

بررسی اثر حضور بازشدگی در تحلیل ورق‌های نازک با استفاده از روش نقاط محدود

محمدصادق توکلیان جهرمی

دانشجوی دکتری، گروه مهندسی عمران، واحد اصفهان (خوراسگان)، دانشگاه آزاد اسلامی، اصفهان، ایران

محمد نجار

استادیار، گروه مهندسی عمران، واحد اصفهان (خوراسگان)، دانشگاه آزاد اسلامی، اصفهان، ایران

پرهمام معمارزاده*

دانشیار، گروه مهندسی عمران، واحد نجف‌آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف‌آباد، ایران

تاده زیرکیان

استاد، گروه مهندسی عمران و مدیریت ساخت، دانشگاه ایالتی کالیفرنیا، نورتریج، کالیفرنیا، آمریکا

parham.memarzadeh@iau.ac.ir

تاریخ دریافت: ۲۴ تیر ۱۴۰۵ تاریخ پذیرش: ۲۲ شهریور ۱۴۰۵

چکیده

تحلیل ورق‌های نازک تحت اثر نیروهای جانبی همواره مورد توجه محققین بوده است. در کنار روش اجزا محدود، امروزه روش‌های بدون شبکه نیز در تحلیل سازه‌ها رواج یافته‌اند. روش نقاط محدود از جمله روش‌های بدون شبکه خالص است که بدون نیاز به ایجاد المان و همچنین انتگرال‌گیری عددی، هزینه کمتری نسبت به روش اجزاء محدود خواهد داشت و در صورت حصول دقت کافی می‌تواند جایگزین آن شود. در تحقیق حاضر روش نقاط محدود برای تحلیل ورق‌های نازک تحت خمش در محدوده رفتاری الاستیک خطی و تغییر شکل‌های کوچک با تمرکز بر وجود بازشو در آن‌ها به کار گرفته شده است و به بررسی نقاط قوت و ضعف روش پرداخته شده است. به منظور اعمال روش نقاط محدود، ورق تحت خمش با پراکنش تعداد محدودی نقطه بر سطح آن مدل‌سازی شده است. نقاط مدل می‌توانند دارای آرایش هندسی منظم یا نامنظم باشند. همچنین بازشوها با هندسه‌های متنوع در محاسبات در نظر گرفته شده‌اند. پاسخ به‌دست‌آمده از تحلیل نقاط محدود ورق‌ها با حل دقیق آن‌ها مقایسه شده است و در صورت عدم وجود حل دقیق از نتایج اجزاء محدود جهت مقایسه استفاده شده است.

کلیدواژه‌گان: روش نقاط محدود، بازشدگی در ورق، ورق‌های نازک، روش بدون شبکه



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution- Non Commercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

این نشریه تحت قانون بین‌المللی کی‌رایت Creative Commons: BY-NC است.

۱- مقدمه

تجزیه و تحلیل صفحات نازک یکی از تلاش‌های مهم مهندسی سازه و مکانیک است، به‌ویژه به دلیل کاربرد گسترده آنها در زمینه‌های مختلف از جمله هوافضا، عمران و مهندسی مکانیک است. روش‌های سنتی برای تجزیه و تحلیل رفتار صفحه، مانند روش اجزای محدود (FEM)، به طور گسترده توسعه و اجرا شده است. با این حال، این روش‌ها اغلب بر تولید مش و ادغام عددی تکیه می‌کنند که می‌تواند عوارضی را ایجاد کند، به‌ویژه در حضور هندسه‌ها و ناپیوستگی‌های پیچیده؛ مانند نوارهای برشی یا ترک.

مطالعات اخیر تطبیق‌پذیری روش‌های بدون مش را برجسته کرده‌اند، از جمله رویکردهای مختلفی مانند هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) [۲،۱]، روش گالریکین (EFG) [۳] و روش نقاط محدود (FPM) [۵،۴]. کاربرد SPH در حل مسائل مربوط به برهمکنش سیال - سازه و توانایی آن برای مدیریت شرایط مرزی پیچیده بدون نیاز به شبکه مورد بررسی قرار گرفته است [۷]. به طور مشابه، روش EFG برای مسائل مختلف مکانیک جامدات اصلاح شده و به کار گرفته شده است که اثربخشی آن را در برخورد با مشکلات صفحه و پوسته نشان می‌دهد [۹،۸].

روش نقاط محدود (FPM) به‌عنوان یک جایگزین امیدوارکننده ظاهر می‌شود و یک روش بدون شبکه ارائه می‌کند تا فرایند تحلیل عددی را ساده می‌کند که در اصل برای کاربردهای دینامیک سیالات توسعه یافته است [۵،۴]. اصلاحاتی در نسخه اصلی روش اعمال شد تا دقت آن را افزایش داد و ناکارآمدی‌های آن را حذف نماید، زیرا ماتریس‌های اصلی دچار واگرایی نامطلوبی می‌شوند. هر دو روش اصلی و اصلاح شده برای مسائل الاستیسیته دوبعدی استفاده می‌شوند [۱۰-۱۶]. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تنها مطالعات کمی در زمینه مکانیک جامدات، به‌ویژه رفتار خمشی صفحات انجام پذیرفته است. پیشرفت‌هایی برای رفع این شکاف [۱۲،۱۱] آغاز شده است، اما چالش‌های اصلی آن، مورد توجه قرار نگرفته است؛ بنابراین به نظر می‌رسد که نیاز مبرمی به گسترش روش، به‌ویژه در شکل اصلی آن برای تجزیه و تحلیل صفحات تحت بارگذاری عرضی به وجود آید. علی‌رغم مزایای آن، تحلیل خمشی صفحات الاستیک دارای بازشو با استفاده از FPM در ادبیات موجود نسبتاً ناشناخته باقی‌مانده است.

هدف این مقاله پر کردن این شکاف با ارائه یک مطالعه جامع از روش نقاط محدود برای تحلیل ورق‌های نازک است. ورق از نظر مواد، الاستیک و خطی است و تحت بازشدگی‌های مختلف بررسی خواهد شد. شکل قوی معادله حاکم که یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم است [۱۸،۱۷] باید در هر نقطه داخلی ارضا شود و شرایط مرزی بر گره‌های مرزی حاکم است. از آنجایی که طبق معادله تعادل حاکم تنها یک درجه آزادی برای گره‌ها وجود دارد، ارضای دو جزء از شرایط مرزی در نقاط مرزی چالش اصلی است. تکنیک‌هایی برای اعمال بیش از یک شرط مرزی برای گره‌های واقع در مرزها وجود دارد. ضریب لاگرانژ [۱۹] و روش پنالتی [۲۰] دو روش شناخته شده از این روش هستند. مشابه روش تفاضل محدود برای غلبه بر این مشکل، از یک

نقطه اضافی در مجاورت هر نقطه مرزی استفاده می‌شود؛ بنابراین اولین جزء شرط مرزی استفاده از گره مرزی اصلی است و استفاده از گره اضافی متناظر آن می‌باشد [۲۱].

هدف کاوش این پیکربندی‌ها افزایش درک چگونگی تأثیر بازشدگی‌ها بر ثبات و دقت تجزیه و تحلیل FPM است. یک جنبه حیاتی از این تحقیقات شامل تعیین نحوه‌ی در نظر گرفتن نقاط درون کلود و محدوده‌ی تعداد ایده‌آل آن‌ها در کلود است که برای دستیابی به نتایج قابل اعتماد ضروری است.

این رویکرد نه تنها به توسعه روش‌های بدون مش در مکانیک جامدات کمک می‌کند، بلکه راه را برای استفاده از روش نقاط محدود در تحلیل‌های پیچیده، همچون بررسی صفحات نازک و تحلیل مسائل ناپیوسته (ترک‌ها و نوارهای برشی)، هموار می‌سازد.

۲- نظریه‌ی صفحات نازک

برای تحلیل و محاسبه توزیع تنش در صفحات نازک، معمولاً فرض می‌شود که صفحه XY منطبق بر صفحه میانی ورق قرار دارد. در این چارچوب، رفتار خمشی صفحات نازک بر اساس مجموعه‌ای از فرضیات اساسی که به فرضیات کیرشهف مشهور هستند، مدل‌سازی می‌شود. این فرضیات امکان ساده‌سازی روابط حاکم بر خمش صفحات را فراهم می‌کنند و به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

- خمز صفحه میانی در مقایسه با ضخامت صفحه کوچک فرض می‌شود. از این رو شیب‌های ناشی از تغییر شکل نیز کوچک در نظر گرفته شده و اثرات غیرخطی هندسی قابل صرف نظر کردن است.

- صفحه میانی پس از تغییر شکل خمشی به‌عنوان یک سطح بدون کرنش غشایی در نظر گرفته می‌شود. علاوه بر این، خطوطی که در حالت اولیه عمود بر صفحه میانی هستند، پس از تغییر شکل نیز مسطح باقی‌مانده و همچنان بر صفحه میانی عمود می‌مانند؛ به بیان دیگر، اثر تغییر شکل‌های برشی عرضی نادیده گرفته می‌شود.

- مؤلفه تنش عمود بر صفحه میانی در مقایسه با سایر مؤلفه‌های تنش بسیار کوچک بوده و در تحلیل قابل اغماض فرض می‌شود.

به‌کارگیری این فرضیات موجب ساده‌سازی معادلات حاکم بر خمش صفحات نازک شده و مبنای نظری بسیاری از مدل‌های تحلیلی و عددی مورد استفاده در مکانیک جامدات و مهندسی عمران را تشکیل می‌دهد.

یک المان کوچک از این صفحه را تحت بارهای جانبی در نظر گرفته شود. مقدار نیروهای خارجی جزء را p و ابعاد المان به ترتیب dx و dy در امتداد محورهای x و y در نظر گرفته می‌شود. میدان جابجایی صفحه نرمال به صفحه میانی با w نشان داده می‌شود که تابعی است نسبت به مختصات x و y . به دلیل خمش خالص، چرخش المان صفحه حول محورهای مختصات رخ داده است و می‌توان به‌صورت زیر تعیین کرد:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (۱)$$

این تغییرات زاویه‌ای که از آن‌ها به‌عنوان شیب میدان جابجایی یاد می‌شود، باعث جابجایی محوری در نقاط زیر می‌شود:

$$u = -z\theta_y, \quad (۲)$$

Q_x و Q_y ناچیز نیستند و باید در معادلات تعادل ورق در نظر گرفته شوند.

با جایگزینی مؤلفه‌های میدان تنش از رابطه‌ی (۶) در رابطه‌ی اول (۷) و محاسبه انتگرال‌گیری، مؤلفه‌های گشتاور خمشی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} M_x &= -D(\kappa_x + \nu\kappa_y) \\ &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y &= -D(\kappa_y + \nu\kappa_x) \\ &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu)\kappa_{xy} \\ &= -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (۸)$$

که در آن D یک ثابت است که به عنوان سختی خمشی ورق تعریف می‌شود.

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (۹)$$

توجه به این نکته مهم است که در حین اینکه اجزای نیروهای برشی Q_x و Q_y با تابع جابجایی w مرتبط هستند معادله تعادل نیز برقرار است.

نمودار جسم آزاد آن در شکل (۱) که لنگرها و نیروهای برشی را نشان می‌دهد، تکمیل شده است. برای سادگی و به دلیل ابعاد کوچک المان، شدت لنگرها و نیروهای برشی روی مرزها ثابت فرض می‌شود و با یک بردار منفرد به مرکز خطوط مرزی نشان داده خواهد شد. تغییرات این مقادیر از یک مرز به مرز دیگر با اعمال سری تیلور در نظر گرفته شده است.

حال با اعمال معادلات تعادل و نادیده گرفتن تک جملات کوچک آنها، سه رابطه مستقل به شرح زیر پدیدار می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sum F_z = 0 &\Rightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \end{aligned} \quad (۱۰)$$

با جایگزینی مؤلفه‌های لنگر در روابط دوم و سوم (۱۰)، مؤلفه‌های نیروی برشی به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \end{aligned} \quad (۱۱)$$

که در آن:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (۱۲)$$

در نهایت با اعمال مؤلفه‌های نیروی برشی در رابطه‌ی اول (۱۰)، معادله حاکم بر صفحات نازک را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (۱۳)$$

$$v = -z\theta_x$$

بنابراین با ترکیب روابط (۱) و (۲) و با استفاده از روابط کرنش - جابجایی، می‌توان اجزای میدان کرنش را تعیین کرد.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (۳)$$

انحنای سطح تغییر شکل باتوجه به محورهای مختصات تعریف می‌شود که می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} \kappa_x &= \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \kappa_y &= \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \kappa_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (۴)$$

معادله سوم بالا به عنوان پیچش صفحه میانی نسبت به محور z نامیده می‌شود. اکنون با جایگزینی مشتقات دوم تابع جابجایی در رابطه‌ی (۳) با اجزای خمشی تعریف شده در رابطه‌ی (۴)، روابط میزان کرنش به صورت زیر ظاهر خواهد شد.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z\kappa_x \\ \varepsilon_y &= -z\kappa_y \\ \gamma_{xy} &= -2z\kappa_{xy} \end{aligned} \quad (۵)$$

با ترکیب میدان کرنش بالا با روابط تنش - کرنش، میدان تنش در صفحات نازک را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} (\kappa_x + \nu\kappa_y) \\ &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} (\kappa_y + \nu\kappa_x) \\ &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \kappa_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (۶)$$

باتوجه به این روابط، میدان تنش به صورت خطی در امتداد محور z توزیع می‌شود و در صفحه میانی ناپدید می‌شود. نتایج مؤلفه‌های میدان تنش منجر به گشتاورهای خمشی و نیروهای برشی در امتداد مرز المان می‌شود که به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{matrix} \right\} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{matrix} \right\} z \, dz \\ \left\{ \begin{matrix} Q_x \\ Q_y \end{matrix} \right\} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left\{ \begin{matrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{matrix} \right\} dz \end{aligned} \quad (۷)$$

باید توجه داشت که اگرچه مؤلفه‌های تنش τ_{xz} و τ_{yz} با تئوری صفحات نازک خمشی نادیده گرفته می‌شوند، مؤلفه‌های نیروی برشی

عملگر ∇^4 به صورت زیر تعریف می شود:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (۱۴)$$

کاملاً واضح است که کلید یافتن پاسخ صفحات نازک حل رابطه‌ی (۱۳) است. اما با در نظر گرفتن روابط (۸) می توان رابطه‌ی زیر را داشت:

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu} = -D \nabla^2 w \quad (۱۵)$$

بنابراین باتوجه به رابطه‌ی (۱۳)، راه حل دیگری برای مسائل صفحات نازک با حل روابط دوگانه زیر امکان پذیر است:

$$\begin{aligned} \nabla^2 M &= -p \\ \nabla^2 w &= -\frac{M}{D} \end{aligned} \quad (۱۶)$$

از ترکیب میدان کرنش و روابط تنش-کرنش، میدان تنش در صفحه نازک را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1 + \nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (۱۷)$$

۳- روش نقاط محدود

روش اجزای محدود به دلیل انعطاف پذیری بالا، به طور گسترده‌ای به عنوان یک روش عددی کارآمد برای حل مسائل مختلف در مکانیک مهندسی مورد استفاده قرار گرفته است. با این حال، در کنار این مزیت مهم، فرایند مش بندی در این روش اغلب دشوار و زمان بر است. علاوه بر این، تشکیل ماتریس سختی کلی و محاسبه نیروهای گره‌ای نیز از جمله مراحل محاسباتی پرهزینه در این روش محسوب می شوند. به منظور غلبه بر این محدودیت‌ها، طی دهه‌های اخیر مجموعه‌ای از روش‌های عددی جدید توسعه یافته‌اند که به طور کلی با عنوان روش‌های بدون شبکه شناخته می شوند.

