

دینامیک کوانتومی یک نوسانگر غیر هماهنگ در یک محیط اتلافی

پیوستاری

محسن دائی محمد^{۱*}، محمد نیلی احمد آبادی^۲

تاریخ ارسال: ۲۳/۰۱/۱۴۰۲، تاریخ پذیرش: ۲۲/۰۶/۱۴۰۲

چکیده: در این تحقیق به بررسی حرکت یک نوسانگر غیرهماهنگ در یک محیط اتلافی پیوستاری می‌پردازیم. در قسمت اول با استفاده از معادلات اوایلر- لاگرانژ معادلات حرکت را برای یک نوسانگر غیرهماهنگ بدست می‌آوریم. سپس برای جفت شدگی خاصی که درواقع میرایی متناسب با سرعت می‌باشد به بررسی تغییرات زمانی دامنه نوسانگر غیرهماهنگ و دامنه نوسانگرهای محیط می‌پردازیم. در ادامه معادلات حرکت را برای موردیکه جملات غیرخطی وجود ندارد و یک نوسانگر هماهنگ میرا با یک محیط پیوستاری برهم کنش می‌کند مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این حالت برای سه مورد متفاوت زیرمیرایی، میرای بحرانی و فوق میرایی به بررسی تغییرات زمانی دامنه نوسانگر غیرهماهنگ و دامنه نوسانگرهای محیط می‌پردازیم. سپس به کوانتتش سیستم در تصویر هایزنبرگ با استفاده از روابط جابه‌جایی کانونیکال در زمانهای مساوی می‌پردازیم و معادلات حرکت هایزنبرگ را بدست می‌آوریم. سپس به بررسی نمودارهای مختصات مکان نوسانگر غیرهماهنگ و نوسانگرهای محیط می‌پردازیم.

کلید واژه‌ها: نوسانگر غیرهماهنگ میرا، محیط پیوستاری، کوانتتش هامیلتونی، میرایی متناسب با سرعت

۱. مقدمه

مشدهای نانوالکترمکانیکی (NEM) مانند غشاها و پرتوها سیستمهای مهمی برای مطالعه پدیدههای کوانتومی در اجسام ماکروسکوپی و مکانیکی ساخته شده دست بشر هستند [1]. پیش از یک دهه می‌باشد که هدف دانشمندان سرد کردن مشدهای نانوالکترمکانیکی (NEM) تا حالت پایه و رسیدن به این حالت بوده است. این اخیراً انجام شده [2-4] و مرحله بعدی تولید، اشکارسازی و دستکاری حالت‌های کوانتومی پیچیده تر می‌باشد. به عنوان مثال می‌توان به برهم نهی حالت ماکروسکوپی (حالت گربه‌ای شرودینگر) [5] و حالت فوک [6] اشاره کرد.

در حالیکه یک نوسانگر هماهنگ کوانتومی رفتاری مشابه همتای کلاسیکی خود نشان می‌دهد، این امر برای نوسانگر غیرخطی اتفاق نمی‌افتد. وجود یک عامل غیر خطی (مثل اثر کر) باعث تسهیل در بوجود آمدن اثرات غیر کلاسیکی می‌شود. مشدهای نانو الکترومکانیکی (NEM) معمولاً دارای یک ثابت کر محدود می‌باشند که معمولاً خیلی کوچک است و برای تولید حالت‌های غیرکلاسیک کافی نیستند. درمقابل نانو لوله های کربنی (CNTs) و غشاهای گرافین دارای رفتار غیرخطی قوی می‌باشند که برای تولید حالت‌های غیرکلاسیک کافی می‌باشد [5,7]. همچنین استفاده از نانو لوله های کربنی (CNTs) یا گرافین به دلیل جرم کم و فرکانس بالا، باعث کاهش استفاده از خنک کننده فعال می‌شود. به همین دلیل مشدهای نانو الکترومکانیکی (NEM) ساخته شده

۱- گروه فیزیک، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران

۲- گروه ریاضی، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران

از کربن برای مطالعه سیستم های مکانیکی غیرخطی در رژیم کوانتومی بسیار با اهمیت است. اگر یک سیستمی دارای پارامترهای غیرخطی باشد، طبیعی است که در بر هم کنش بین سیستم و محیط باید جملات با توان های بالاتر را نیز در محاسبات وارد کرد. این منجر به میرایی غیرخطی می شود (NLD) [8-11]. در مشددهای نانو الکترومکانیکی (NEM) ساخته شده از کربن، اخیرا نشان داده شده است که مختصات نوسانگر غیرهماهنگ می تواند متأثر از مکانیسم های اتلاف باشد [12,13]. از این رو برای درک کامل دینامیک کوانتومی یک مشدد ساخته شده از کربن یا همان مشددهای نانوالکترومکانیکی (NEM) لازم است تفاوت های رفتار بین یک نوسانگر خطی و غیرخطی را بدانیم. به طور کلی میرایی غیرخطی (NLD) باعث بوجود آمدن ویژگی های جالب کوانتومی می شود [14-18]. از طرف دیگر در حال حاضر بهترین روش برای بررسی یک نوسانگر غیرهماهنگ اتلافی بررسی دینامیکی یک نوسانگر غیرهماهنگ درحضور یک محیط اتلافی می باشد. یک روش کلی که در همه جا استفاده می شود به کارگیری یک مجموعه گسسته ای از نوسانگرها به جای محیط می باشد. این نوع مدل هامیلتونی که اولین بار توسط ماگلینسکی معرفی شد [19] بهترین روش برای بررسی حرکت براونی می باشد (یک ذره آزاد در یک محیط) [20-28]. حدی که میرایی اهمی ایجاد می کند باعث کاهش فاصله فرکانس بین نوسانگرها می شود ولی با این وجود فرکانس نوسانگرها را بالا نگه می دارد. به عبارت دیگر محیط به طور موثر یک محیط پیوستاری در نظر گرفته می شود، ولی بعد از اینکه معادلات دینامیکی حل شد و فرض شد یک مجموعه گسسته می باشد. تاتارسکی نشان داده است که با یک محیط گسسته امکان دسترسی به یک میرایی اهمی وجود ندارد و ظهور یک میرایی اهمی از طریق حد پیوستاری بعد از حل معادلات دینامیکی امکان پذیر است [29]. علاوه بر روش های که به تازگی ارائه شده که در آنها به دنبال استفاده از روش های استاندارد کوانتش می باشند، بررسی های پدیده شناختی بر روی نوسانگر میرا صورت گرفته که در آن کوانتش به اسانی امکان پذیر است [30]

