$$A_{16} = A_{26} = 0 \quad [B] = [0]$$

○ فرض میکنیم نیروی خارجی وجود ندارد:

$$[N] = [M] = [0]$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{\circ} \\ \varepsilon_{yy}^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} T_1^* \\ T_2^* \\ T_3^* \end{bmatrix} \Delta T, \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A_{11}\varepsilon_{xx}^{\circ} + A_{12}\varepsilon_{yy}^{\circ} &= T_1^* \Delta T, \\ A_{12}\varepsilon_{xx}^{\circ} + A_{22}\varepsilon_{yy}^{\circ} &= T_2^* \Delta T, \\ A_{66}\gamma_{xy}^{\circ} &= T_3^* \Delta T. \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{xx}^{\circ} = \frac{A_{22}T_1^* - A_{12}T_2^*}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \Delta T,$$

$$\varepsilon_{yy}^{\circ} = \frac{A_{11}T_2^* - A_{12}T_1^*}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \Delta T.$$

$$\alpha_{xx} = \frac{\varepsilon_{xx}^{\circ}}{\Delta T} = \frac{A_{22}T_1^* - A_{12}T_2^*}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2},$$

$$\alpha_{yy} = \frac{\varepsilon_{yy}^{\circ}}{\Delta T} = \frac{A_{11}T_2^* - A_{12}T_1^*}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2},$$

$$\alpha_{xy} = \frac{\gamma_{xy}^{\circ}}{\Delta T} = \frac{T_3^*}{A_{66}}.$$

مثال

○ انحنای یک دولایه نامتقارن [0/90] بعد از خنک شدن از دمای پخت تا دمای محیط را تعیین کنید. تقویت کننده الیاف کربن T-300 و زمینه اپوکسی می باشد. ضریب انبساط خطی برای تک لایه کامپوزیتی بصورت زیر است:

$$\alpha_{11} = -0.5 \times 10^{-6} \text{ m/m per } ^\circ\text{C} \quad \alpha_{22} = 12 \times 10^{-6} \text{ m/m per } ^\circ\text{C}$$

ضخامت هر لایه t است. ثوابت الاستیک الیاف و ماتریس عبارتست از:

$$E_f = 220 \text{ GPa}$$

$$\nu_f = 0.2$$

$$E_m = 3.6$$

$$\nu_m = 0.35$$

جواب

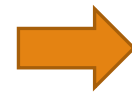
○ ثوابت الاستیک تک لایہ بصورت زیر تعیین می شود:

$$E_{11} = (220)(0.6) + (3.6)(1 - 0.6) = 133.44 \text{ GPa},$$

$$E_{22} = \frac{(220)(3.6)}{(220)(1 - 0.6) + (3.6)(0.6)} = 8.78 \text{ GPa},$$

$$G_f = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)} = \frac{220}{2(1 + 0.2)} = 91.7 \text{ GPa},$$

$$G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)} = \frac{3.6}{2(1 + 0.35)} = 1.33 \text{ GPa}.$$



$$\nu_{12} = (0.2)(0.6) + (0.35)(1 - 0.6) = 0.26,$$

$$\nu_{21} = \frac{8.78}{133.44}(0.26) = 0.017.$$

$$G_{12} = \frac{(91.7)(1.33)}{(91.7)(1 - 0.6) + (1.33)(0.6)} = 3.254 \text{ GPa}.$$

ادامه جواب

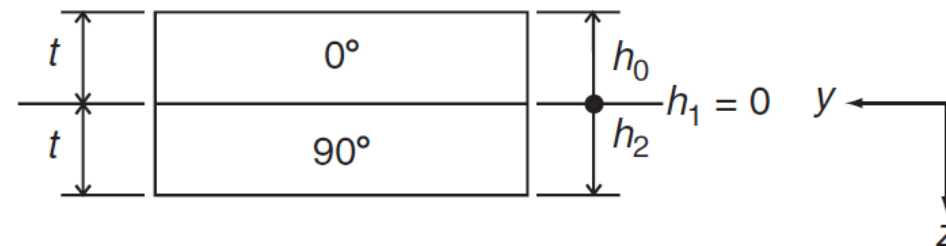
○ در مثال اسلاید های قبل ماتریس سفتی این لایه های 0° و 90° درجه بصورت زیر بدست آمد:

$$[Q]_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 134.03 & 2.29 & 0 \\ 2.29 & 8.82 & 0 \\ 0 & 0 & 3.254 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ N/m}^2, \quad [Q]_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 8.82 & 2.29 & 0 \\ 2.29 & 134.03 & 0 \\ 0 & 0 & 3.254 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ N/m}^2.$$