ایده اصلی در این روش‌ها حذف نیاز به مش بندی در مدل سازی مسائل مکانیکی است. با این حال، برخی از روش‌های این خانواده برای انجام انتگرال گیری عددی همچنان به یک مش پس زمینه نیاز دارند. بر این اساس، روش‌های بدون شبکه را می توان به دودسته اصلی تقسیم کرد. دسته نخست شامل روش‌هایی است که از مش پس زمینه برای انتگرال گیری عددی استفاده می کنند. در این روش‌ها، معادلات حاکم بر اساس فرمولاسیون ضعیف گسسته سازی می شوند؛ از این رو، بروز مشکلاتی نظیر تکنیکی ماتریس‌های سیستم کمتر رخ داده و در بسیاری از موارد دقت نتایج نیز مناسب تر است. لازم به ذکر است که اگرچه این روش‌ها از نوعی مش استفاده می کنند، اما الزامات و محدودیت‌های مش بندی در آن‌ها به مراتب کمتر از روش اجزای محدود است. از جمله روش‌های شاخص در این دسته می توان به هیدرودینامیک ذرات هموار [۱] و روش گالریکین بدون المان [۳] اشاره کرد.

دسته دوم شامل روش‌هایی است که بدون استفاده از هرگونه شبکه عمل می کنند و معمولاً به عنوان روش‌های بدون شبکه شناخته می شوند. در این روش‌ها، معادلات حاکم در فرم قوی بر مجموعه‌ای از

نقاط گسسته اعمال شده و نیاز به انتگرال گیری عددی حذف می شود. حذف کامل مش موجب می شود فرایند ایجاد مدل مکانیکی بسیار ساده تر گردد و در صورت عدم نیاز به انتگرال گیری عددی، سرعت محاسبات در مقایسه با روش‌های دسته اول و همچنین روش اجزای محدود افزایش یابد. با این حال، در این دسته از روش‌ها احتمال مواجهه با ماتریس‌های منفرد بیشتر بوده و ممکن است دقت نتایج کاهش یابد. روش نقاط محدود [۴، ۵، ۶] از مهم ترین روش‌های این گروه به شمار می رود.

در این مقاله حل صفحات نازک با استفاده از روش نقاط محدود ارائه شده است. مدل تحلیلی صفحه با پخش مجموعه‌ای از نقاط در صفحه میانی ایجاد می شود و فرم قوی حاکم بر روابط (۱۳) یا (۱۶) برآورده می شود.

اجرای معادلات حاکم بر نقاط ابتدا نیاز به تقریب توابع اصلی w در همسایگی نقاط دارد؛ بنابراین برای هر نقطه یک ناحیه نسبتاً کوچک در اطراف نقطه که دارای تعداد کافی گره همسایه آن است ایجاد می شود. منطقه کلود نامیده می شود و گره اصلی که ابر برای آن ایجاد می شود، گره اصلی نامیده می شود. به طور کلی یک تابع u بر روی ناحیه کلود با استفاده از روش حداقل مربعات وزنی تقریب می شود. در این رویکرد تابع تقریب $\hat{u}$ به صورت ایجاد می شود.

$$\hat{u} = p^T a \quad (۱۸)$$

که در آن p بردار تک جمله‌هایی است که به طور کامل یا حداقل به طور متقارن از مثلث پاسکال انتخاب شده است. برای تک جملات کامل مرتبه دوم، این بردار به صورت زیر است:

$$p^T = \{1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2\} \quad (۱۹)$$

در این تحقیق تعداد تک جمله‌ها ۱۵ در نظر گرفته شده است که بردار a در (۱۸) بردار مجهولات است. مقادیر تقریبی تابع در گره‌های درون کلود با قراردادن اجزای مختصات آنها در رابطه‌ی (۱۸) به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\hat{u}_i = p_i^T a \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (۲۰)$$

در رابطه‌ی بالا p_i^T بردار تک جمله‌ها نسبت به نقطه i در کلود است، $\hat{u}_i$ مقدار تقریبی تابع u در این نقطه و n تعداد کل گره‌ها در کلود است.

با بازنویسی ماتریسی رابطه‌ی (۲۰)، بردار مقادیر تقریبی گره به صورت زیر حاصل می شود:

$$\hat{u} = P^T a \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (۲۱)$$

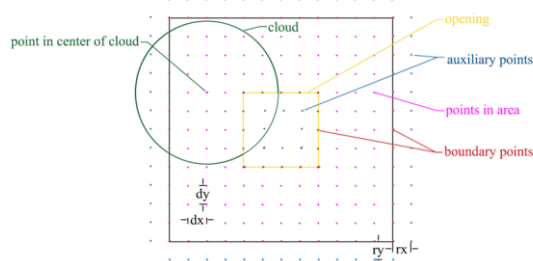
که در آن P^T ماتریسی است که ردیف آن شامل p_i^T و $\hat{u}$ بردار مقادیر تقریبی گره است.

برای اینکه تابع تقریبی به تابع u نزدیک شود، ابتدا باید یک شاخص خطا شناسایی شود؛ بنابراین تفاوت بین مقادیر تابع u و مقادیر تابع تقریبی $\hat{u}$ در نقاط کلود به عنوان باقیمانده در نظر گرفته می شود و مجموع مجذور باقیمانده بر نقاط کلود به عنوان شاخص خطا در نظر گرفته می شود. برای ایجاد تضاد منطقی بین گره‌ها، مجذور باقیمانده در نقاط در یک وزن ضرب می شود. مقدار وزن در موقعیت گره اصلی برابر

و استفاده از گره‌های اضافی. برای این مقاله روش سوم اتخاذ شده است. در این روش نزدیک به هر گره مرزی یک گره اضافی در خارج از مدل قرار می‌گیرد. این گره اضافی همراه با گره مرزی اصلی مانند یک گره مرزی منحصربه‌فرد با دو درجه آزادی عمل می‌کند و هر کدام یکی از شرایط مرزی را برآورده می‌کند. این روش دقیقاً مشابه آنچه در روش تفاضل محدود اتفاق افتاد است.

۴- حل مثال‌های عددی

در این بخش مجموعه‌ای از مثال‌ها ارائه گردیده. انتخاب هر مثال و نوع ارائه‌ی آن به دلیل بررسی موضوع خاصی است. قبل از ارائه‌ی مثال نیاز است در مورد چگونگی ارضاکردن شرایط مرزی بحث شود. در شکل (۱) محل در نظر گرفتن نقاط کمکی مشخص شده است. به‌طور کلی در تمام حالات مرزی، نیاز است دو شرط ارضا گردد. بنابر این یکی از شروط در نقاط مرزی و دیگری در نقطه‌ی کمکی معادل آن در نظر گرفته شده است.



شکل ۱- محل قرار گرفتن نقاط کمکی

r_x و r_y به ترتیب فاصله‌ی افقی و عمودی نقاط کمکی تا نقطه‌ی مرزی معادل آن است. d_x و d_y نیز به ترتیب فاصله‌ی افقی و عمودی نقاط روی ورق است. در مثال‌های حل شده در این بخش فاصله‌های افقی و عمودی با هم برابرند ($r_x = r_y$ و $d_x = d_y$). مشخصات عمومی مثال‌های حل شده در این تحقیق، در جدول (۱) بیان شده است. برای درک بهتر پارامترهای بیان شده می‌توان به شکل (۲) رجوع کرد.

جدول ۱- مشخصات ورق

ابعاد ورق (m)	تعداد چندجمله‌ای	نسبت پواسون (ν)	نیرو q (kN)	ضخامت ورق (m)	مدول الاستیسیته E (kN/m ²)
۱×۱	۱۵	۰/۳	-۱	۰/۰۰۰۱	۱×۱۰^۶

۴-۱- مثال اول

یک ورق مربع‌شکل به ضلع $a = 1m$ که در هر چهار انتها به کمک تکیه‌گاه ساده نگاه‌داشته شده است. مطابق شکل (۲)، فرض می‌شود که بار گسترده یکنواخت با مقدار واحد (kN/m^2) عمود بر سطح آن وارد شود. بازشو موجود در ورق به‌صورت دایره‌ای و با شعاع ۲۰ cm در نظر گرفته شده است.

با ۱ است و باتوجه به فاصله از گره اصلی به طور یکنواخت کاهش می‌یابد؛ بنابراین شاخص خطا با معادله زیر نوشته می‌شود:

$$J = \sum_{i=1}^n w(x_i)(\hat{u}_i - u_i)^2 \quad (22)$$

که در آن J شاخص خطا است، u_i مقدار تابع u در گره i و $w(x_i)$ وزن در آن نقطه است. با جایگزینی (۲۰) در (۲۲) شاخص خطا را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$J = \sum_{i=1}^n w(x_i)(p_i^T a - u_i)^2 \quad (23)$$

به حداقل رساندن شاخص خطا، مشتق آن باتوجه به مؤلفه‌های بردار a باید برابر با صفر باشد

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \quad (24)$$

که معادله زیر برای بردار a به دست می‌آید:

$$a = A^{-1}B\bar{u} \quad (25)$$

در رابطه‌ی بالا، $\bar{u}$ بردار مقادیر گره‌ای تابع هدف u است، ماتریس‌های A و B به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A = \sum_{i=1}^n w(x_i)p_i p_i^T \quad (26)$$

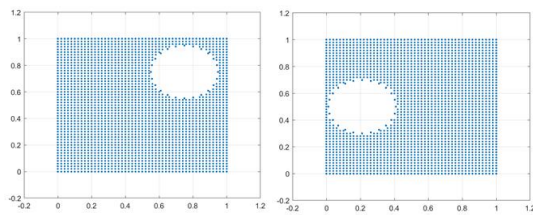
$$B = [w(x_1)p_1 \quad w(x_2)p_2 \quad \dots \quad w(x_n)p_n] \quad (27)$$

در نهایت با جایگزینی بردار a از رابطه (۲۵) در (۱۸) بهترین تابع تقریب به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\hat{u} = p^T A^{-1} B \bar{u} \quad (28)$$

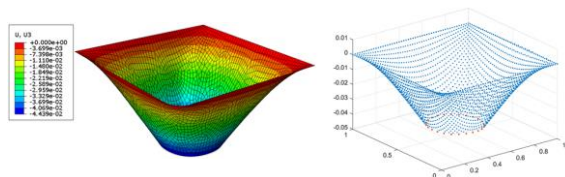
اکنون دو راه مختلف برای حل مسائل صفحه نازک وجود دارد. اولین راه تقریب روابط جفتی (۱۶) است. این معادلات عموماً برای صفحه‌ای با مرزهای ساده سازگار هستند. برای حل روابط (۱۶) ابتدا پارامتر گشتاور M باید بر روی کلودها درون‌یابی شود و در اولین معادله در رابطه‌ی (۱۶) قرار گیرد. سپس میدان جابجایی w درون‌یابی شده و در رابطه‌ی دوم (۱۶) قرار می‌گیرد. در نهایت مقادیر گره‌ی میدان جابجایی به دست می‌آید. همان‌طور که در بالا توضیح داده شد در این روش دو معادله دیفرانسیل مجزا با دو پارامتر مجهول در هر گره برآورده می‌شود؛ بنابراین رفتار مدل مشابه مدلی با دو درجه آزادی برای گره‌ها است. واضح است که در این حالت هر دو شرایط مرزی دیریکله و نیومن می‌توانند مشابه فرایند اجزای محدود اعمال شوند.