یک نمونه از آن می باشد. در این تحقیق ما یک نوسانگر غیرهماهنگ را در نظر می گیریم که با یک محیط که شامل یک پیوستاری از نوسانگرها که تمامی آنها دارای فرکانس مثبت می باشند برهم کنش می کند. استفاده از یک محیط پیوستاری به جای یک محیط گسسته باعث غنی سازی سیستم دینامیکی خواهد شد. به دلیل اینکه سیستم مورد بررسی دارای تعداد درجات آزادی غیرقابل شمارش می باشد بسیاری از ویژگی های یک میدان کوانتومی را خواهد داشت و از نظر کیفی با یک مجموعه قابل شمارش از نوسانگرها حتی نامتناهی متفاوت می باشد. در اینجا ما یک روش کلی برای حل سیستم دینامیکی ارائه می کنیم، و به طور دقیق میرایی و تقویت اهمی را بررسی می کنیم که در واقع این نتیجه این می باشد که تابع جفت شدگی خاصی را درنظر گرفته ایم. کوانتش برای میرایی کلی و میرایی اهمی به طور کامل مورد بررسی قرار می دهیم. محیط پیوستاری اولین بار توسط هاتنر و بارت در مرجع [31] معرفی شد مقاله ای که بسیار شناخته شده است ولی با این وجود نوآوری و اهمی روش های به کار رفته در آن کمتر مورد توجه قرار گرفته است. از یک محیط پیوستاری می توان برای کوانتش کانونیکال معادلات ماکسول ماکروسکوپیک برای یک محیط دلخواه که از رابطه کرامرز- کرونینگ پیروی می کند استفاده کرد [32,33]. برای مثال محیط های غیرهماهنگ و متحرک دو نمونه از این محیط ها می باشند [34,35]. در این تحقیق قدرت کاربرد یک محیط پیوستاری با بررسی یک نوسانگر غیرهماهنگ میرا و کوانتش آن نشان داده شده است. ساختار این مقاله به صورت زیر است. در قسمت دوم لاگرانژی و معادلات حرکت را برای یک نوسانگر غیرهماهنگ جفت شده به شکل ترکیبی از خطی و غیرخطی از طریق مکان و مربع مکان با یک محیط پیوستاری بدست می آوریم. در بخش ۳ دینامیک کوانتومی را برای یک جفت شدگی خاصی که متناسب با سرعت می باشد بررسی می کنیم. در قسمت 4 هامیلتونی را کوانتیزه می کنیم و با استفاده از تبدیلات لاپلاس جواب های

الکترومغناطیس استفاده کرد. با استفاده از معادله اوپلر- لاگرانژ می توان نوشت.

$$\ddot{q} + \Omega^2 q + \frac{8}{3} \mu q^3 - \int_0^\infty d\omega \alpha_1(\omega) X_\omega \quad (3)$$

$$- 2 \int_0^\infty d\omega \alpha_2(\omega) q X_\omega(t) = 0$$

$$\ddot{X}_\omega + \omega^2 X_\omega - \alpha_1(\omega) q - \alpha_2(\omega) q^2 = 0 \quad (4)$$

۳. جفت شدگی برای میرایی متناسب با سرعت

در این قسمت دینامیک حرکت را برای جفت شدگی خاصی که میرایی متناسب با سرعت می باشد بررسی می کنیم. تابع جفت شدگی خطی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\alpha_1(\omega) = \Omega \omega \left[\frac{2\gamma}{\pi(\omega^2 + \gamma^2)} \right]^{\frac{1}{2}}, \gamma > 0 \quad (5)$$

تابع فوق به شکل یکنواخت از مقدار صفر در $\omega = 0$ تا مقدار مجانبی $\Omega \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}}$ در $\omega \rightarrow \infty$ افزایش می یابد. همچنین تابع جفت شدگی غیرخطی را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$\alpha_2(\omega) = a \Omega \omega \left[\frac{2\gamma}{\pi(\omega^2 + \gamma^2)} \right]^{\frac{1}{2}}, \gamma > 0 \quad (6)$$

تابع فوق به شکل یکنواخت از مقدار صفر در $\omega = 0$ تا مقدار مجانبی $a \Omega \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}}$ در $\omega \rightarrow \infty$ افزایش می یابد و ثابتی با بعد عکس طول است. به دلیل غیرخطی بودن معادلات (۳ و ۴) حل تحلیلی برای آنها وجود ندارد و فقط به روشهای عددی قابل حل می باشند. در شکل (۱) نمودار $q(t)$ بر حسب زمان برای معادلات (۳ و ۴) و توابع جفت شدگی (۵ و ۶) رسم شده است. همانطور که پیش بینی می شد حرکت ذره غیرنوسانی خواهد بود. در لحظه $t = -3$ نوسانگر غیرهماهنگ در موقعیت حدود $q = -10$ قرار دارد با گذشت زمان به شکل تقریباً خطی دامنه نوسانگر غیرهماهنگ در جهت منفی افزایش می یابد و نوسانگر غیرهماهنگ از محیط انرژی جذب

معادلات حرکت را بدست می آوریم. سرانجام در قسمت ۵ نتایج را می آوریم.