○ گام اول: ماتریس های $[A]$ ، $[B]$ و $[D]$ با در نظر گرفتن $h_0 = -t$ ، $h_1 = 0$ ، and $h_2 = t$ بصورت زیر تعیین می شود:

$$[A] = \begin{bmatrix} 142.85 & 4.58 & 0 \\ 4.58 & 142.85 & 0 \\ 0 & 0 & 6.508 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ t N/m}, \quad [B] = \begin{bmatrix} -62.605 & 0 & 0 \\ 0 & 62.605 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ t}^2 \text{ N},$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 47.62 & 1.53 & 0 \\ 1.53 & 47.62 & 0 \\ 0 & 0 & 2.17 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ t}^3 \text{ N m}.$$



ادامه جواب

○ گام دوم: تعیین ماتریس های $[T^*]$ و $[T^{**}]$

$$T_1^* = [(\bar{Q}_{11})_1(\alpha_{xx})_1 + (\bar{Q}_{12})_1(\alpha_{yy})_1](0 + t) \\ + [(\bar{Q}_{11})_2(\alpha_{xx})_2 + (\bar{Q}_{12})_2(\alpha_{yy})_2](t - 0).$$

$$(\alpha_{xx})_1 = (\alpha_{yy})_2 = \alpha_{11} = -0.5 \times 10^{-6} \text{ m/m per } ^\circ\text{C} \\ (\alpha_{xx})_2 = (\alpha_{yy})_1 = 12 \times 10^{-6} \text{ m/m per } ^\circ\text{C},$$


$$T_1^* = [(134.03)(-0.5) + (2.29)(12)](10^9)(10^{-6})t \\ + [(8.82)(12) + (2.29)(-0.5)](10^9)(10^{-6})t \\ = 65.16 \times 10^3 t \text{ N/m}^\circ\text{C}.$$

○ به همین ترتیب سایر المانهای ماتریس را بدست می آوریم:

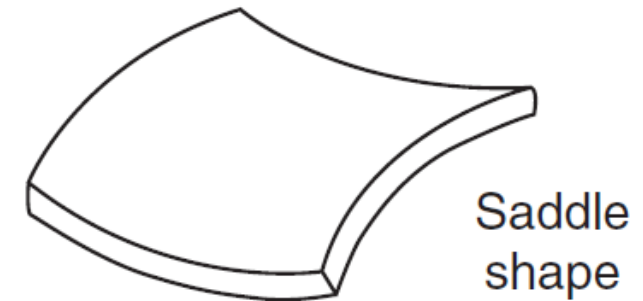
$$[T^*] = \begin{bmatrix} 65.16 \\ 65.16 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^3 t \text{ N/m}^\circ\text{C},$$

$$[T^{**}] = \begin{bmatrix} 72.12 \\ -72.12 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^3 t^2 \text{ N/}^\circ\text{C}.$$

ادامه جواب

○ گام سوم: تعیین ماتریس های انحنای چندلایه

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + [B] \begin{bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 65.16 \\ 65.16 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^3 t \Delta T,$$
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [B] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + [D] \begin{bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 72.12 \\ -72.12 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^3 t^2 \Delta T,$$



$$[k] = [C_1][T^*] + [D_1][T^{**}],$$

$$[C_1] = \begin{bmatrix} 0.0218 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0218 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-9} t^{-2} \frac{1}{\text{N}},$$