راه دوم برای حل مسائل صفحه نازک، در نظر گرفتن رابطه (۱۳) به‌عنوان معادله حاکم است. این معادله شکل کلی معادله تعادل است و بدون هیچ محدودیتی برای صفحات نازک با شرایط مرزی دلخواه قابل اعمال است. تابع جابجایی w باید درون‌یابی شود و جایگزین رابطه‌ی (۱۳) شود. از آنجایی که تنها یک درجه آزادی برای گره‌ها وجود دارد، اجرای شرایط مرزی چالش اصلی است. راه‌های مختلفی برای غلبه بر این چالش وجود دارد؛ مانند ضرب‌کننده‌های لاگرانژ، تابع پنالتی

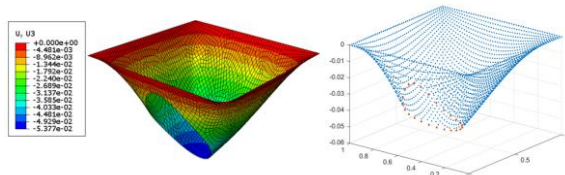


شکل ۳- نقاط در نظر گرفته شده در ورق و ناحیه‌ی بازشو

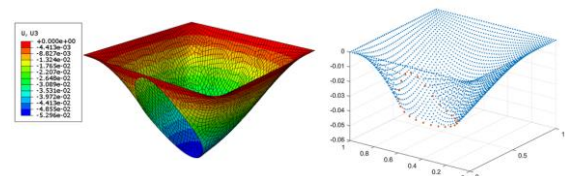
پس از تقریب جواب، به روش نقاط محدود و مقایسه‌ی آن با اجزا محدود می‌توان دریافت که رفتار ورق در هر دو روش با هم یکسان است این موضوع را می‌توان در شکل (۴) به‌وضوح دید.



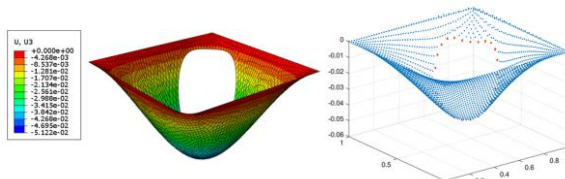
(الف)



(ب)



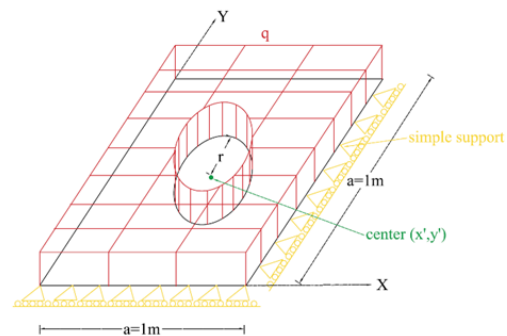
(ج)



(د)

شکل ۴- تقریب تغییر شکل ورق مورد بحث، با استفاده از روش نقاط محدود و اجزا محدود (سمت راست نقاط محدود و سمت چپ اجزا محدود)

در شکل‌های (۵) نمودار جابجایی ورق در حالت‌های مختلف و در امتداد خط $x = 0.5 \text{ m}$ رسم شده است.



شکل ۲- ورق دارای بازشدگی دایره‌ای و بار گسترده‌ی یکنواخت

شرایط تکیه‌گاهی مفصلی یا ساده به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} x=0, x=a \rightarrow w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \\ y=0, y=a \rightarrow w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

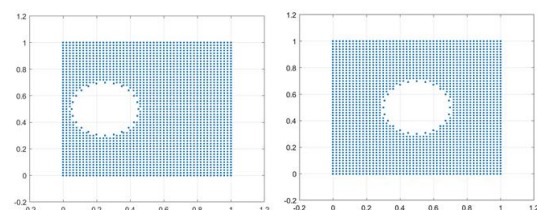
شرایط مرز آزاد در روابط (۲۹) بیان شده است:

$$\begin{aligned} x=0, x=a \rightarrow v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0, \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} = 0 \\ y=0, y=a \rightarrow v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0, \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

در این مثال، بازشدگی جابه‌جا شده و جابه‌جایی تحت مکان‌های مختلف بازشدگی محاسبه شده است. ضرایب و پارامترهای مربوط به ورق و مختصات مرکز بازشدگی در جدول (۲) بیان شده است. نقاط در نظر گرفته شده و ناحیه‌ی بازشدگی در شکل (۳) مشخص است.

جدول ۲- مشخصات ورق و مکان دقیق بازشدگی

حالت	نقاط کلود	شعاع بازشدگی r (m)	x' (m)	y' (m)	ماکسیموم FEM (m)	ماکسیموم FPM (m)
الف	۶۰	۰/۲	۰/۵	۰/۵	-۰/۰۴۴۳۹	-۰/۰۴۴۲۱
ب	۶۰	۰/۲	۰/۲۵	۰/۵	-۰/۰۵۳۷۷	-۰/۰۵۴۰۲
ج	۶۰	۰/۲	۰/۲۱	۰/۵	-۰/۰۵۲۹۶	-۰/۰۵۵۳۱
د	۶۰	۰/۲	۰/۷۵	۰/۷۵	-۰/۰۵۱۲۲	-۰/۰۵۲۴۴



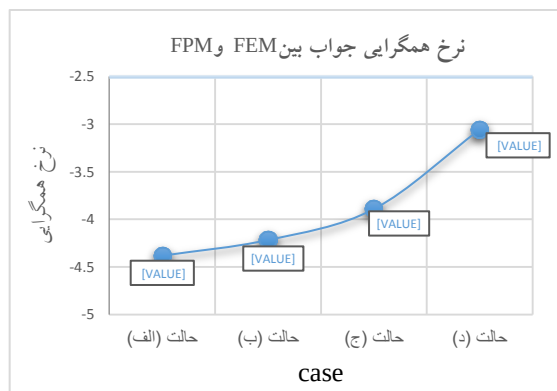
(ب)

(الف)

شکل (۶) میزان همگرایی جواب بین روش نقاط محدود و اجزا محدود را در تمام نقاط نشان می‌دهد که با استفاده از رابطه‌ی زیر بدست آمده:

$$\text{Convergence rate} = \log \sum \frac{(w_{FPM} - w_{FEM})^2}{n} \quad (31)$$

که در آن n تعداد نقاط مورد بررسی در هر دو روش است.

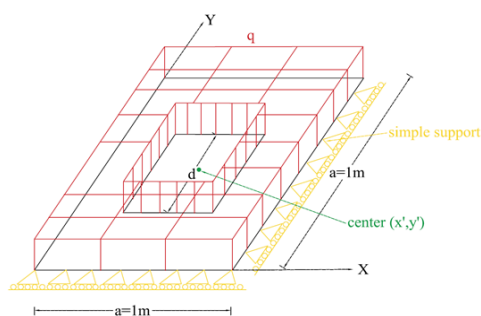


شکل ۶- میزان همگرایی جواب بین روش نقاط محدود و اجزا محدود را نشان می‌دهد

با بررسی شکل (۶) می‌توان دریافت، حالت (الف) که بازشدگی در وسط ورق قرار دارد، بیشترین همگرایی جواب را دارد. با نزدیک شدن بازشدگی به مرز، درصد خطا افزایش می‌یابد (حالت ب و ج). حالت (د) کمترین همگرایی جواب را داراست. با نزدیک شدن بازشدگی به گوشه‌های مرز، ماتریس $p^T A^{-1} B$ بدست آمده به روش نقاط محدود واگرا خواهد شد.

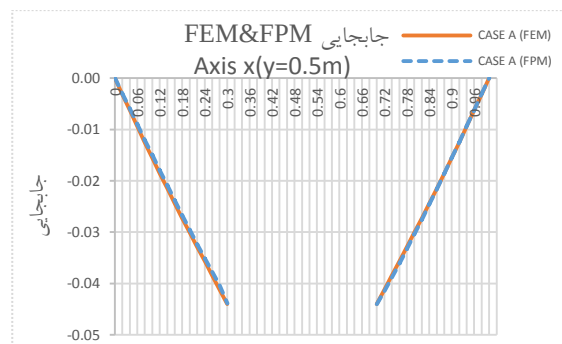
۴-۲- مثال دوم

در این مثال یک ورق مربع شکل به ضلع $a = 1m$ که در هر چهار انتها به کمک تکیه‌گاه ساده نگاه داشته شده است. مطابق شکل (۷)، فرض می‌شود که بار گسترده یکنواخت با مقدار واحد (kN/m^2) عمود بر سطح آن وارد شود. بازشو موجود در ورق به صورت مربع با ابعاد 40×40 در نظر گرفته شده است.

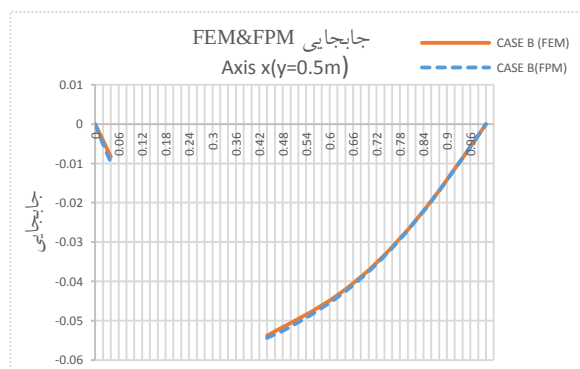


شکل ۷- ورق دارای بازشدگی دایره‌ای و بار گسترده یکنواخت

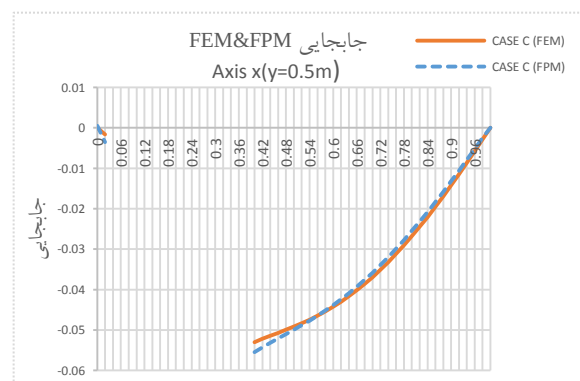
جابجایی این ورق در دو حالت بررسی خواهد شد. حالت اول با در نظر گرفتن نقاط گوشه‌ی بازشو و حالت دوم بدون در نظر گرفتن نقاط گوشه‌ی بازشو. هر دو حالت در شکل (۸) مشخص است.



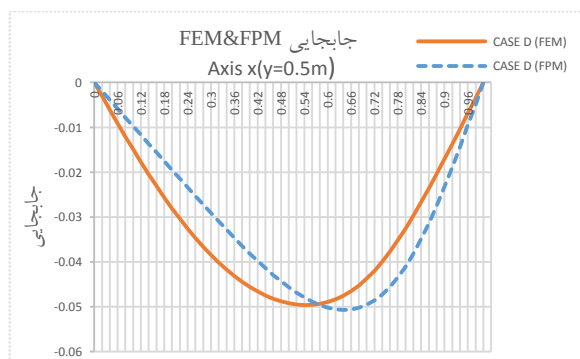
(الف)



(ب)



(ج)



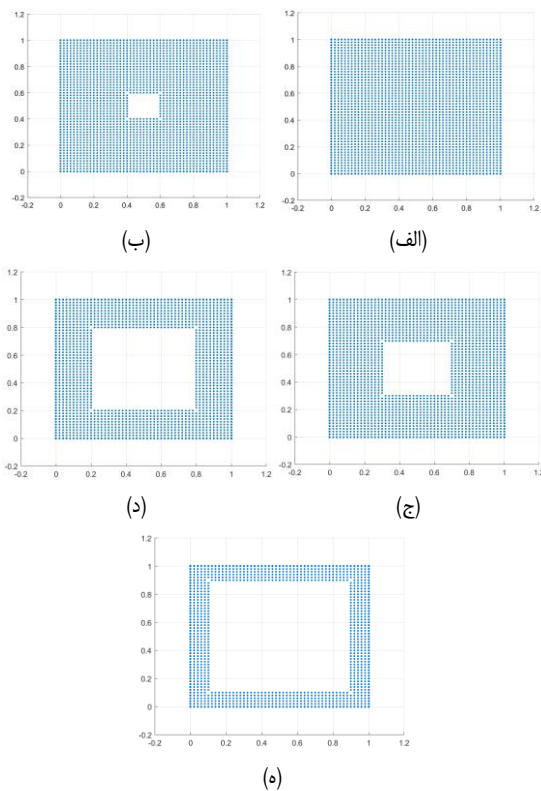
(د)

شکل ۸- مقایسه‌ی جابجایی ورق به روش نقاط محدود و اجزا محدود، در امتداد خط $x = 0.5m$

بازشو تقریباً ۱/۵ برابر نقاط واقع در همسایگی آن‌ها که در فاصله دورتری از گوشه بازشو قرار گرفته‌اند ارزیابی می‌شود.

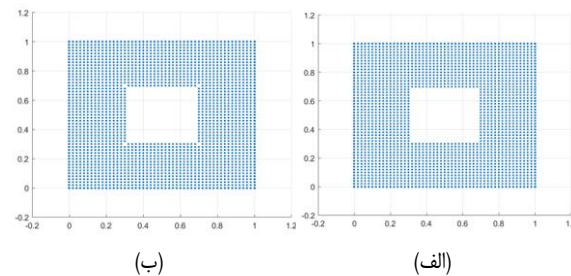
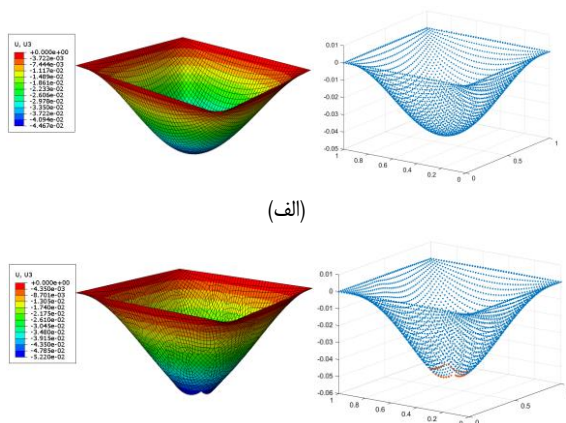
۴-۳- مثال سوم

مشخصات این مثال مانند مثال ۲ در نظر گرفته شده است. بازشو موجود در ورق به صورت مربع با ابعاد متغیر بررسی خواهد شد که در شکل (۱۱) نشان داده شده است.