۲. لاگرانژی و معادلات دینامیکی

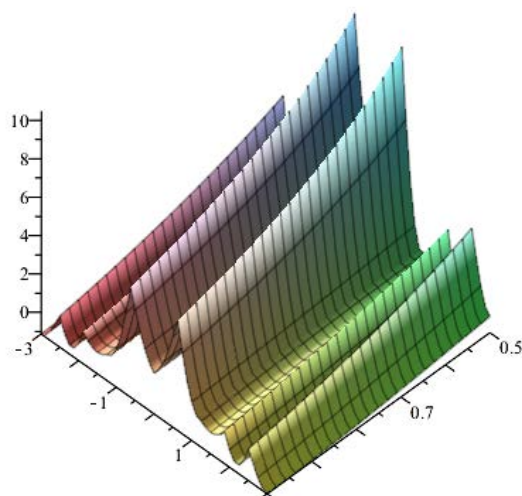
ما یک سیستم دینامیکی در نظر می گیریم که توسط معادله لاگرانژی زیر توصیف می شود:

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \Omega^2 q^2 - \frac{2}{3} \mu q^4 + \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega (\dot{X}_\omega^2 - \omega^2 X_\omega^2) + \int_0^\infty d\omega \alpha_1(\omega) q X_\omega(t) + \int_0^\infty d\omega \alpha_2(\omega) q^2 X_\omega(t) \quad (1)$$

در اینجا q مکان و Ω فرکانس نوسانگر غیرهماهنگ می باشد و همچنین X_ω مکان و ω فرکانس نوسانگرهای محیط می باشد. همچنین جرم نوسانگر غیرهماهنگ و جرم تمامی نوسانگرهای محیط را یک فرض کرده ایم. نوسانگر و محیط به شکل ترکیبی از خطی و غیرخطی و از طریق مکان و مربع مکان با هم جفت می شوند و $\alpha_1(\omega), \alpha_2(\omega)$ به ترتیب توابع جفت شدگی خطی و غیرخطی می باشند و μ ثابت کر می باشد. همچنین فرض کرده ایم نوسانگرهای محیط نمی توانند به طور مستقیم با یکدیگر جفت شوند. متغیرهای دینامیکی در رابطه (۲) به معنی میدان نیستند، اما وابستگی X_ω به کمیت پیوستاری ω برخلاف یک محیط شامل نوسانگرهای گسسته، بسیاری از خصوصیات یک نظریه میدان را به این سیستم می بخشد. انرژی کل سیستم توصیف توسط رابطه زیر تعریف می شود:

$$E = \frac{1}{2} \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \Omega^2 q^2 + \frac{2}{3} \mu q^4 + \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega (\dot{X}_\omega^2 + \omega^2 X_\omega^2) - \int_0^\infty d\omega \alpha_1(\omega) q X_\omega - \int_0^\infty d\omega \alpha_2(\omega) q^2 X_\omega(t) \quad (2)$$

از معادله فوق می توان برای توصیف برهم کنش یک دی الکتریک غیرخطی از نوع کر و یک میدان

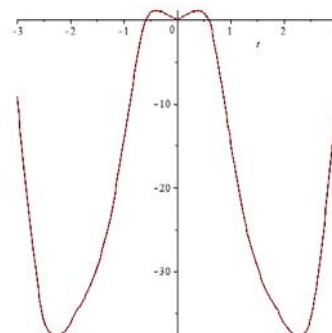


شکل (۲). شکل سه بعدی عملگر مکان نوسانگرهای

محیط $(\hat{X}_\omega(t))$ بر حسب (ω, t) برای
مورد $(\Omega = 0.5, \gamma = 1, \mu = 5, a = 1)$

مشاهده می کنیم که نوسانگرهای محیط دارای حرکت نوسانی میرایی نامنظم می باشند و در فرکانس تشدید $\omega = 0.5$ شاهد رشد شدید دامنه نوسانگرهای محیط خواهیم بود. در شکل (3,4) نمودارهای $q(t), X_\omega(t)$ برای یک ثابت کر بزرگتر $(\mu = 20)$ رسم کرده ایم. در شکل (۳) مشاهده می کنیم که در یک محدوده زمانی $-0.4 \leq t \leq 0.4$ دامنه حرکت نوسانگر غیرهماهنگ بسیار کوچک است و ذره تمایل دارد در وضعیت ترازمندی باقی بماند. در واقع با افزایش ثابت کر ذره تمایلی به حرکت در نواحی با جابه جایی مثبت ندارد و حرکت به نواحی با جابه جایی منفی محدود می شود. در شکل (۴) مشاهده می کنیم که نوسانگرهای محیط باز هم دارای نوساناتی نامنظم و میرا هستند و در فرکانس تشدید $\omega = 0.5$ باز هم شاهد رشد شدید دامنه نوسانگرهای محیط خواهیم بود.