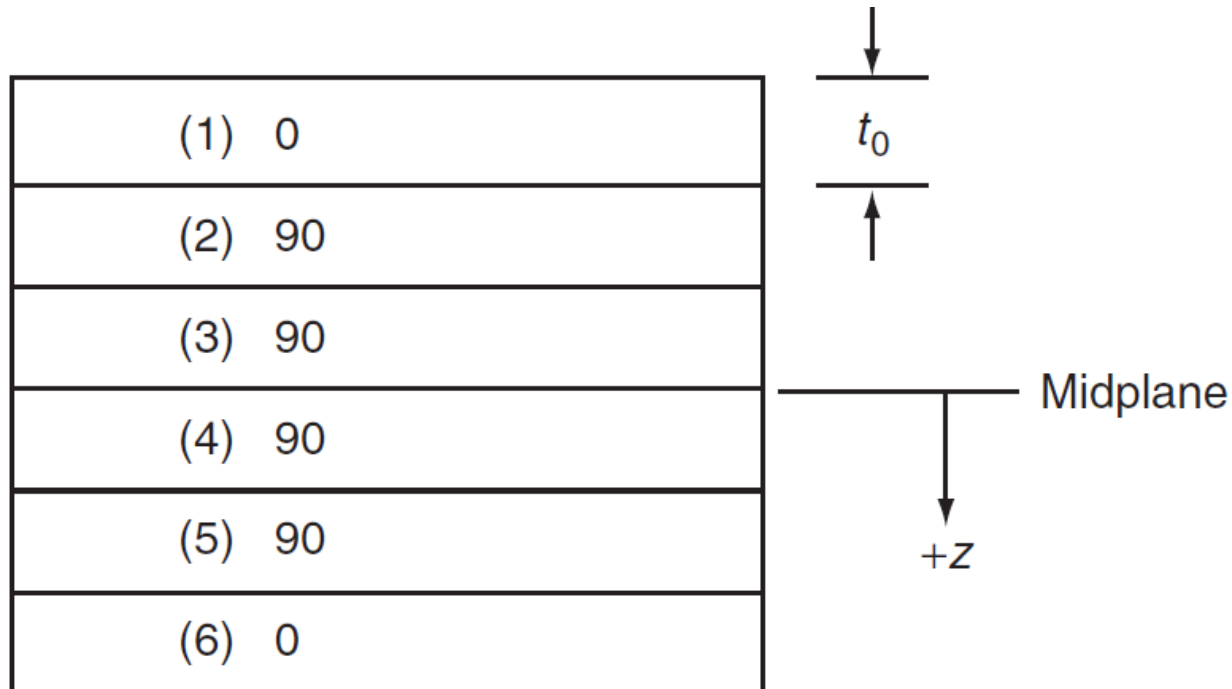
$$[D_1] = \begin{bmatrix} 0.0497 & -0.0016 & 0 \\ -0.0016 & 0.0497 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4608 \end{bmatrix} 10^{-9} t^{-3} \frac{1}{\text{Nm}}.$$



$$k_{xx} = -k_{yy} = 5.119 \times 10^{-6} t^{-1} \Delta T \text{ per m},$$
$$k_{xy} = 0.$$

مثال

○ تنش های پسماند ایجاد شده به دلیل سرد شدن از دمای پخت $T_i = 190^\circ\text{C}$ تا دمای $T_f = 23^\circ\text{C}$ برای چند لایه $[0/90_2]_s$ چقدر است؟ جنس الیاف و زمینه به ترتیب کربن و اپوکسی می باشد. ضخامت هر لایه برابر با t_0 است. ثوابت الاستیک تک لایه در زیر آمده است.



$$E_{11} = 142 \text{ GPa},$$

$$E_{22} = 10.3 \text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = 0.27,$$

$$G_{12} = 7.6 \text{ GPa},$$

$$\alpha_{11} = -1.8 \times 10^{-6} \text{ per } ^\circ\text{C},$$

$$\alpha_{22} = 27 \times 10^{-6} \text{ per } ^\circ\text{C}.$$

جواب

○ گام اول: تعیین ماتریس های سفتی برای لایه های ۰ و ۹۰ :

$$[\bar{Q}]_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 142.77 & 2.796 & 0 \\ 2.796 & 10.356 & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ N/m}^2, \quad [\bar{Q}]_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 10.356 & 2.796 & 0 \\ 2.796 & 142.77 & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ N/m}^2.$$

○ گام دوم: تعیین [A]:

نکته: به دلیل متقارن بودن، $[B]=0$ می باشد و از آنجائیکه $[k]=0$ است نیازی به محاسبه $[D]$ نمی باشد.