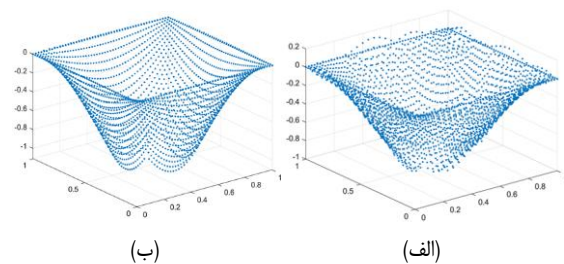
شکل ۱۱- محل در نظر گرفتن نقاط و ابعاد بازشدگی. (الف) $d = 0$. (ب) $d = 0.2$. (ج) $d = 0.4$. (د) $d = 0.6$. (ه) $d = 0.8$.

رفتار ورق با روش نقاط محدود و اجزا محدود در شکل (۱۲) قابل مشاهده است. با بررسی همه‌ی حالت‌ها می‌توان دریافت که رفتار ورق در هر دو روش با هم یکسان است.



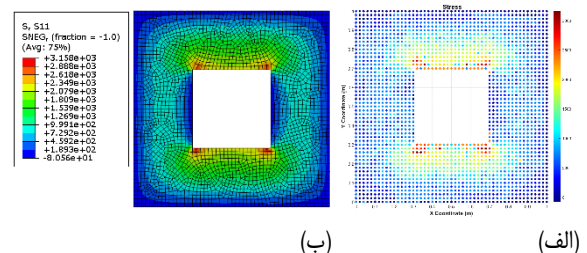
شکل ۸- (الف) ورق با در نظر گرفتن نقاط گوشه (ب) بدون در نظر گرفتن نقاط گوشه

برای هر دو حالت الف و ب نشان داده شده در شکل (۸)، تغییر شکل حاصل از تقریب جواب به روش نقاط محدود، در شکل (۹) نشان داده شده است.



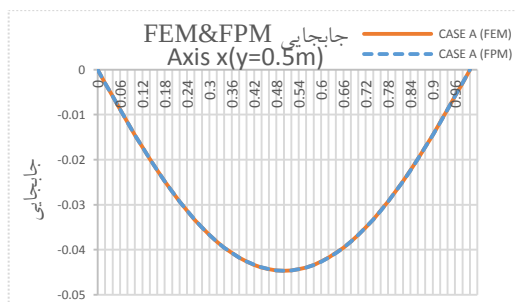
شکل ۹- تغییر شکل به روش نقاط محدود. (الف) ورق با در نظر گرفتن نقاط گوشه. (ب) بدون در نظر گرفتن نقاط گوشه.

همان‌گونه که در شکل (۹) قابل مشاهده است، ابتدا جواب مسئله با در نظر گرفتن نقاط در گوشه‌ی بازشدگی تقریب زده شده است. در روش نقاط محدود، به دلیل انتگرال‌گیری مستقیم در گوشه‌های بازشدگی دچار سینگولاریتی می‌شود که در حالت الف مشهود است. در حالت ب برای رفع این مشکل، در گوشه‌های بازشدگی نقطه در نظر گرفته نشده است. این امر باعث شده است که ماتریس ضرایب بدست آمده سینگولار نشده و تقریب جواب صحیح باشد. مقادیر تنش σ_x در شکل ۱۰ نشان داده شده است.

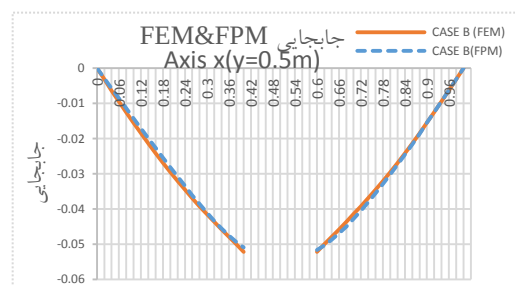


شکل ۱۰- مقادیر تنش σ_x . (الف) به روش نقاط محدود. (ب) به روش اجزا محدود.

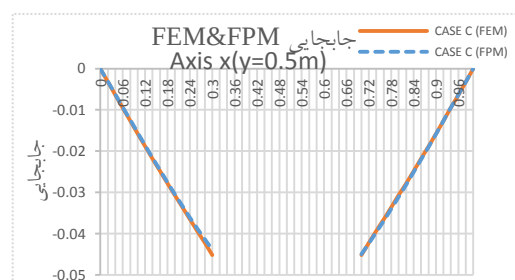
با بررسی شکل ۱۰ ملاحظه می‌شود که مقادیر محاسبه شده برای تنش σ_x در روش نقاط محدود و اجزاء محدود بسیار به هم نزدیک هستند و لذا روش نقاط محدود از نظر برآورد تنش هم قابل اعتماد است. در هر دو روش، تمرکز تنش در لبه‌ها و به ویژه گوشه‌های بازشو ملاحظه می‌شود. به طوری که تنش محاسبه شده در نقاط مجاور گوشه‌های



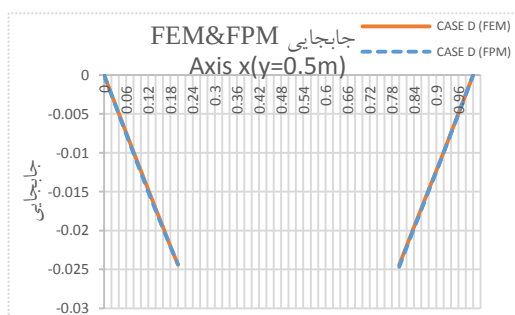
(الف)



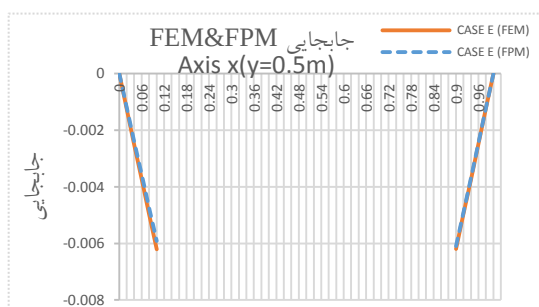
(ب)



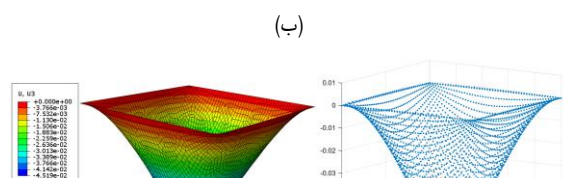
(ج)



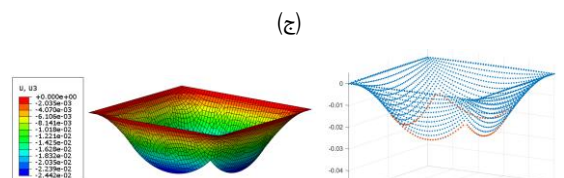
(د)



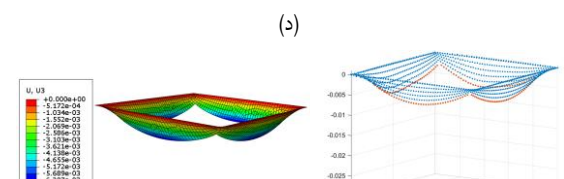
(ه)



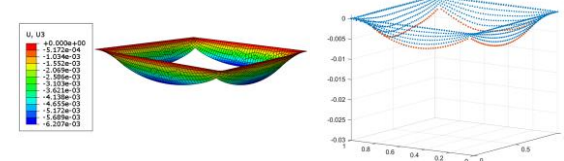
(ب)



(ج)



(د)



(ه)

شکل ۱۲- رفتار ورق تحت بار گسترده‌ی یکنواخت (سمت راست - روش نقاط محدود، سمت چپ روش اجزا محدود)، (الف) $d = 0$. (ب) $d = 0.2$. (ج) $d = 0.4$. (د) $d = 0.6$. (ه) $d = 0.8$.

در جدول (۳) مشخصات حالت‌های ورق و ماکسیمم جابجایی آن‌ها تحت روش نقاط محدود و اجزا محدود بیان شده است. سعی بر آن شده که تعداد نقاط در نظر گرفته شده در هر دو روش با یکدیگر برابر باشند.

جدول ۳- مشخصات ورق و میزان بازشدگی

حالت	تعداد نقاط کلود	میزان بازشدگی (m)	تعداد المان نظر گرفته شده (FEM)	تعداد نقاط در نظر گرفته شده		
				مکسیمم FEM (m)	مکسیمم FPM (m)	مکسیمم FPM (m)
الف	۴۰	۰*	۲۵۰۰	۲۸۰۹	-۰/۰۴۴۶	-۰/۰۴۴۷
ب	۴۰	۰/۲*۰/۲	۲۸۳۶	۲۷۵۲	-۰/۰۵۲۲	-۰/۰۵۱۹
ج	۴۰	۰/۴*۰/۴	۳۴۹۹	۲۴۴۴	-۰/۰۴۵۱	-۰/۰۴۵۰
د	۸۰	۰/۶*۰/۶	۱۷۹۳	۱۹۶۴	-۰/۰۲۴۴	-۰/۰۲۴۳
ه	۹۵	۰/۸*۰/۸	۹۳۷	۱۲۸۴	-۰/۰۰۶۲	-۰/۰۰۶۲

برای درک بهتر رفتار ورق، در شکل (۱۳) نمودار جابجایی ورق در راستای محور $x = 0.5 m$ رسم شده است.

۵- نتیجه گیری

در ادامه پژوهش پیشین در خصوص به کارگیری روش نقاط محدود در تحلیل صفحات نازک، در این مطالعه کاربرد این روش به صفحات نازک دارای بازشو تعمیم داده شده است. باتوجه به حساسیت ذاتی روش FPM نسبت به تغییرات ناگهانی هندسی، انتظار می رفت چالش های قابل توجهی در این زمینه بروز کند. در این تحقیق، بازشوها به صورت مرزهای آزاد داخلی مدل سازی شده اند.

در گام نخست، صفحات نازک دارای بازشوهای دایره ای مورد بررسی قرار گرفتند. این بازشوها به صورت تدریجی در سطح صفحه از مرکز به سمت لبه ها و سپس از لبه ها به سمت گوشه ها جابه جا شدند. نتایج حاصل از روش FPM در تمامی حالات تطابق بسیار خوبی با پاسخ های به دست آمده از روش اجزای محدود نشان داد. این موضوع بیانگر آن است که هندسه هموار بازشوهای دایره ای، همراه با نحوه مدل سازی مرزها، می تواند به طور مؤثری ناپایداری های ذاتی روش FPM را کاهش دهد.

در ادامه، تحلیل صفحات نازک دارای بازشوهای مستطیلی مورد توجه قرار گرفت. به منظور مقابله با مشکل گوشه های تیز در بازشوهای مستطیلی، راهکاری ساده و در عین حال کاربردی پیشنهاد شد که مبتنی بر حذف نقاط واقع در گوشه های بازشو است. این اصلاح ساده از واگرا شدن ماتریس های اصلی درون یابی جلوگیری کرده و در نتیجه پاسخ های عددی پایدار و قابل قبولی حاصل می شود.

از دیگر دستاوردهای مهم این پژوهش، شناسایی و رفع یک مسئله اساسی مرتبط با نوارهای باریک است. در شرایطی که بین مرز بازشو و مرز خارجی صفحه یک نوار باریک با تعداد محدودی از ردیف های نقاط وجود داشته باشد، لازم است ابعاد کلود نقاط درون یابی، به اندازه کافی افزایش یابد تا تعداد مناسبی از ردیف های نقاط از سمت مقابل بازشو در آن منظور شود. در غیر این صورت، تکین شدن ماتریس ها و در نتیجه شکست فرایند درون یابی اجتناب ناپذیر خواهد بود.

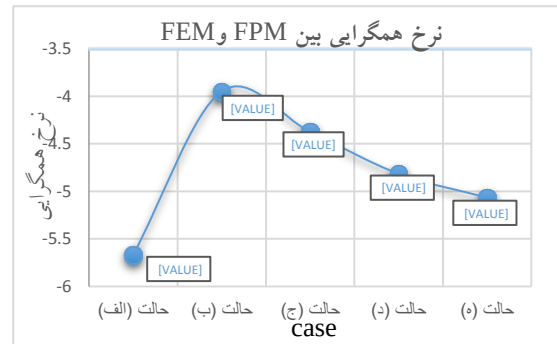
به طور کلی، این پژوهش نخستین ارزیابی نظام مند از کاربرد روش FPM در تحلیل صفحات نازک دارای بازشو را ارائه می دهد. نتایج حاصل، علاوه بر آشکارساختن محدودیت های این روش در مواجهه با ناپوستگی های هندسی تیز، راهکارهایی عملی و قابل پیاده سازی برای افزایش پایداری و دقت آن پیشنهاد می کند. این دستاوردها می تواند زمینه را برای توسعه و به کارگیری گسترده تر روش های کاملاً بدون شبکه در تحلیل سازه های مهندسی پیچیده دارای بازشو فراهم سازد.

مراجع

- [1] Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics. Annual Review of Astronomy and Astrophysics. 1992; 30: 543-574.
<https://doi.org/10.1146/annurev.aa.30.090192.002551>
- [2] Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics. Reports on Progress in Physics. 2005; 68(8): 1703-1759.
<https://doi.org/10.1088/0034-4885/68/8/R01>

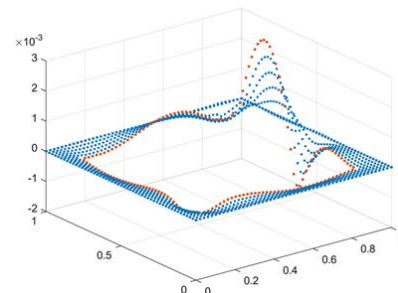
شکل ۱۳- مقایسه ی جابجایی ورق به روش نقاط محدود و اجزا محدود، در امتداد خط $x = 0.5 m$

در شکل (۱۴) همگرایی جواب بین روش نقاط محدود و اجزا محدود، در حالت های مختلف نشان داده شده است.