می کند تا به ماکزیمم دامنه خود در جهت منفی در حدود $q = -39$ می رسد. سپس نوسانگر غیرخطی دامنه آن به شکل غیرخطی کاهش می یابد تا در لحظه حدود $t = -0.6$ به حالت تعادل $q = 0$ می رسد و تمامی انرژی در محیط متمرکز می شود. سپس باز هم به شکل غیر خطی دامنه آن زیاد شده تا به ماکزیمم دامنه خود در جهت مثبت که حدود $q = 2$ می رسد. سپس دامنه نوسانگر غیرهماهنگ به شکل خطی کاهش می یابد و در لحظه $t = 0$ به حالت تعادل $q = 0$ می رسد. سپس با افزایش زمان دامنه نوسانگر غیرهماهنگ به شکل خطی افزایش می یابد و به ماکزیمم دامنه خود در جهت مثبت می رسد و سپس با افزایش زمان دامنه نوسانگر به شکل غیرخطی کاهش می یابد و در لحظه $t = 0.6$ دوباره به حالت تعادل می رسد. سپس با افزایش زمان دامنه نوسانگر به شکل غیرخطی در جهت منفی افزایش می یابد و تمامی انرژی توسط نوسانگر غیرهماهنگ جذب می شود و ماکزیمم دامنه خود در حدود $q = -39$ می رسد. پس با افزایش زمان دامنه نوسانگر در جهت مثبت کاهش می یابد و در لحظه $t = 3$ به دامنه در حدود $q = -10$ می رسد در این حالت چون نوسانگر به حالت تعادل نرسیده است قسمتی از انرژی هنوز در محیط متمرکز است. همچنین در این حالت ذره متمایل است بیشتر در نواحی منفی جا به جایی حرکت کند به علاوه حرکت نسبت به زمان در نواحی مثبت و منفی متقارن است. در شکل (۲) نمودار $X_\omega(t)$ به شکل سه بعدی بر حسب زمان و فرکانس رسم شده است.



شکل (۱). نمودار عملگر مکان نوسانگر $(\hat{q}(t))$ بر حسب زمان
برای مورد $(\Omega = 0.5, \gamma = 1, \mu = 5, a = 1)$

جواب عمومی معادله (۸) به صورت زیر می باشد:

$$X_{\omega}(t) = A_0(\omega) \cos \omega t + B_0(\omega) \sin \omega t + \frac{\alpha(\omega)}{\omega} \int_0^t dt' q(t') \sin[\omega(t-t')] e^{-0^+|t-t'|} \quad (9)$$

در اینجا تعریف کرده ایم:

$$A_0(\omega) = X_{\omega}(0), \quad B_0(\omega) = \frac{1}{\omega} \dot{X}_{\omega}(0) \quad (10)$$

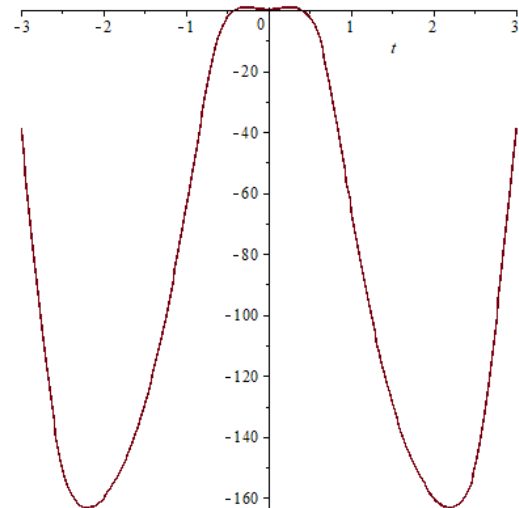
همچنین در اینجا 0^+ یک کمیت بینهایت کوچک مثبت است. مفهوم رابطه (۱۰) این است که ما می توانیم در لحظه $t=0$ یک جابه جایی دلخواه $X_{\omega}(0)$ و یک سرعت دلخواه $\dot{X}_{\omega}(0)$ بر روی محیط اعمال کنیم (البته این شرایط اولیه نیست چون جواب بالا در تمامی زمانهای t معتبر است). با قرار دادن معادله (۹) در رابطه (۷) بدست می آوریم:

$$\ddot{q} + \Omega^2 q - \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} dt' q(t') \frac{\alpha^2(\omega)}{\omega} \sin[\omega(t-t')] e^{-0^+|t-t'|} - \int_0^{\infty} d\omega \alpha(\omega) \left\{ \frac{1}{2} [A_0(\omega) + iB_0(\omega) \exp(-i\omega t) + c.c.] \right\} = 0 \quad (11)$$

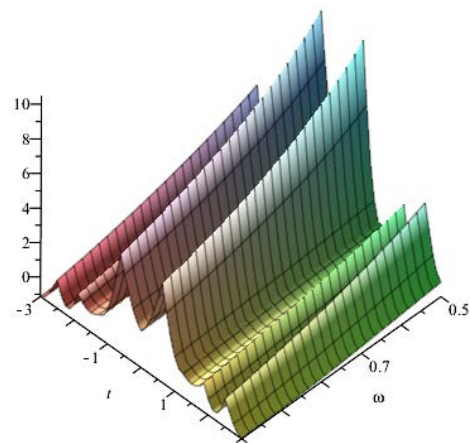
معادلات (۷) و (۸) به دلیل اینکه خطی می باشند می توانیم آنها را به شکل تحلیلی حل کنیم. به دلیل دشواری حل معادلات فوق در فضای زمان با استفاده از تبدیلات فوریه معادلات فوق را به فضای فرکانس برده و سپس جواب آنها در فضای فرکانس بدست می آوریم. سپس با استفاده از تبدیلات معکوس فوریه جواب آنها در فضای زمان بدست می آوریم. جواب معادله دیفرانسیل - انتگرال بالا به صورت زیر خواهد بود (اثبات در پیوست الف).

$$q(t) = b \exp\left(-\frac{\gamma|t|}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{\omega_1}{2}\right) + \frac{\gamma}{\omega_1} \sin\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \right], \quad \text{for } \gamma < 2\Omega \quad (12)$$

$$q(t) = b \exp(-\Omega|t|) [1 + \Omega|t|], \quad \text{for } \gamma = 2\Omega \quad (13)$$



شکل (۳). نمودار عملگر مکان نوسانگر $(\hat{q}(t))$ بر حسب زمان برای مورد $(\Omega = 0.5, \gamma = 1, \mu = 20, a = 1)$



شکل (۴). شکل سه بعدی عملگر مکان نوسانگرهای محیط $(\hat{X}_{\omega}(t))$ بر حسب (ω, t) برای مورد $(\Omega = 0.5, \gamma = 1, \mu = 20, a = 1)$