نکته: برای چندلایه $[0/90_2]_S$ داریم: $A_{mn} = 2t_0 [(\bar{Q}_{mn})_0 + 2(\bar{Q}_{mn})_{90}]$

$$[A] = 2t_0 \begin{bmatrix} 163.48 & 8.39 & 0 \\ 8.39 & 295.90 & 0 \\ 0 & 0 & 22.8 \end{bmatrix} \times 10^9 \text{ N/m}.$$

جواب

○ گام سوم: تعیین $[T^*]$:

$$T_1^* = 2[\{(\bar{Q}_{11})_0(\alpha_{xx})_0 + (\bar{Q}_{12})_0(\alpha_{yy})_0 + 0\}(-2t_0 + 3t_0) \\ + \{(\bar{Q}_{11})_{90}(\alpha_{xx})_{90} + (\bar{Q}_{12})_{90}(\alpha_{yy})_{90} + 0\}(-t_0 + 2t_0) \\ + \{(\bar{Q}_{11})_{90}(\alpha_{xx})_{90} + (\bar{Q}_{12})_{90}(\alpha_{yy})_{90} + 0\}(0 + t_0)].$$

$$(\alpha_{xx})_0 = (\alpha_{yy})_{90} = \alpha_{11} = -1.8 \times 10^{-6} \text{ per } ^\circ\text{C} \quad (\alpha_{yy})_0 = (\alpha_{xx})_{90} = \alpha_{22} = 27 \times 10^{-6} \text{ per } ^\circ\text{C}$$

$$T_1^* = 735.32t_0 \times 10^3 \text{ N/m}^\circ\text{C}. \quad T_2^* = -176.82 t_0 \times 10^3 \text{ N/m } ^\circ\text{C} \quad T_3^* = 0$$

$$[T^*] = \begin{bmatrix} 735.32t_0 \\ -176.82t_0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \text{ N/m}^\circ\text{C}.$$

جواب

○ گام چهارم: تعیین کرنش های صفحه میانی :

از آنجائیکه هیچ نیروی خارجی وجود ندارد: $[N] = [0]$

$$[0] = [A] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + [0] - \begin{bmatrix} T_1^* \\ T_2^* \\ T_3^* \end{bmatrix} \Delta T \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.267 \\ -0.352 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \Delta T \text{ m/m.}$$

○ گام پنجم: تعیین کرنش ها در هر لایه:

از آنجائیکه $[k]=0$ ، کرنش ها در هر لایه شبیه لایه میانی است.

جواب

○ گام ششم: تعیین کرنش های حرارتی انقباضی آزاد در هر لایه :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xxf} \\ \varepsilon_{yyf} \\ \gamma_{xyf} \end{bmatrix}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} -1.8 \\ 27 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \Delta T \text{ m/m} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{xxf} \\ \varepsilon_{yyf} \\ \gamma_{xyf} \end{bmatrix}_{90^\circ} = \begin{bmatrix} 27 \\ -1.8 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \Delta T \text{ m/m}.$$

○ گام هفتم: کم کردن کرنش های حرارتی انقباضی آزاد از کرنش های مرحله پنجم برای تعیین کرنش های پسماند:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xxr} \\ \varepsilon_{yyr} \\ \gamma_{xyr} \end{bmatrix}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} (2.267 - (-1.8) \times 10^{-6} \Delta T) \\ (-0.352 - 27) \times 10^{-6} \Delta T \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.067 \\ -27.352 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \Delta T \text{ m/m}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xxr} \\ \varepsilon_{yyr} \\ \gamma_{xyr} \end{bmatrix}_{90^\circ} = \begin{bmatrix} (2.267 - 27) \times 10^{-6} \Delta T \\ (-0.352 - (-1.8)) \times 10^{-6} \Delta T \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24.733 \\ 1.448 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \Delta T \text{ m/m}.$$