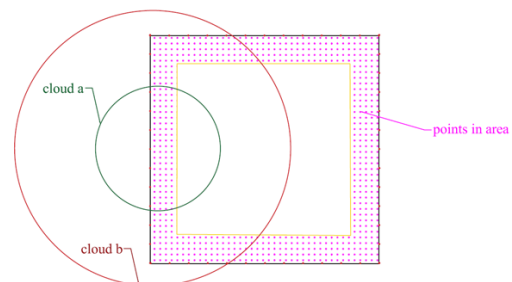


شکل ۱۴- میزان همگرایی جواب بین روش نقاط محدود و اجزا محدود

برای بدست آوردن تقریب جواب به روش نقاط محدود، در حالت های (د) و (ه) چالش هایی وجود دارد. به علت افزایش بازشدگی و کاهش عرض ورق، روش نقاط محدود در جهت عمود بر مرزها به خوبی عمل نمی کند. در این تحقیق از ۱۵ چندجمله ای استفاده شده است. می توان حدس زد که در جهت عمود بر مرز، به علت کافی نبودن نقاط در آن جهت، چند جمله ای های ذکر شده، به خوبی عمل نمی کنند (شکل ۱۵). بنابراین این طبق شکل (۱۶) باید نقاط درون کلود را تا جایی که این مشکل برطرف شود افزایش داد. طبق شکل (۱۶) در کلود a، در جهت افقی، تعداد نقاط کافی نیست برابر این باید کلود مدنظر مانند کلود b افزایش یابد تا در جهت های مختلف تعداد نقاط مناسب باشد.



شکل ۱۵- تقریب جواب حالت (ه) به روش نقاط محدود با استفاده از ۴۰ نقطه درون کلود



شکل ۱۶- افزایش نقاط درون کلود

- [12] Li S, Huang L, Jiang L, Qin R. A bidirectional B-spline finite point method for the analysis of piezoelectric laminated composite plates and its application in material parameter identification. *Composite Structures*. 2014; 107: 346–362. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.08.018>
- [13] Lian Y.P, Zhang X, Liu Y. Coupling of finite element method with material point method by local multi-mesh contact method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2011; 200(47–48): 3482–3494. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.08.012>
- [14] Shen L, Lv G, Shen Z. A finite point method based on directional differences. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2009; 47(3): 2224–2242. <https://doi.org/10.1137/080724743>
- [15] Liu P, Lin K, Liu H, Qin R. Free transverse vibration analysis of axially functionally graded tapered Euler-Bernoulli beams through spline finite point method. *Shock and Vibration*. 2016; 2016: 5891030. <https://doi.org/10.1155/2016/5891030>
- [16] Shojaei A, Mudric T, Zaccariotto M, Galvanetto U. A coupled meshless finite point/Peridynamic method for 2D dynamic fracture analysis. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2016; 119: 419–431. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.10.020>
- [17] Ugural A.C. *Stresses in Plates and Shells*. McGraw-Hill. 1999; Boston. <https://doi.org/10.1036/0070726184>
- [18] Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill. 1959; New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3883-3>
- [19] Rockafellar R.T. Lagrange multipliers and optimality. *SIAM Review*. 1993; 35(2): 183–238. <https://doi.org/10.1137/1035044>
- [20] Clark B.W, Anderson D.C. The penalty boundary method. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2003; 39(5–6): 387–401. [https://doi.org/10.1016/S0168-874X\(02\)00071-4](https://doi.org/10.1016/S0168-874X(02)00071-4)
- [21] Krongauz Y, Belytschko T. Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996; 131(1–2): 133–145. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(95\)00803-8](https://doi.org/10.1016/0045-7825(95)00803-8)
- [3] Belytschko T, Lu Y, Gu L. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1994; 37: 229–256. <https://doi.org/10.1002/nme.1620370205>
- [4] Onate E, Idelson S, Zienkiewicz O.C, Taylor R.L. A finite point method in computational mechanics applications to convective transport and fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1996; 39: 3839–3866. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)10970207\(19961130\)39:22](https://doi.org/10.1002/(SICI)10970207(19961130)39:22)
- [5] Onate E, Idelson S, Zienkiewicz O.C, Taylor R.L. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996; 139(1–4): 315–346. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01048-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01048-2)
- [6] Onate E, Perazzo F, Miquel J. A finite point method for elasticity problems. *Computers and Structures*. 2001; 79: 2151–2163. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(01\)00081-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(01)00081-0)
- [7] Liu M.B, Liu G.R. Smoothed particle hydrodynamics (SPH): an overview and recent developments. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2010; 17: 25–76. <https://doi.org/10.1007/s11831-010-9040-7>
- [8] Mukherjee Y.X, Mukherjee S. On boundary conditions in the element-free Galerkin method. *Computational Mechanics*. 1997; 19(4): 264–270. <https://doi.org/10.1007/s004660050174>
- [9] Ma H, Chen J, Deng J. Analysis of the dynamic response for Kirchhoff plates by the element-free Galerkin method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2024; 439: 116093. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.116093>
- [10] Boroomand B, Tabatabaei A.A, Onate E. Simple modifications for stabilization of the finite point method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2005; 63(3): 351–379. <https://doi.org/10.1002/nme.1290>
- [11] Ferreira A.J.M, Roque C.M.C, Martins P.A.L.S. Analysis of composite plates using higher-order shear deformation theory and a finite point formulation based on the multiquadric radial basis function method. *Composites Part B: Engineering*. 2003; 34(7): 627–636. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(03\)00060-7](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(03)00060-7)

Development of finite point method for solving thin plates with opening

¹ Mohammad Sadegh Tavakoliyan Jahromi, ² Mohamad Najar, ^{3*} Parham Memarzadeh, ⁴ Tadeh Zirakian,

Highlights

- Pure meshless methods, such as the Finite Point Method (FPM), can significantly reduce computational cost and modeling time, provided that adequate numerical accuracy is achieved.
- The FPM is inherently sensitive to sharp geometric variations within the domain and along its boundaries.
- Openings introduce internal boundaries and may induce severe local geometric variations in thin plates.
- Implementing boundary conditions through auxiliary points mitigates the sensitivity of the FPM and improves its performance in the analysis of perforated plates.

Introduction

The analysis of thin plates under lateral loading has received extensive attention, leading to the development of various numerical methods. The Finite Element Method (FEM) has been widely adopted owing to its robustness and versatility; however, its reliance on mesh generation and numerical integration can increase computational cost for complex geometries and irregular boundaries. Meshless methods have therefore emerged as efficient alternatives that eliminate the need for explicit mesh generation.

Methods

The Finite Point Method (FPM) is a fully meshless numerical approach that requires neither mesh generation nor numerical integration. In this method, the continuum is represented by a set of discrete points, and the displacement field is locally approximated using a weighted least-squares formulation. For each master point, a neighboring region, referred to as a cloud, is constructed by selecting a sufficient number of the nearest points. The resulting local approximation enables the governing equations to be formulated directly at the discrete points without requiring connectivity between neighboring points.

Result and Discussion

The FPM was employed to analyze the bending behavior of thin plates containing internal openings with different geometries and locations. The results for circular openings showed good agreement with those obtained using the FEM, demonstrating the capability of the FPM to accurately capture the structural response in the presence of smooth internal boundaries. For rectangular openings, excluding points located at the corners improved numerical stability by avoiding the singular behavior associated with sharp geometric discontinuities. Furthermore, when narrow strips were formed between an opening and the external boundary of the plate, larger point clouds were required to provide a sufficient number of neighboring points and maintain the accuracy and stability of the local approximation.

Conclusion

This study evaluated the applicability and performance of the Finite Point Method (FPM) for the bending analysis of thin plates containing openings with different geometries and locations. The FPM provides a computationally efficient and flexible framework that eliminates the need for mesh generation and numerical integration. However, its accuracy and numerical stability can be adversely affected by internal openings, sharp geometric discontinuities, and narrow regions with insufficient neighboring points. To address these limitations, several numerical strategies were implemented, including the use of auxiliary points for imposing boundary conditions, appropriate treatment of corner points, and enlargement of the point clouds in geometrically constrained regions. The results demonstrate that these strategies can effectively enhance the stability and accuracy of the FPM for the analysis of perforated thin plates.

Keywords: Meshless Methods, Finite Point Method, Thin plate, opening



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

این نشریه تحت قانون بین‌المللی کپی‌رایت Creative Commons: BY-NC است.

¹ Department of Civil Engineering, Isf.C, Islamic Azad University, Isfahan, Iran;

² Department of Civil Engineering, Isf.C, Islamic Azad University, Isfahan, Iran;

³ Department of Civil Engineering, Na.C., Islamic Azad University, Najafabad, Iran;

⁴ Department of Civil Engineering and Construction Management, California State University, Northridge, CA, USA;
Parham.memarzadeh@iau.ac.ir

1. Introduction

The analysis of thin plates is an important research topic in structural and mechanical engineering because of their widespread applications in aerospace, civil, and mechanical systems. Conventional numerical approaches, particularly the Finite Element Method (FEM), have been extensively developed and applied to plate analysis. However, these methods generally require mesh generation and numerical integration, which can become challenging and computationally demanding for complex geometries and problems involving geometric discontinuities, such as cracks and shear bands.

Meshless methods have therefore attracted increasing attention as flexible alternatives to conventional mesh-based approaches. Representative techniques include Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) [1,2], the Element-Free Galerkin (EFG) method [3], and the Finite Point Method (FPM) [4–6]. For example, Liu et al. (2010) [7] demonstrated the applicability of SPH to fluid–structure interaction problems and highlighted its ability to accommodate complex boundary conditions without requiring a predefined mesh. Similarly, the EFG method has been extended to a range of solid mechanics applications, including plate and shell analyses, demonstrating its capability for handling complex structural problems [8,9].

Among meshless approaches, the Finite Point Method (FPM) has emerged as a promising framework for numerical analysis. Originally developed for computational fluid dynamics [4,5], the FPM has subsequently been modified to improve numerical accuracy and overcome deficiencies in its original formulation, particularly the undesirable divergence of the resulting system matrices. Both the original and modified formulations have been successfully applied to two-dimensional elasticity problems [10–16]. Nevertheless, applications of the FPM to solid mechanics remain comparatively limited, particularly for the bending analysis of plates. Although some preliminary studies have investigated plate bending [11,12]; important challenges associated with the formulation and implementation of the method remain unresolved. In particular, the application of the FPM to elastic plates containing openings has received limited attention, despite the pronounced geometric discontinuities and internal boundaries introduced by such features.

This study addresses this gap by systematically investigating the performance of the FPM in the bending analysis of thin, linear-elastic plates with openings of different geometries and locations. The

governing plate equation is formulated in strong form as a fourth-order differential equation [17,18], and is enforced at the interior points, while the boundary conditions are imposed at the boundary points. A fundamental difficulty arises because the governing equilibrium equation provides only one degree of freedom at each point, whereas two boundary conditions may need to be satisfied at a boundary point. Although several techniques, including the Lagrange multiplier [19] and penalty [20] methods, have been proposed to address this issue, the present study employs auxiliary points, analogous to those used in finite difference formulations. Accordingly, one component of the boundary conditions is imposed at the original boundary point, while the second is enforced through its corresponding auxiliary point [21].

Particular attention is given to the effects of openings on the numerical stability and accuracy of the FPM. The study systematically examines the selection of neighboring points within each point cloud and evaluates the number of points required to obtain reliable solutions under different geometric configurations. Special consideration is given to regions characterized by narrow strips or sharp geometric variations, where the local approximation may become sensitive to the available neighboring points. These investigations provide practical insight into the selection of point-cloud parameters and the treatment of geometrically challenging regions.

Overall, this study contributes to the development of meshless techniques for solid mechanics by clarifying the capabilities and limitations of the FPM in the bending analysis of perforated thin plates. The findings provide a basis for improving the robustness of the method and extending its application to more complex discontinuous problems, including plates with cracks and shear bands.

2. Theory of Thin Plates

For the analysis of stress distribution in thin plates, the (xy)-plane is generally assumed to coincide with the mid-plane of the plate. Within this framework, the bending behavior of thin plates is described based on the classical Kirchhoff–Love assumptions, which simplify the governing relations by introducing the following idealizations:

- The transverse deflection of the mid-plane is small relative to the plate thickness. Consequently, the rotations and slopes remain small, and geometric nonlinearities can be neglected.
- The mid-plane is assumed to remain free of membrane strain during bending. Moreover, straight lines initially normal to the mid-plane remain



straight and normal to the deformed mid-plane. Thus, transverse shear deformation is neglected.

- The stress component normal to the mid-plane is assumed to be negligible compared with the in-plane stress components and is therefore disregarded.

These assumptions provide the theoretical basis for the classical theory of thin-plate bending and substantially simplify the governing equations, making them suitable for analytical and numerical formulations in solid and structural mechanics.

Consider a small differential element of the plate subjected to transverse loading. Let (p) denote the external load, and let the dimensions of the differential element along the (x)- and (y)-axes be (dx) and (dy), respectively. The displacement field normal to the mid-plane of the plate is denoted by (w), which is a function of the coordinates (x) and (y). Due to pure bending, the plate element undergoes rotations about the coordinate axes, which can be determined as follows:

$$\begin{aligned}\theta_x &= \frac{\partial w}{\partial y} \\ \theta_y &= \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}\quad (1)$$

These angular changes, referred to as the slopes of the displacement field, induce axial displacements at the points below:

$$\begin{aligned}u &= -z\theta_y \\ v &= -z\theta_x\end{aligned}\quad (2)$$

By combining Eqs. (1) and (2) with the strain-displacement relations, the resulting strain components are obtained as follows:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (3)$$

The curvatures of the deformed surface with respect to the coordinate axes are defined as follows:

$$\begin{aligned}\kappa_x &= \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \kappa_y &= \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \kappa_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (4)$$

The third expression above represents the twisting curvature of the plate mid-surface about the (z)-axis. By substituting the second derivatives of the displacement function in Eq. (3) with the bending components defined in Eq. (4), the strain components can be written as follows:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -z\kappa_x \\ \varepsilon_y &= -z\kappa_y \\ \gamma_{xy} &= -2z\kappa_{xy}\end{aligned}\quad (5)$$

By combining the strain field derived above with the stress-strain constitutive relations, the stress components in the thin plate are obtained as follows:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} (\kappa_x + \nu\kappa_y) \\ &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} (\kappa_y + \nu\kappa_x) \\ &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \kappa_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (6)$$

According to these relations, the stress components vary linearly through the plate thickness and vanish at the mid-plane. These stress components generate bending moments and transverse shear forces along the element boundaries, which can be expressed as follows:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z \, dz \\ \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz\end{aligned}\quad (7)$$

It should be noted that, although the stress components (τ_{xz}) and (τ_{yz}) are neglected in the classical thin-plate bending theory, the shear force components (Q_x) and (Q_y) are not negligible and must be included in the equilibrium equations of the plate.