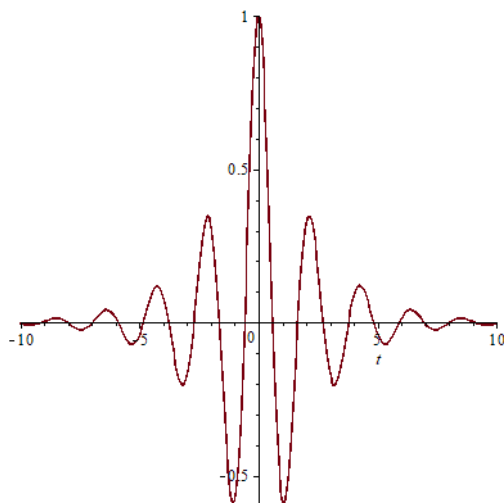
اگر از جملات غیرخطی در معادلات (۳، ۴) صرف نظر کنیم $(\mu = 0, \alpha_2(\omega) = 0)$ به معادلات حرکت برای یک نوسانگر هماهنگ ساده در یک محیط اتلافی می رسیم. در این حالت با استفاده از معادلات (۳ و ۴) می توان نوشت:

$$\ddot{q} + \Omega^2 q - \int_0^{\infty} d\omega \alpha_1(\omega) X_{\omega} = 0 \quad (7)$$

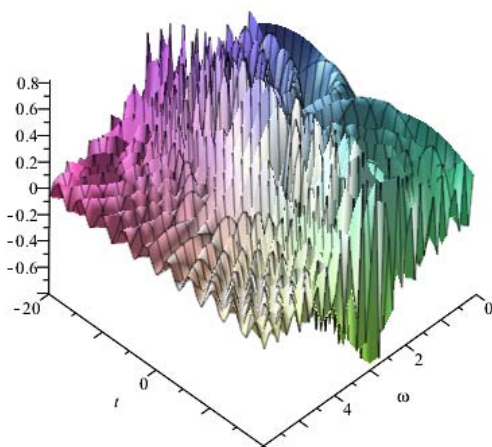
$$\ddot{X}_{\omega} + \omega^2 X_{\omega} - \alpha_1(\omega) q = 0. \quad (8)$$

پیمادی از شرایط اولیه
 $q(0) \neq 0, \dot{q}(0) = 0, \dot{X}_\omega(0) = X_\omega(0) = 0$

می‌باشد. همچنین از شکل (۶) مشخص می‌شود هنگامیکه محیط تقویت می‌شود (مقدار $|t|$ نسبت به صرافزایش می‌یابد) که در واقع از سیستم (نوسانگر هماهنگ ساده) انرژی جذب کند و در حد زمانهای بزرگ ($|t| \rightarrow \infty$) و در نزدیکی فرکانس تشدید $\omega = 3$ دامنه نوسانگرهای آن به بیشینه مقدار خود می‌رسند.



شکل (۵). نمودار عملگر مکان نوسانگر ($\hat{q}(t)$) بر حسب زمان برای مورد ($\Omega = 3, \gamma = 1, a = 1, b = 1$)



شکل (۶). شکل سه بعدی عملگر مکان نوسانگرهای

محیط ($\hat{X}_\omega(t)$) بر حسب (ω, t) برای مورد ($\Omega = 3, \gamma = 1, a = 1, b = 1$)

$$q(t) = c \exp\left(-\frac{\gamma|t|}{2}\right) \times \left[\exp\left(\frac{\gamma_1|t|}{2}\right) - \frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma + \gamma_1} \exp\left(-\frac{\gamma_1|t|}{2}\right) \right],$$

$$\text{for } \gamma < 2\Omega$$

(۱۴)

در اینجا b, c ثابتهای دلخواهی هستند و ω_1, γ_1 توسط روابط زیر تعریف می‌شوند.

$$\gamma_1 = \sqrt{\gamma^2 - 4\Omega^2}, \omega_1 = \sqrt{4\Omega^2 - \gamma^2} \quad (۱۵)$$

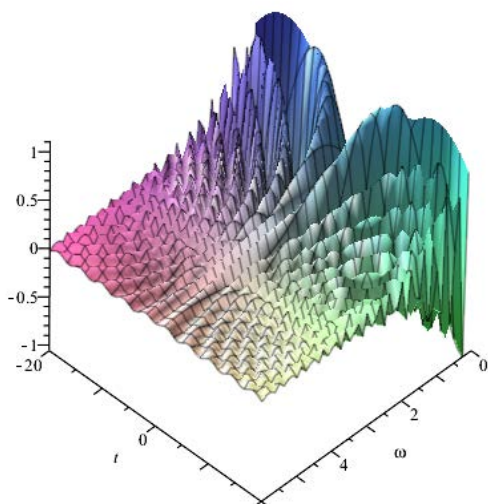
در معادلات بالا ω_1, γ_1 حقیقی هستند. حضور قدر مطلق زمان در معادلات (۱۲-۱۴) ممکن است به نظر بیاید باعث ایجاد یک ناپیوستگی در $\dot{q}(t)$ و یک تابع دلتا در $\ddot{q}(t)$ شود اما در حقیقت $q(t), \dot{q}(t)$ در همه زمانها پیوسته هستند. معادلات دینامیکی (۱۲-۱۴) دقیقاً جوابهای معادلات دیفرانسیل زیر می‌باشند:

$$\ddot{q} + \gamma\dot{q} + \Omega^2 = 0, \quad t \geq 0 \quad (۱۶)$$

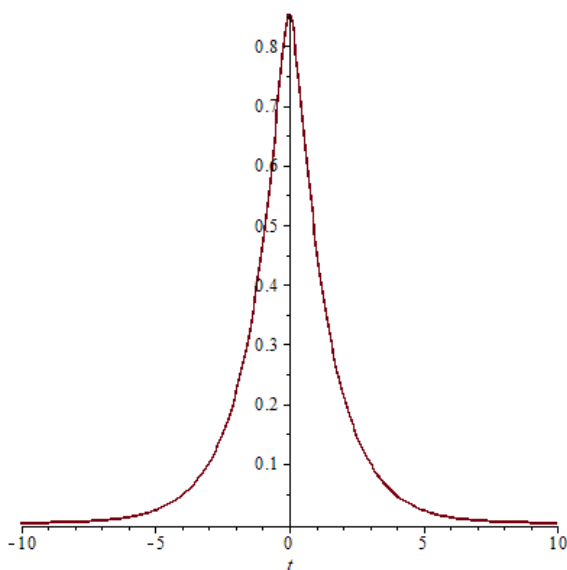
$$\ddot{q} - \gamma\dot{q} + \Omega^2 = 0, \quad (۱۷)$$

$$t \leq 0$$

با شرط اولیه $\dot{q}(0) = 0$. بنا براین ما یک میرایی اهمی و تقویت برای نوسانگر هماهنگ ساده در یک سیستم بسته بدست می‌آوریم که به روش کانونیکال می‌توانیم آنرا کوانتیزه کنیم. زمان $t = 0$ که جدا کننده زمانهای میرایی و تقویت می‌باشد کاملاً دلخواه است. در شکل (۵) نمودار q بر حسب زمان برای مورد $\gamma < 2\Omega$ یا حالت زیر میرایی رسم شده است. نوسانگر ابتدا " $t \rightarrow -\infty$ " در حالت سکون می‌باشد و تمامی انرژی در محیط متمرکز می‌باشد. با گذشت زمان دامنه نوسانگر به شکل نوسانی زیاد می‌شود و نوسانگراز محیط انرژی جذب می‌کند تا اینکه در لحظه ($t = 0$) نوسانگر به بیشینه دامنه خود می‌رسد و تمامی انرژی در نوسانگر متمرکز می‌شود. با افزایش زمان دامنه نوسانگر به شکل میرایی نوسانی کاهش می‌یابد و در ($t \rightarrow \infty$) به حالت سکون می‌رسد و تمامی انرژی خود را به محیط منتقل می‌کند. همچنین این نتایج

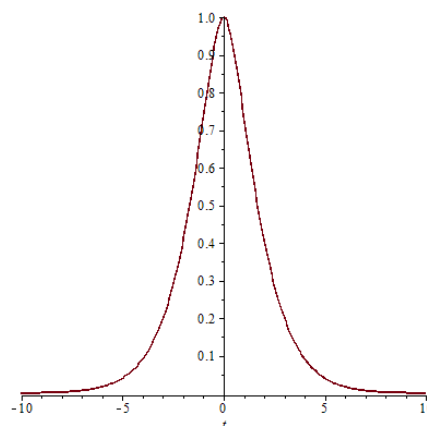


شکل (۸). شکل سه بعدی عملگر مکان نوسانگرهای محیط $(\hat{X}_\omega(t))$ بر حسب (ω, t) برای مورد $(\Omega = 1, \gamma = 2, a = 1, b = 1)$



شکل (۹). نمودار عملگر مکان نوسانگر $(\hat{q}(t))$ بر حسب زمان برای مورد $(\Omega = 2, \gamma = 6, a = 1, c = 1)$

در شکل (۷) نمودار $q(t)$ بر حسب زمان برای مورد $\gamma = 2\Omega$ یا میرایی بحرانی رسم شده است. همانطور که مشاهده می شود. ملاحظه می شود که نمودار غیر نوسانی است و در ناحیه $t < 0$ دامنه نوسانگر هماهنگ ساده تقویت می شود و نوسانگر از محیط انرژی جذب می کند. در لحظه $t=0$ نوسانگر به بیشینه دامنه خود می رسد تمامی انرژی توسط نوسانگر جذب می شود. در ناحیه $t > 0$ شاهد کاهش دامنه نوسانگر خواهیم بود و در حد زمانهای بزرگ $(t \rightarrow \infty)$ تمامی انرژی نوسانگر هماهنگ ساده به محیط منتقل می شود. در شکل (8) نمودار $X_\omega(t)$ بر حسب زمان برای مورد میرایی بحرانی رسم شده است. مشاهده می کنیم که دامنه نوسانگرهای محیط برای زمانهای بزرگ $(t \rightarrow \infty)$ هنگامیکه مقدار ω بزرگتر از صفر می شود کاهش می یابد و هیچ گونه بیشینه ای در دامنه نوسانگرهای محیط در فرکانس تشدید $\omega = 1$ دیده نمی شود. در شکل (9,10) نمودار $q(t), X_\omega(t)$ بر حسب زمان برای مورد $\gamma > 2\Omega$ یا فوق میرایی رسم شده است. مشاهده می کنیم نتایج با حالت میرایی بحرانی یکسان است با این تفاوت که دامنه نوسانگر هماهنگ ساده نسبت به مورد میرایی بحرانی کمتر است. همچنین پهنای منحنی دامنه نوسانگر ساده نسبت به حالت میرایی بحرانی کاهش داشته است.