جواب

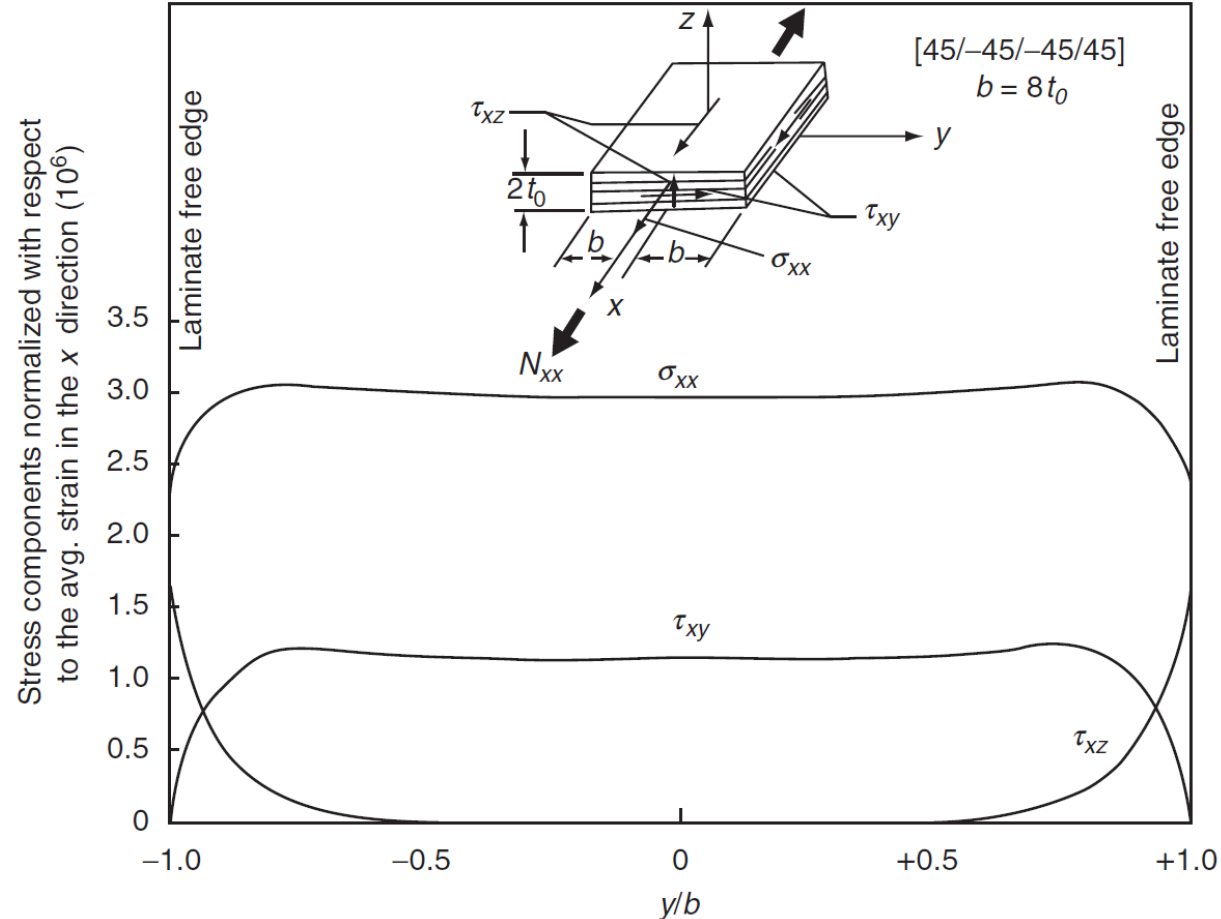
○ گام هشتم: محاسبه تنش های پسماند در هر لایه:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xxr} \\ \sigma_{yyr} \\ \tau_{xyr} \end{bmatrix}_{0^\circ} = [\bar{Q}]_{0^\circ} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xxr} \\ \varepsilon_{yyr} \\ \gamma_{xyr} \end{bmatrix}_{0^\circ} = \begin{bmatrix} 504.17 \\ -271.89 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \Delta T \text{ N/m}^2 \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xxr} \\ \sigma_{yyr} \\ \tau_{xyr} \end{bmatrix}_{90^\circ} = [\bar{Q}]_{90^\circ} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xxr} \\ \varepsilon_{yyr} \\ \gamma_{xyr} \end{bmatrix}_{90^\circ} = \begin{bmatrix} -252.087 \\ 137.550 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^3 \Delta T \text{ N/m}^2.$$

با جایگزاری $\Delta T = 23^\circ\text{C} - 190^\circ\text{C} = -167^\circ\text{C}$ داریم:

	0° Layer	90° Layer
In the fiber direction	-84.2 MPa	-22.97 MPa
In the transverse direction	45.40 MPa	42.10 MPa

تنش های بین لایه ای



○ انتقال بار بین لایه های مجاور در یک چندلایه توسط تنش های بین لایه ای مانند σ_{zz} , τ_{xz} و τ_{yz} انجام می شود.