By substituting the stress components from Eq. (6) into the first relation of Eq. (7) and evaluating the resulting integral, the bending moment components are obtained as follows:

$$\begin{aligned}M_x &= -D(\kappa_x + \nu\kappa_y) \\ &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D(\kappa_y + \nu\kappa_x) \\ &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu)\kappa_{xy} \\ &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (8)$$

where (D) denotes the flexural rigidity of the plate.

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}\quad (9)$$

It is important to note that the shear force components (Q_x) and (Q_y) are related to the

displacement function (w), while satisfying the equilibrium equations.

For simplicity, and owing to the small dimensions of the element, the magnitudes of the moments and shear forces along the boundaries are assumed to be constant and represented by a single vector acting at the center of each boundary line. The variations of these quantities from one boundary to another are taken into account by applying a Taylor series expansion.

By applying the equilibrium equations and neglecting the higher-order small terms, three independent equations are obtained as follows:

$$\begin{aligned}\sum F_z = 0 &\Rightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \\ \sum M_z = 0 &\Rightarrow \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \\ \sum M_y = 0 &\Rightarrow \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0\end{aligned}\quad (10)$$

By substituting the bending moment components into the second and third equations of Eq. (10), the corresponding shear force components are obtained as follows:

$$\begin{aligned}Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w\end{aligned}\quad (11)$$

where:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\quad (12)$$

Finally, by substituting the shear force components into the first equation of Eq. (10), the governing equation for thin-plate bending is obtained as follows:

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D}\quad (13)$$

The operator ∇^4 is defined as:

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\quad (14)$$

The solution of the governing Eq. (13) is essential for determining the response of thin plates. However, based on the relations given in Eq. (8), the following relation can be obtained:

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu} = -D \nabla^2 w\quad (15)$$

Therefore, based on Eq. (13), an alternative solution procedure for thin-plate problems can be formulated by solving the following pair of equations:

$$\begin{aligned}\nabla^2 M &= -p \\ \nabla^2 w &= -\frac{M}{D}\end{aligned}\quad (16)$$

By combining the strain field with the constitutive stress-strain relations, the stress components in the thin plate are finally obtained as follows:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1 + \nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (17)$$

3. Finite Point Method

The finite element method (FEM), owing to its versatility and flexibility, has been widely adopted as an effective numerical approach for solving a broad range of problems in engineering mechanics. However, despite these advantages, mesh generation in FEM can be a challenging and time-consuming process, particularly for problems involving complex geometries or evolving boundaries. Moreover, the assembly of the global stiffness matrix and the evaluation of nodal forces constitute computationally demanding steps that can significantly increase the overall computational cost. To address these limitations, numerous alternative numerical approaches have been developed over the past several decades, collectively referred to as meshless methods.

The primary objective of these methods is to eliminate the need for mesh generation in the numerical modeling of mechanical problems. However, some approaches within this family still require a background mesh for numerical integration. Accordingly, meshless methods can generally be classified into two main categories. The first category includes methods that employ a background mesh for numerical integration. In these approaches, the governing equations are discretized using a weak formulation, which reduces the likelihood of ill-conditioning in the resulting system matrices and generally provides improved numerical accuracy. Although these methods involve a certain form of mesh, their meshing requirements and associated limitations are considerably less restrictive than those of the finite element method. Representative methods in this category include Smoothed Particle Hydrodynamics [1] and the Element-Free Galerkin method [3].

The second category comprises methods that do not employ any mesh and are therefore commonly referred to as truly meshless methods. In these approaches, the governing equations are directly enforced in their strong form at a set of discrete points, thereby eliminating the need for numerical integration. The complete absence of a mesh considerably simplifies the construction of the numerical model and, by eliminating numerical integration, can enhance computational efficiency

compared with both the methods in the first category and the finite element method. However, these methods are generally more susceptible to singular or ill-conditioned system matrices, which may adversely affect numerical stability and solution accuracy. The Finite Point Method [4–6] is one of the most prominent approaches in this category.

In this study, the Finite Point Method is employed to solve thin-plate problems. The plate is modeled by distributing a set of discrete points over its mid-plane, and the strong form of the governing equations, given by Eqs. (13) or (16), is enforced directly at these points.

Application of the governing equations at each point first requires an approximation of the primary displacement field in its vicinity. To this end, a relatively small local region surrounding each point and containing a sufficient number of neighboring points is defined. This region is referred to as a *cloud*, while the point at its center is termed the *central point*. In general, a function defined over the cloud domain is approximated using the weighted least-squares method. Within this framework, the approximation function is constructed as follows:

$$\hat{u} = \mathbf{p}^T \mathbf{a} \quad (18)$$

where $\mathbf{p}$ is a vector of monomials selected either completely or, at a minimum, in a symmetric manner from Pascal's triangle. For the complete set of second-order monomials, this vector is defined as follows:

$$\mathbf{p}^T = \{1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2\} \quad (19)$$

In this study, the number of monomials is considered to be 15, where the vector $\mathbf{a}$ in Equation (18) represents the vector of unknown coefficients. The approximate values of the function at the nodes within the cloud are calculated by substituting their coordinate components into Equation (18).

$$\hat{u}_i = \mathbf{p}_i^T \mathbf{a} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

In the above equation, $\mathbf{p}_i^T$ denotes the vector of monomials with respect to point i in the cloud, $\hat{u}_i$ represents the approximate value of the function u at this point, and n is the total number of nodes within the cloud.

By assembling Equation (20), the vector of approximate nodal values is obtained as follows:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{P}^T \mathbf{a} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

Where $\mathbf{P}^T$ is a matrix whose rows consist of $\mathbf{p}_i^T$, and $\hat{\mathbf{u}}$ is the vector of approximate nodal values.

To ensure that the approximate function closely approaches the function u , an error measure must first be defined. Accordingly, the difference between the values of the function u and those of the approximate function $\hat{u}$ at the cloud points is

considered as the residual, while the sum of the squared residuals over the cloud points is adopted as the error measure. To establish a logical distinction among the nodes, the squared residual at each point is multiplied by a weighting function. The weight is equal to 1 at the central node and decreases smoothly with increasing distance from the central node. Therefore, the error measure can be written as follows:

$$J = \sum_{i=1}^n w(x_i) (\hat{u}_i - u_i)^2 \quad (22)$$

where J denotes the error measure, u_i is the value of the function u at node i , and $w(x_i)$ is the weighting function at that point. By substituting Equation (20) into Equation (22), the error measure can be rewritten as follows:

$$J = \sum_{i=1}^n w(x_i) (\mathbf{p}_i^T \mathbf{a} - u_i)^2 \quad (23)$$

To minimize the error measure, its derivative with respect to the components of the vector $\mathbf{a}$ must be equal to zero.

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 0 \quad (24)$$

which can be expressed by the following equation for the vector $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} \quad (25)$$

where $\bar{\mathbf{u}}$ denotes the vector of nodal values of the function u , and the matrices $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ are defined as follows:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n w(x_i) \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i^T \quad (26)$$

$$\mathbf{B} = [w(x_1) \mathbf{p}_1 \quad w(x_2) \mathbf{p}_2 \quad \dots \quad w(x_n) \mathbf{p}_n] \quad (27)$$

Finally, by substituting the vector $\mathbf{a}$ from Equation (25) into Equation (18), the optimal approximation function is obtained as follows:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{P}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} \quad (28)$$

Two different approaches can now be adopted for solving thin-plate problems. The first approach is to approximate the coupled relations given by Equation (16). These equations are generally suitable for plates with simple boundary conditions. To solve Equation (16), the moment parameter M is first interpolated over the clouds and substituted into the first equation of Equation (16). Subsequently, the displacement field w is interpolated and substituted into the second equation of Equation (16). Finally, the nodal values of the displacement field are obtained. As noted above, this formulation requires the simultaneous enforcement of two separate differential equations involving two unknown parameters at each node. Consequently,

the resulting system is analogous to a formulation with two degrees of freedom per node. This feature allows both Dirichlet and Neumann boundary conditions to be imposed in a manner similar to that employed in the finite element method.

The second approach for solving thin-plate problems is based on Eq. (13) which represents the general form of the equilibrium equation and can therefore be applied to thin plates with arbitrary boundary conditions without additional restrictions. In this approach, the displacement function w is approximated and substituted into Eq. (13). Since only one degree of freedom is associated with each point, the imposition of boundary conditions presents the main challenge. Several strategies can be employed to address this issue, including the method of Lagrange multipliers, the penalty method, and the introduction of additional points. In the present study, the latter approach is adopted. Specifically, an additional point is introduced outside the model in the vicinity of each boundary point. The additional point and its corresponding original boundary point are then treated as a single boundary point with two degrees of freedom, each of which is used to satisfy one of the prescribed boundary conditions. This treatment is analogous to the approach commonly employed in the finite difference method.

3. Numerical Examples

This section presents a series of numerical examples, each selected and formulated to investigate a specific aspect of the proposed method. Before presenting the numerical results, the procedure used to enforce the boundary conditions is described. Fig 1 illustrates the locations of the additional points introduced for this purpose. In general, two conditions must be enforced for each type of boundary condition. Accordingly, one condition is imposed at the original boundary point, while the other is imposed at the corresponding additional point.

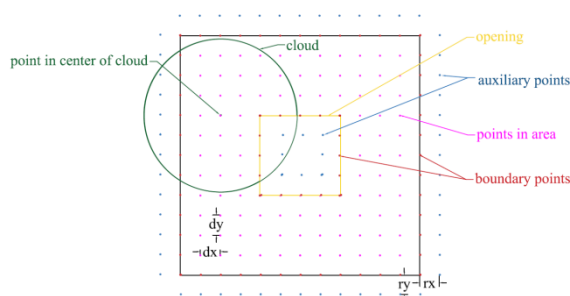


Fig 1. Location of the auxiliary points.

Here, r_x and r_y denote the horizontal and vertical distances, respectively, from the additional points to their corresponding boundary points. Similarly, d_x and d_y denote the horizontal and vertical distances, respectively, between the points on the plate. In all

numerical examples presented in this section, the horizontal and vertical spacings are taken to be equal, i.e., ($r_x = r_y$ and $d_x = d_y$). The general specifications of the numerical examples considered in this study are summarized in Table 1. The parameters defined above are illustrated schematically in Fig 2 for clarity.

Table 1. Steel material properties

E (kN/m ²)	Plate thickn ess (m)	Load q (kN/m ²)	Poisso n's ratio (ν)	Number of polynomi als	Plate dimensi ons (m)
1×10^6	0.001	-1	0.3	15	1×1

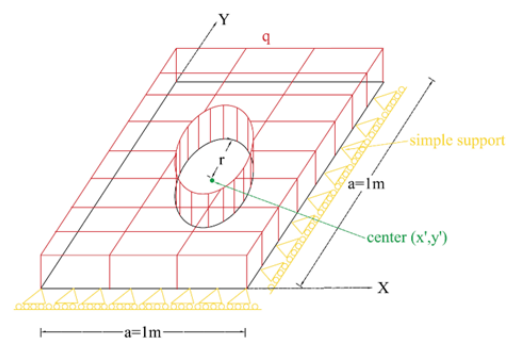


Fig 2. Plate with a circular opening subjected to a uniformly distributed load.

4.1. Example 1

A square plate with a side length = 1m, simply supported along its four edges is considered. As shown in Fig 3, a uniformly distributed load of magnitude 1 (kN/m²) is affected normal to the plate surface. A circular hole with radius 0.2 m is centered at the coordinate (x', y') of the plate (Fig 3).

The following equations are imposed on the boundaries due to the nature of simple boundary supports:

$$\begin{aligned} x=0, x=a \rightarrow w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \\ y=0, y=a \rightarrow w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

As the hole acts similarly to internal boundaries with free conditions, the following equations are to be satisfied on its boundaries:

$$\begin{aligned} x=0, x=a \rightarrow \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \\ &= 0, \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} = 0 \\ y=0, y=a \rightarrow \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$= 0, \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

In this example, the displacement of the opening and the corresponding displacement field are evaluated for different opening locations. The plate coefficients and parameters, together with the coordinates of the opening center, are listed in Table 2. The distribution of the points and the geometry of the opening are shown in Fig 3.

Table 2. Plate properties and the exact location of the opening.

Case	Cloud points	Opening radius (m)	x' (m)	y' (m)	Maximum FEM (m)	Maximum FPM (m)
a	60	0.2	0.5	0.5	-0.04439	-0.04221
b	60	0.2	0.25	0.5	-0.05377	-0.05402
c	60	0.2	0.21	0.5	-0.05296	-0.05531
d	60	0.2	0.75	0.5	-0.05122	-0.05244

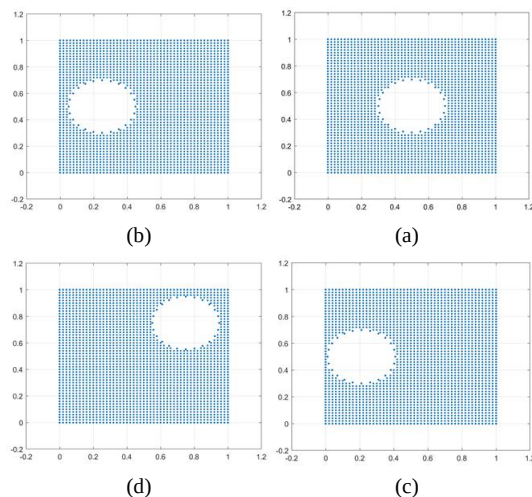


Fig 3. Considered points on the plate and the opening region; (a) $(x', y') = (0.5, 0.5)$; (b) $(x', y') = (0.25, 0.5)$; (c) $(x', y') = (0.21, 0.5)$; (d) $(x', y') = (0.75, 0.75)$.

After approximating the solution using the Finite Point Method and comparing the results with those obtained from the finite element method, the plate is found to exhibit consistent behavior in both approaches. This agreement is clearly demonstrated in Fig 4.

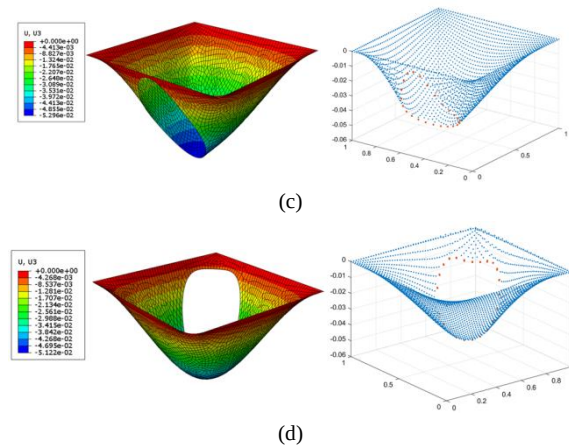
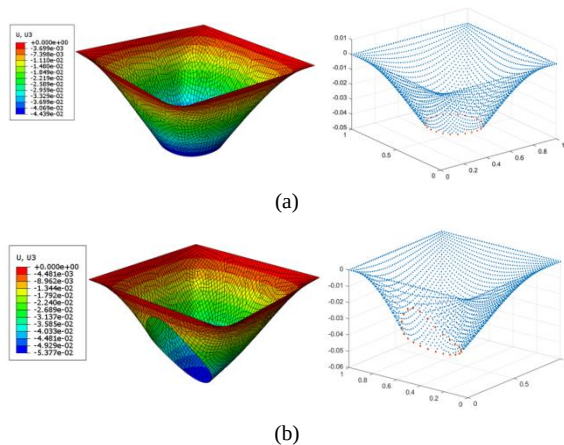
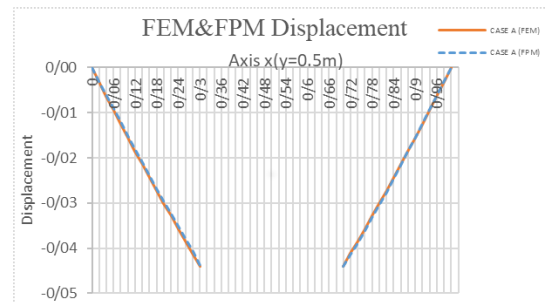
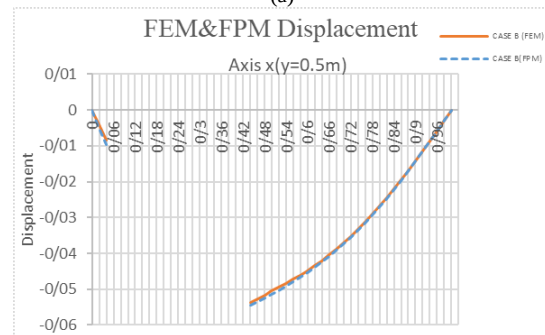


Fig 4. Approximate deformation of the plate under study using the meshless method and the finite element method (right: meshless, left: finite element); (a) $(x', y') = (0.5, 0.5)$; (b) $(x', y') = (0.25, 0.5)$; (c) $(x', y') = (0.21, 0.5)$; (d) $(x', y') = (0.75, 0.75)$.

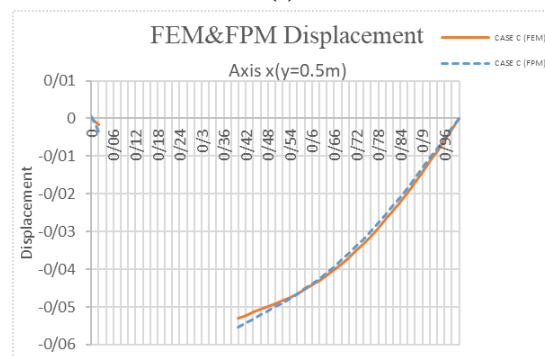
Fig 5 presents the displacement profiles of the plate for different cases along line $(x = 0.5 \text{ m})$.



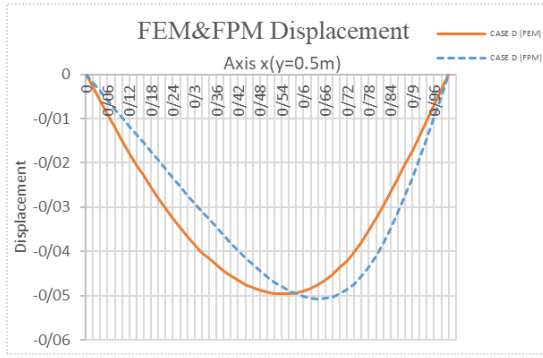
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig 5. Comparison of the plate displacement obtained by the finite point method and the finite element method along the line $x=0.5$ m; (a) $(x',y') = (0.5,0.5)$; (b) $(x',y') = (0.25,0.5)$; (c) $(x',y') = (0.21,0.5)$; (d) $(x',y') = (0.75,0.75)$.

Fig 6 illustrates the convergence of the results obtained using the Finite Point Method and the finite element method at all points, based on the following relation:

$$\text{Convergence rate} = \log \sum \sqrt{\frac{(W_{FPM} - W_{FEM})^2}{n}} \quad (31)$$

where n denotes the number of points considered in both methods.

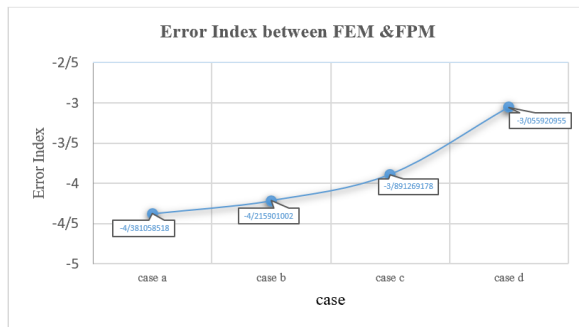


Fig 6. shows the Error Index of the solution between the finite point method and the finite element method.

An examination of Fig 6 shows that Case (a), in which the opening is located at the center of the plate, exhibits the highest level of agreement between the two sets of results. As the opening moves toward the boundary, the percentage error increases, as observed in Cases (b) and (c). Case (d), in which the opening is located near the corner, exhibits the largest discrepancy between the results. As the opening approaches the corner of the plate, the matrix $p^T A^{-1} B$ obtained using the Finite Point Method becomes ill-conditioned and eventually singular.

4.2. Example 2

In this example, a square plate with a side length of ($a = 1$ m), simply supported along all four edges, is considered. As shown in Fig. 7, a uniformly distributed load with a magnitude of (kN/m^2) is assumed to act perpendicular to the plate surface.

The opening in the plate is assumed to be square, with dimensions of (40×40 cm).

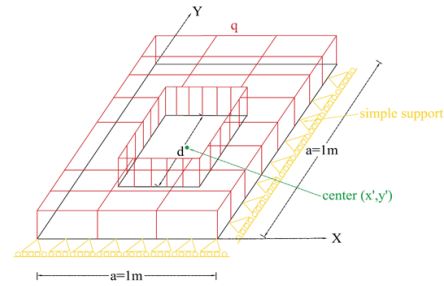


Fig 7. Plate with a circular opening subjected to a uniformly distributed load.

The plate displacement is investigated for two cases. In the first case, the corner points of the opening are included in the computational model, whereas in the second case, they are excluded. Both cases are illustrated in Fig 8.

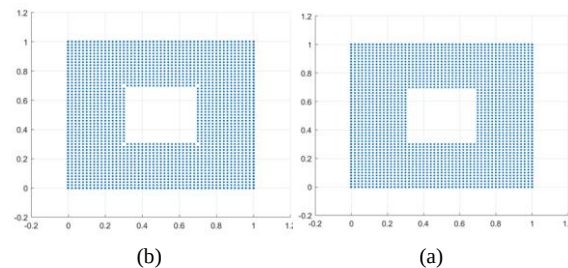


Fig 8. (a) Plate with corner points included (b) Plate without corner points.

For both Cases (a) and (b) shown in Fig 8, the deformed configurations obtained using the Finite Point Method are presented in Fig 9.

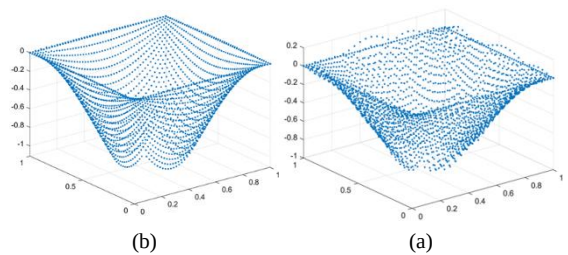


Fig 9. Deformation obtained using the Finite Point Method. (a) Plate with corner points included. (b) Plate without corner points.

As shown in Fig 9, the problem is first solved by including the points located at the corners of the opening. In the Finite Point Method, direct enforcement of the governing equations at the opening corners leads to a singularity, as observed in Case (a). To overcome this issue, the corner points of the opening are excluded from the computational model in Case (b). This treatment prevents the coefficient matrix from becoming singular and consequently yields a valid approximation of the solution. The values of the stress component σ_x are presented in Fig 10.

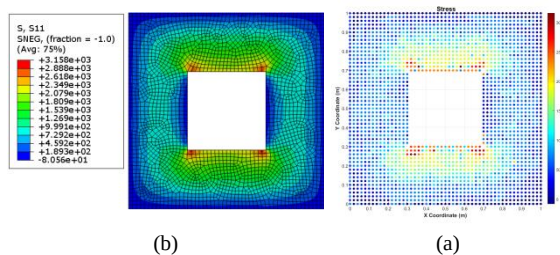


Fig 10. Stress component σ_x . (a) Finite Point Method. (b) Finite Element Method.

An examination of Fig 10 shows that the stress component σ_x calculated using the Finite Point Method is in close agreement with the corresponding results obtained from the finite element method. This close agreement demonstrates the capability of the Finite Point Method to provide reliable estimates of the stress field. In both methods, stress concentrations are observed along the opening edges, with the most pronounced concentrations occurring near its corners. Specifically, the stress values at points adjacent to the opening corners are approximately 1.5 times those at neighboring points located farther from the corners.

4.3. Example 3

The specifications of this example are identical to those of Example 2. The plate contains a square opening with varying dimensions, as illustrated in Fig 11.

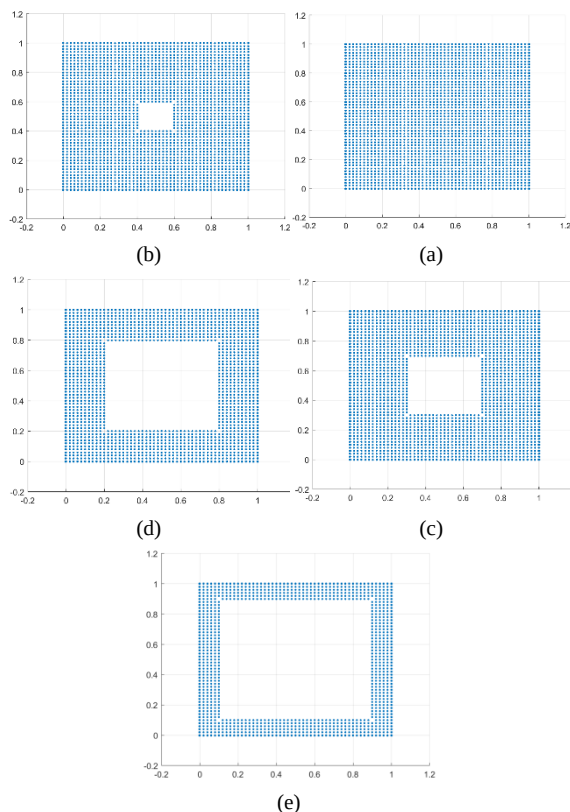


Fig 11. Location of the considered points and dimensions of the opening; (a) $d = 0$; (b) $d = 0.2$; (c) $d = 0.4$; (d) $d = 0.6$; (e) $d = 0.8$.

The plate responses obtained using the Finite Point Method and the finite element method are presented in Fig 12. Examination of all cases indicates a consistent response between the two methods.

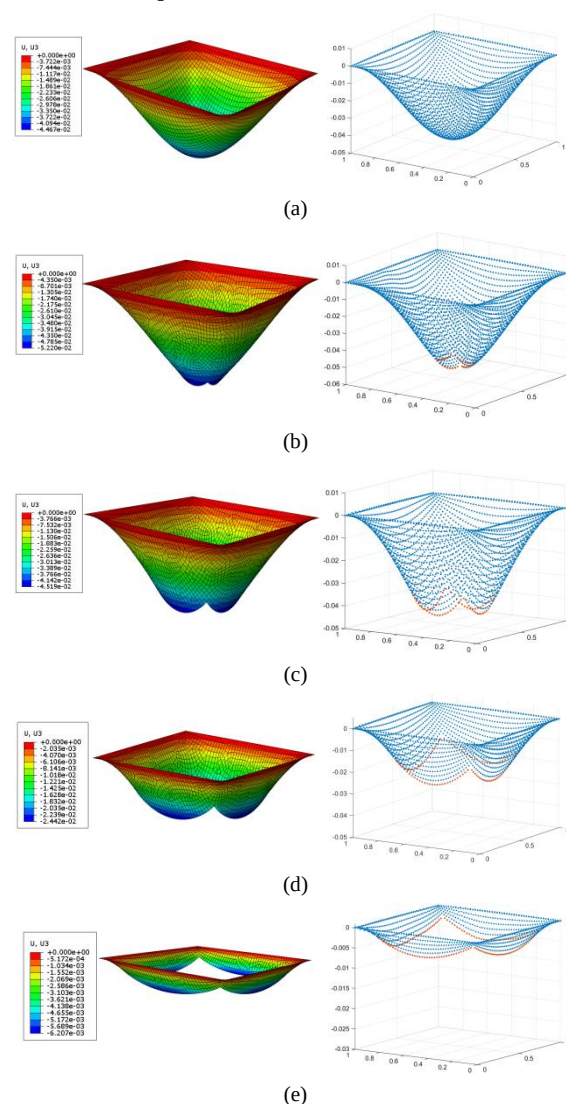


Fig 12. Plate behavior under uniform distributed load (right: finite point method, left: finite element method); (a) $d = 0$; (b) $d = 0.2$; (c) $d = 0.4$; (d) $d = 0.6$; (e) $d = 0.8$.