○ چند لایه متقارن متعادل $[\pm 45]_S$ (شکل مقابل) را در نظر بگیرید:
 $A_{16} = A_{26} = 0 \quad [B] = [0]$

$$\epsilon_{xx}^o = \frac{A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} N_{xx},$$

$$\epsilon_{yy}^o = -\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} N_{xx},$$

$$\gamma_{xy}^o = 0.$$

تنش های بین لایه ای

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^o \\ \varepsilon_{yy}^o \\ 0 \end{bmatrix}$$

○ تنش ها در لایه j ام برابر است با:

○ گرچه تنشهای منتج برشی N_{xy} صفر است، هر لایه تنش برشی درون صفحه ای τ_{xy} را تحمل می کند.

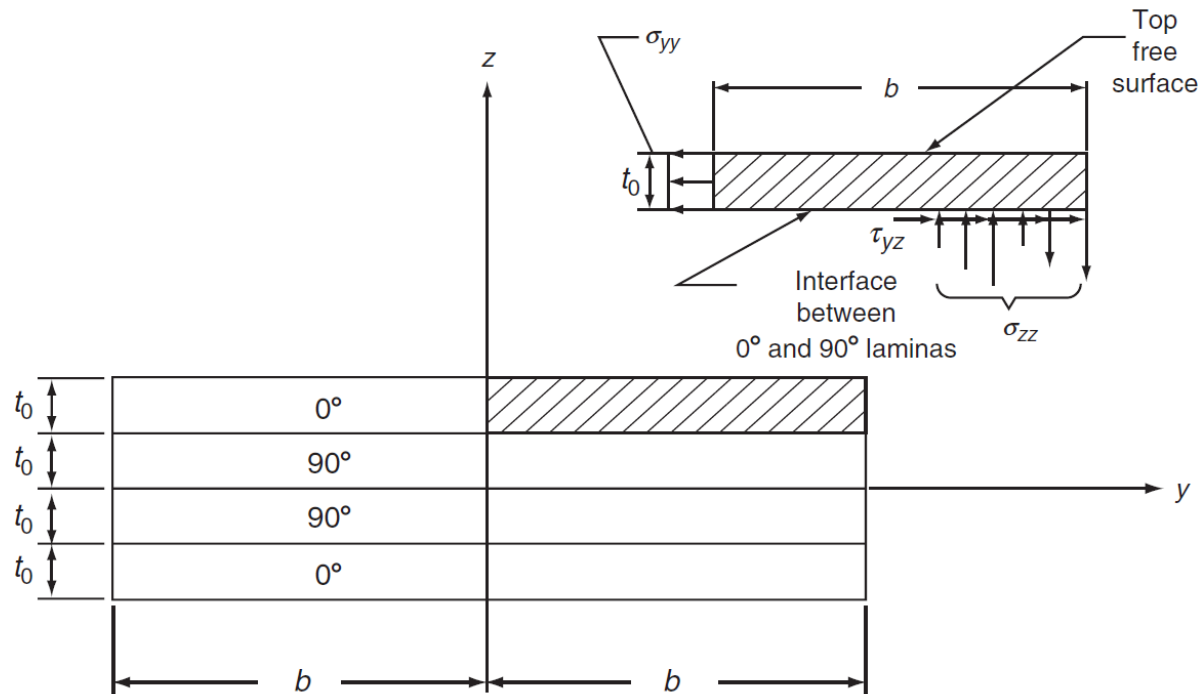
○ در مرزهای چندلایه تنش برشی درون صفحه ای صفر است. بنابراین این تنش برشی از یک مقداری درون چندلایه تا صفر در لبه چند لایه کاهش می یابد. استدلالهای مشابهی برای اثبات وجود σ_{zz} و τ_{yz} وجود دارد.

○ دلیل اساسی برای وجود تنش های بین لایه ای عدم تطابق ضریب پواسان ν_{xy} و ضرایب m_x و m_y بین لایه های مجاور است.

○ اگر لایه ها به هم متصل نبودند و می توانستند آزادانه تغییرشکل دهند، در اثر اعمال تنش در جهت x ، کرنش های عرضی ε_{yy} متفاوتی در هر لایه به دلیل ضریب پواسان متفاوت ایجاد می شد.

○

تنش های بین لایه ای



○ به دلیل اتصال لایه ها به همدیگر، کرنش عرضی برای همه باید یکسان باشد. این قید باعث ایجاد تنش نرمال σ_{yy} و تنش برشی بین لایه ای τ_{yz} می شود.