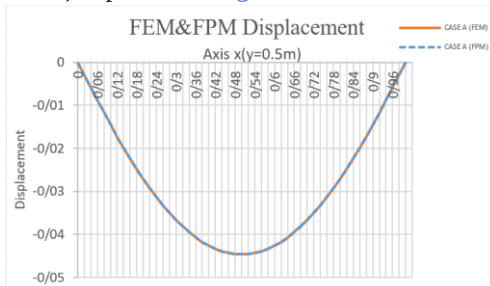
Table 3 summarizes the specifications of the different plate configurations and their corresponding maximum displacements obtained using the Finite Point Method and the finite element method. An effort was made to maintain the same number of points in both methods to ensure a consistent basis for comparison. As shown in the table, increasing the opening size from zero to 20% of the plate dimension leads to an increase in the maximum displacement, indicating a reduction in the effective stiffness of the plate. However, a further increase in the opening size results in a decrease in the maximum displacement. This behavior can be attributed to the transition from plate-like behavior of the continuous medium to the behavior of a system composed of interconnected

narrow strips as the opening becomes sufficiently large.

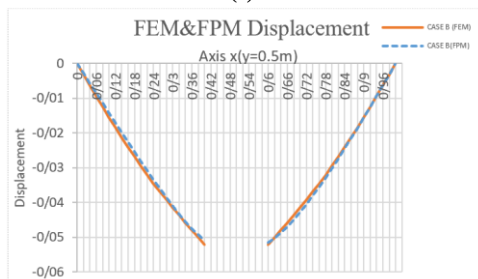
Table 3. Plate specifications and opening characteristics.

Case	Cloud points	Opening size (m)	Number of elements (FEM)	Number of points (FPM)	Maximum FEM (m)	Maximum FPM (m)
a	40	0*0	2500	2809	-0.0446	-0.0447
b	40	0.2*0.2	2836	2752	-0.0522	-0.0519
c	40	0.4*0.4	2499	2444	-0.0451	-0.0450
d	80	0.6*0.6	1793	1964	-0.0244	-0.0243
e	95	0.8*0.8	937	1283	-0.0062	-0.0062

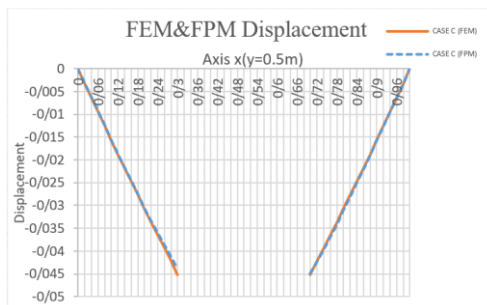
For a better understanding of the plate behavior, the displacement profile of the plate along the line ($x=0.5\text{ m}$) is plotted in Fig 13.



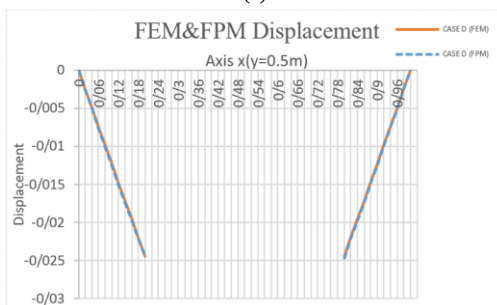
(a)



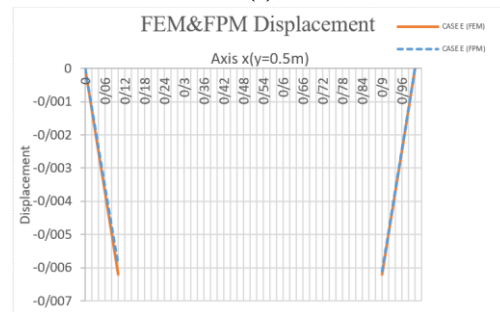
(b)



(c)



(d)



(e)

Fig 13. Comparison of the plate displacement obtained by the finite point method and the finite element method along the line $x = 0.5\text{ m}$.

Fig 14 illustrates the convergence of the results obtained using the Finite Point Method and the finite element method for different cases.

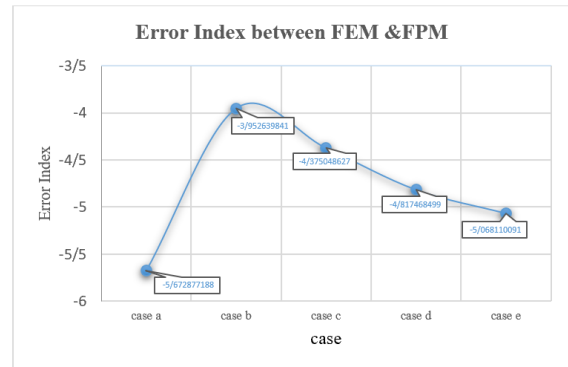


Fig 14. Error Index of the solution between FPM and FEM

Obtaining an accurate solution using the Finite Point Method for Cases (d) and (e) presents certain challenges. As the opening size increases and the remaining plate width decreases, the accuracy of the Finite Point Method deteriorates in the direction normal to the boundaries. In the present study, 15 monomials are employed; however, the number of points available in the direction normal to the boundary may be insufficient to provide an accurate approximation, as illustrated in Fig 15.

Consequently, the selected set of monomials cannot be adequately supported by the available point distribution in this direction. To address this issue, the number of points within each cloud should be increased until a sufficiently accurate approximation is obtained, as illustrated in Fig 16. As shown in Fig 16 Cloud (a) contains an insufficient number of points in the horizontal direction. Therefore, the cloud should be enlarged, as in Cloud (b), to provide a sufficient number of points in different directions and improve the local approximation.

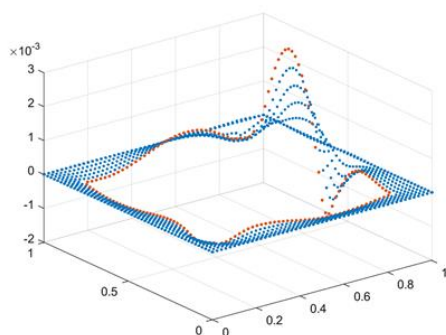


Fig 15. Approximation of the solution for Case (e) using the finite point method with 40 cloud points

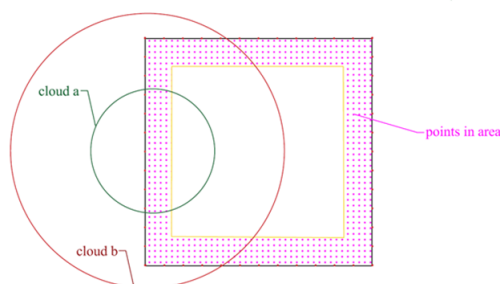


Fig 16. Increase in the number of points within the cloud

5. Conclusion

Building on previous research on the application of the Finite Point Method (FPM) to thin-plate analysis, this study extended the method to thin plates with openings. Given the sensitivity of the FPM to abrupt geometric variations, particular attention was paid to the numerical challenges associated with openings, which were modeled as internal free boundaries.

First, thin plates with circular openings were investigated by systematically moving the opening from the plate center toward the edges and subsequently toward the corners. The FPM results showed very good agreement with those obtained using the finite element method for all investigated configurations. This agreement indicates that the smooth geometry of circular openings, combined with the adopted treatment of internal boundaries, can effectively mitigate the numerical instabilities associated with the FPM. As the opening moved from the center toward the edges and corners, the maximum plate displacement increased.

Thin plates with rectangular openings were subsequently analyzed. To address the numerical difficulties caused by the sharp corners of rectangular openings, the points located at the opening corners were excluded from the computational model. This simple modification prevented the interpolation coefficient matrices from becoming singular and resulted in stable and acceptable numerical solutions. For relatively small openings, increasing the opening size to approximately 20% of the plate dimension increased

the maximum displacement because of the associated reduction in plate stiffness. However, further enlargement of the opening resulted in a decrease in the maximum displacement. This behavior is attributed to the removal of points located relatively far from the supports, which contribute less to the overall stiffness, together with the transition from plate-like behavior to that of narrow, interconnected strips.

For openings with comparable characteristic dimensions, replacing a circular opening with a square opening resulted in a higher maximum displacement. This increase can be attributed not only to the larger removed area associated with the square geometry but also to its distinct mechanical response and the stress concentrations generated at its sharp corners.

An additional important finding concerns the treatment of narrow strips formed between the opening and the outer boundary of the plate. When only a limited number of point rows exists within such a strip, the interpolation cloud must be sufficiently enlarged to incorporate an adequate number of points from the opposite side of the opening. Failure to provide sufficient point support can lead to matrix singularity and, consequently, failure of the interpolation process. This finding highlights the importance of an appropriate cloud size and point distribution when applying the FPM to geometries containing narrow regions.

Overall, the results demonstrate that the FPM can provide accurate and stable solutions for thin plates with openings when the geometric characteristics of the opening and the local point distribution are properly considered. The study identifies the principal numerical limitations associated with smooth and sharp geometric features and proposes simple, readily implementable strategies to improve the stability and accuracy of the method. These findings provide a useful basis for extending truly meshless methods to more complex structural configurations involving openings and other geometric discontinuities.

References

- [1] Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 1992; 30: 543–574. <https://doi.org/10.1146/annurev.aa.30.090192.002551>
- [2] Monaghan J.J. Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on Progress in Physics*. 2005; 68(8): 1703–1759. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/68/8/R01>
- [3] Belytschko T, Lu Y, Gu L. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1994; 37: 229–256. <https://doi.org/10.1002/nme.1620370205>

[4] Onate E, Idelson S, Zienkiewicz O.C, Taylor R.L. A finite point method in computational mechanics applications to convective transport and fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1996; 39: 3839–3866. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)10970207\(19961130\)39:22](https://doi.org/10.1002/(SICI)10970207(19961130)39:22)

[5] Onate E, Idelson S, Zienkiewicz O.C, Taylor R.L. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996; 139(1–4): 315–346. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01048-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01048-2)

[6] Onate E, Perazzo F, Miquel J. A finite point method for elasticity problems. *Computers and Structures*. 2001; 79: 2151–2163. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(01\)00081-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(01)00081-0)

[7] Liu M.B, Liu G.R. Smoothed particle hydrodynamics (SPH): an overview and recent developments. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2010; 17: 25–76. <https://doi.org/10.1007/s11831-010-9040-7>

[8] Mukherjee Y.X, Mukherjee S. On boundary conditions in the element free Galerkin method. *Computational Mechanics*. 1997; 19(4): 264–270. <https://doi.org/10.1007/s004660050174>

[9] Ma H, Chen J, Deng J. Analysis of the dynamic response for Kirchhoff plates by the element free Galerkin method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2024; 439: 116093. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.116093>

[10] Boroomand B, Tabatabaei A.A, Onate E. Simple modifications for stabilization of the finite point method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2005; 63(3): 351–379. <https://doi.org/10.1002/nme.1290>

[11] Ferreira A.J.M, Roque C.M.C, Martins P.A.L.S. Analysis of composite plates using higher order shear deformation theory and a finite point formulation based on the multiquadric radial basis function method. *Composites Part B: Engineering*. 2003; 34(7): 627–636. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(03\)00060-7](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(03)00060-7)

[12] Li S, Huang L, Jiang L, Qin R. A bidirectional B spline finite point method for the analysis of piezoelectric laminated composite plates and its application in material parameter identification. *Composite Structures*. 2014; 107: 346–362. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.08.018>

[13] Lian Y.P, Zhang X, Liu Y. Coupling of finite element method with material point method by local multi mesh contact method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2011; 200(47–48): 3482–3494. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.08.012>

[14] Shen L, Lv G, Shen Z. A finite point method based on directional differences. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2009; 47(3): 2224–2242. <https://doi.org/10.1137/080724743>

[15] Liu P, Lin K, Liu H, Qin R. Free transverse vibration analysis of axially functionally graded tapered Euler Bernoulli beams through spline finite point method. *Shock and Vibration*. 2016; 2016: 5891030. <https://doi.org/10.1155/2016/5891030>

[16] Shojaei A, Mudric T, Zaccariotto M, Galvanetto U. A coupled meshless finite point/Peridynamic method for 2D dynamic fracture analysis. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2016; 119: 419–431. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.10.020>

[17] Ugural A.C. *Stresses in Plates and Shells*. McGraw Hill. 1999; Boston. <https://doi.org/10.1036/0070726184>

[18] Timoshenko S, Woinowsky Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. McGraw Hill. 1959; New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3883-3>

[19] Rockafellar R.T. Lagrange multipliers and optimality. *SIAM Review*. 1993; 35(2): 183–238. <https://doi.org/10.1137/1035044>

[20] Clark B.W, Anderson D.C. The penalty boundary method. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2003; 39(5–6): 387–401. [https://doi.org/10.1016/S0168-874X\(02\)00071-4](https://doi.org/10.1016/S0168-874X(02)00071-4)

[21] Krongauz Y, Belytschko T. Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996; 131(1–2): 133–145. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(95\)00803-8](https://doi.org/10.1016/0045-7825(95)00803-8)