○ لذا برای یکسان شدن کرنش برشی جانبی و برشی در لایه های مجاور، تنشهای بین لایه ای باید بوجود آید.

○ این تنشها در نزدیکی لبه های آزاد به حداکثر خود رسیده و می تواند باعث ایجاد تورق (delamination) بین لایه ها می شود.

تنش های بین لایه ای

- تفاوت در ضرایب تأثیر متقابل m_{xy} تنها در صورتی که به هم چسبیده نباشند، باعث ایجاد کرنش های برشی متفاوت γ_{xy} در لایه های مختلف می شود.
- در یک لمینیت کرنشهای برشی یکسان برای همه لایه ها مستلزم ایجاد تنش برشی τ_{zx} است.
- اگر چه تعادل نیروها در جهت y توسط σ_{yy} و τ_{yz} حفظ می شود، نتایج نیرو مرتبط با σ_{yy} و τ_{yz} خطی نیستند.
- تعادل ممان حول محور x توسط تنش های بین لایه ای نرمال σ_{zz} ارضا می شود.
- تنش های بین لایه ای σ_{zz} ، τ_{xz} و τ_{yz} توسط روشهای عددی مانند اجزاء محدود بدست می آید.

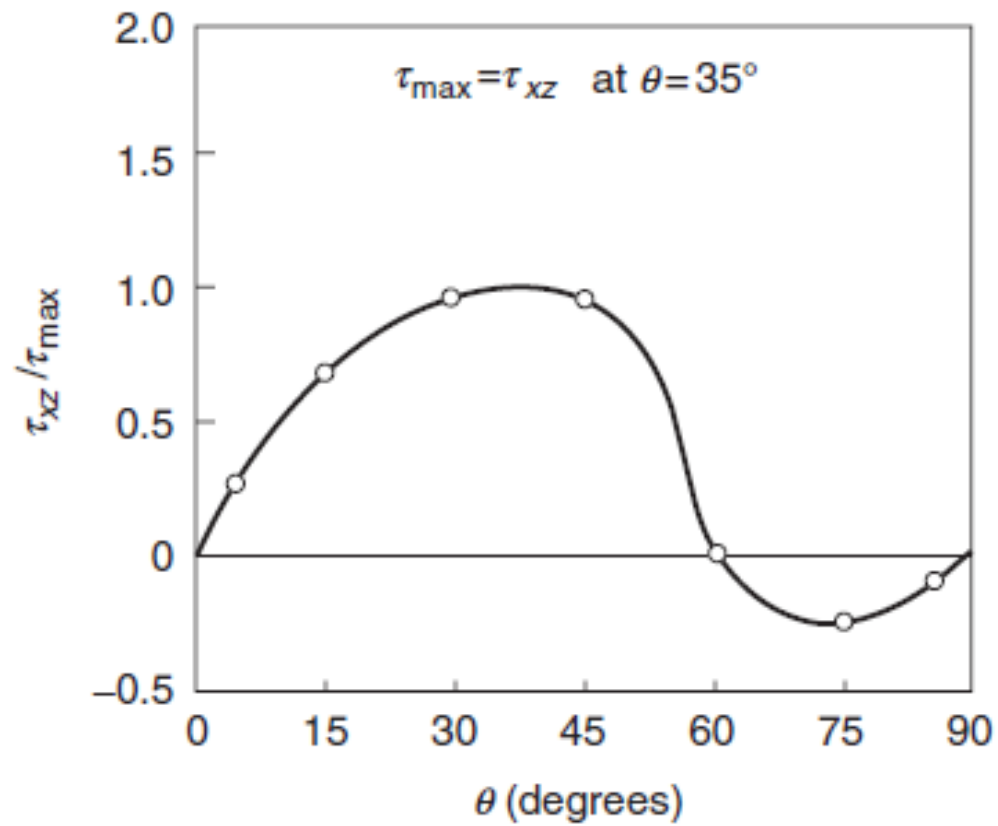
تنش های بین لایه ای

در کاربردهای عملی به نکات زیر باید توجه شود:

1. تنش های بین لایه ای در لمینیت ناشی از یکسان نبودن ضریب پواسان و ضرایب تاثیر متقابل است. اگر تفاوتی بین دو ثابت لاستیک وجود نداشته باشد، تنش های بین لایه ای نیز وجود ندارد.

2. تنش های بین لایه ای می تواند به طور قابل توجهی در ناحیه ای برابر با ضخامت لمینت در نزدیکی لبه های آزاد یک لمینیت افزایش یابد. لبه های آزاد ممکن است در مرزهای یک لمینیت، در اطراف یک برش یا سوراخ، یا در انتهای یک لوله چند لایه باشد.

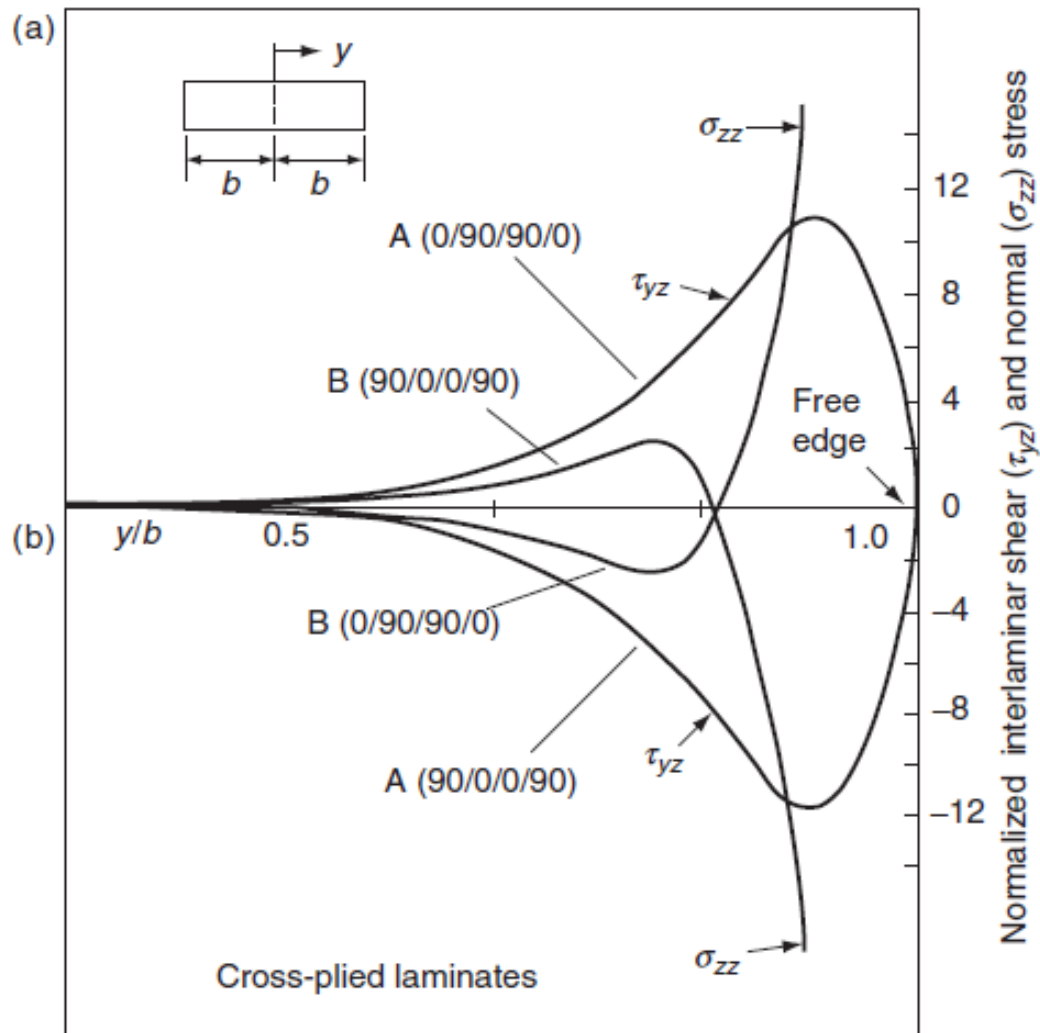
تنش های بین لایه ای



3. برای یک لمینیت $[\theta/-\theta]$ تحت کشش تک محوره،

تنش برشی τ_{xz} غالب ترین تنش بین لایه ای است. اندازه و جهت آن شدیداً به زاویه الیاف θ بستگی دارد.

تنش های بین لایه ای



4. برای یک لمینیت [0/90] تحت کشش تک محوره، تنش های τ_{yz} و σ_{zz} غالب ترین تنش های بین لایه ای است. اندازه و جهت آن شدیداً به ترتیب لایه ها دارد.