شکل (۷). نمودار عملگر مکان نوسانگر $(\hat{q}(t))$ بر حسب زمان برای مورد $(\Omega = 1, \gamma = 2, a = 1, b = 1)$

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{1}{2}\hat{\Pi}_q^2 + \frac{1}{2}\Omega^2\hat{q}^2 + \frac{2\mu}{3}\hat{q}^4 + \\ &\frac{1}{2}\int_0^\infty d\omega (\hat{\Pi}_{X_\omega}^2 + \omega^2 \hat{X}_\omega^2) \\ &- \frac{1}{2}\int_0^\infty d\omega \alpha_1(\omega) [\hat{q}\hat{X}_\omega + \hat{X}_\omega\hat{q}] \quad (22) \\ &- \frac{1}{2}\int_0^\infty d\omega \alpha_2(\omega) [\hat{q}^2\hat{X}_\omega + \hat{X}_\omega\hat{q}^2]\end{aligned}$$

با استفاده از معادله حرکت هایزنبرگ داریم:

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = \hat{\Pi}_q, \quad \frac{d\hat{X}_\omega}{dt} = \hat{\Pi}_{X_\omega}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\Pi}_q}{dt} &= -\Omega^2\hat{q} - \frac{8}{3}\mu\hat{q}^3 \\ &+ \int_0^\infty d\omega \alpha_1(\omega) \hat{X}_\omega + \int_0^\infty d\omega \alpha_2(\omega) \hat{q}\hat{X}_\omega\end{aligned}$$

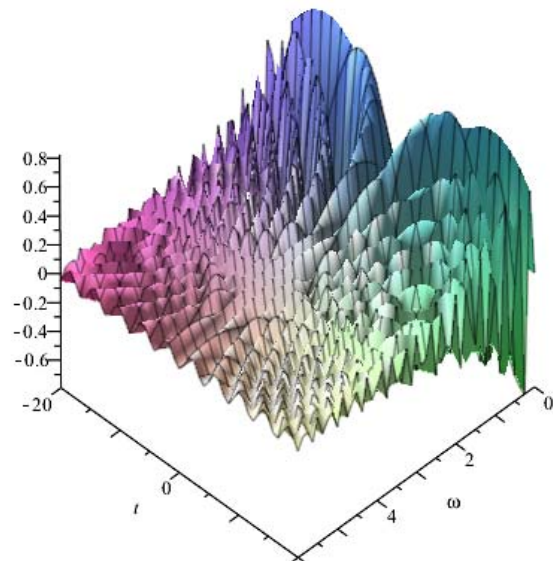
$$\frac{d\hat{\Pi}_{X_\omega}}{dt} = -\omega^2\hat{X}_\omega + \alpha(\omega)\hat{q} + \alpha_2(\omega)\hat{q}^2. \quad (24)$$

از ترکیب روابط فوق بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}\hat{q}(t) + \Omega^2\hat{q}(t) + \frac{8\mu}{3}\hat{q}^3 + \int_0^\infty d\omega \alpha_1(\omega) \hat{X}_\omega(t) \\ + \int_0^\infty d\omega \alpha_2(\omega) \hat{q}\hat{X}_\omega = 0,\end{aligned} \quad (25)$$

$$\hat{\ddot{X}}_\omega(t) + \omega^2\hat{X}_\omega(t) + \alpha_1(\omega)\hat{q} + \alpha_2(\omega)\hat{q}^2 = 0. \quad (26)$$

معادلات فوق به علت غیر خطی بودن به شکل تحلیلی قابل حل نیستند و تنها به روش عددی قابل حل می باشند. در شکل نمودار $q(t)$ بر حسب زمان رسم شده است. مشا هده می کنیم که در لحظه $t=-1$ نوسانگر در جابه جایی حدود $q(t)=2$ قرار دارد و دارای بیشینه جابه جایی در جهت مثبت است. با گذشت زمان به شکل خطی دامنه نوسانگر کاهش می یابد و انرژی خود را سریعاً به محیط منتقل می کند و در لحظه در حدود $t=-0.97$ به حالت تعادل می رسد و تمامی انرژی خود را به محیط منتقل می کند. با گذشت زمان دامنه نوسانگر در جهت



شکل (۱۰). شکل سه بعدی عملگر مکان نوسانگرهای

محیط $(\hat{X}_\omega(t))$ بر حسب (ω, t) برای مورد $(\Omega=2, \gamma=6, a=1, c=1)$

۴. کوانتش هامیلتونی

در این قسمت با تعریف اندازه حرکتیهای کانونیکال برای نوسانگر و محیط به صورت:

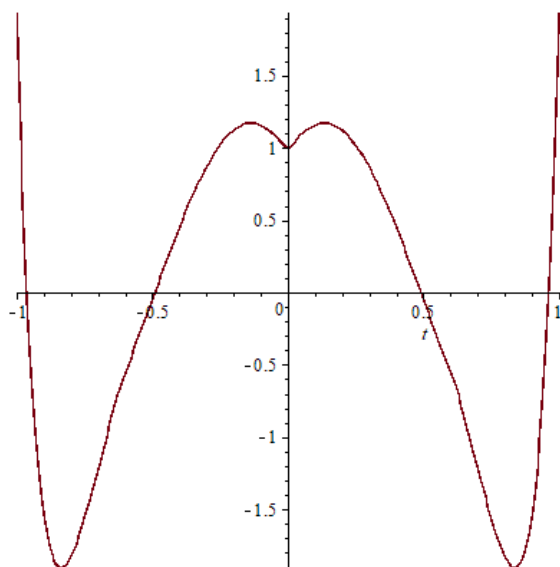
$$\Pi_q(t) = \dot{q}(t), \quad \Pi_{X_\omega}(t) = \dot{X}_\omega(t) \quad (18)$$

به کوانتش سیستم در تصویرهایزنبرگ با استفاده از روابط جابه جایی کانونیکال در زمانهای مساوی زیر می پردازیم:

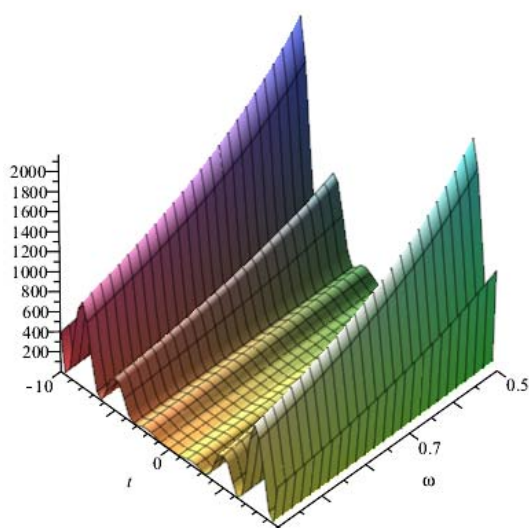
$$\begin{aligned}[\hat{q}(t), \hat{\Pi}_q(t)] &= i\hbar, \\ [\hat{X}_\omega(t), \hat{\Pi}_{X_{\omega'}}(t)] &= i\hbar\delta(\omega - \omega'),\end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}[\hat{\Pi}_{X_\omega}(t), \hat{\Pi}_{X_{\omega'}}(t)] &= 0, \\ [\hat{X}_\omega(t), \hat{X}_{\omega'}(t)] &= 0, \\ [\hat{\Pi}_q(t), \hat{X}_\omega(t)] &= 0, \\ [\hat{q}(t), \hat{X}_\omega(t)] &= 0,\end{aligned} \quad (20)$$

رابطه جابه جایی برای محیط به دلیل پیوستاری بودن فرکانس مشابه نظریه میدان می باشد. در این حالت هامیلتونی به صورت زیر خواهد بود:



شکل (۱۱). نمودار عملگر مکان نوسانگر $(\hat{q}(t))$ بر حسب زمان برای مورد $(\Omega = 1, \gamma = 1, \mu = 5, a = 1)$



شکل (۱۲). شکل سه بعدی عملگر جابه جایی نوسانگرهای محیط $(\hat{X}_\omega(t))$ بر حسب (ω, t) برای مورد $(\Omega = 1, \gamma = 1, \mu = 5, a = 1)$

منفی به شکل خطی اضافه می‌شود و در $t = -0.8$ به ماکزیمم جابه جایی خود در جهت منفی $q = -1.9$ می‌رسد. با افزایش زمان دامنه نوسانگر در جهت مثبت به شکل غیر خطی کم می‌شود و در لحظه $t = -0.5$ به حالت ترازمندی بر می‌گردد و تمامی انرژی خود را به محیط منتقل می‌کند. سپس به شکل غیرخطی دامنه آن در جهت مثبت اضافه می‌شود و در لحظه $t = -0.2$ به جابه جایی $q = 1.2$ می‌رسد. سپس به شکل غیرخطی دامنه آن کاهش یافته و در لحظه $t = 0$ به موقعیت $q = 1$ می‌رسد. سپس دوباره به شکل غیرخطی دامنه آن زیاد می‌شود و در $t = 0.2$ به وضعیت $q = 1.2$ بر می‌گردد. سپس به شکل غیر خطی دامنه نوسانگر کاهش می‌یابد و در لحظه $t = 0.5$ دوباره به حالت تعادل می‌رسد. سپس دامنه نوسانگر در جهت منفی زیاد می‌شود و در لحظه $t = 0.8$ به ماکزیمم دامنه خود در جهت منفی می‌رسد. سپس دوباره به شکل تقریباً خطی دامنه نوسانگر در جهت مثبت کم می‌شود و در لحظه در حدود $t = 0.97$ به وضعیت ترازمندی بر می‌گردد. سپس دامنه نوسانگر در جهت مثبت اضافه می‌شود و در لحظه $t = 1$ به فاصله اولیه حدود $q = 2$ در جهت مثبت بر می‌گردد و تمامی انرژی اولیه خود را کسب می‌کند. در شکل (۴) مشاهده می‌کنیم که نوسانگرهای محیط دارای حرکت نوسانی و بی‌نظم می‌باشند و در فرکانس تشدید $\omega = 0.5$ شاهد رشد سریع دامنه نوسانگرهای محیط خواهیم بود. همچنین در بازه زمانی $-3 \leq t \leq 3$ حرکت نوسانگرهای محیط غیر نوسانی می‌باشد.

در شکل (13, 14) نمودارهای $\hat{X}(t)$, $\hat{q}(t)$ برای وقتی که ثابت کررا افزایش داده‌ایم $(\mu = 20)$ رسم کرده ایم. مشاهده می‌کنیم که نوسانگر در یک محدوده زمانی $-1 \leq t \leq 1$ در وضعیت ترازمندی باقی می‌ماند. به علاوه ذره هیچ گونه تمایلی به حرکت در نواحی منفی ندارد. ضمن اینکه دامنه حرکت نیز شدیداً افزایش می‌یابد. در شکل (14) مشاهده می‌کنیم که نوسانگرهای محیط

$$\hat{q}(t) + \Omega^2 \hat{q}(t) + \int_0^\infty d\omega \alpha_1(\omega) \hat{X}_\omega(t) = 0, \quad (27)$$

$$\hat{X}_\omega(t) + \omega^2 \hat{X}_\omega(t) + \alpha_1(\omega) \hat{q} = 0. \quad (28)$$

معادلات فوق به علت خطی بودن به روشهای تحلیلی با استفاده از تبدیلات لاپلاس قابل حل می‌باشد. حال از دو طرف رابطه تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$s^2 L(\hat{q}) + \Omega^2 L(\hat{q}) - 1 + \int_0^\infty \alpha_1(\omega) L(\hat{X}) d\omega = 0 \quad (29)$$

$$s^2 L(\hat{X}) + \omega^2 L(\hat{X}) + \alpha_1(\omega) L(\hat{q}) = 0 \quad (30)$$

از رابطه (۳۰) بدست می‌آوریم:

$$(s^2 + \omega^2) L(\hat{X}) = -\alpha_1(\omega) L(\hat{q}) \quad (31)$$

با قرار دادن رابطه (۳۱) در رابطه (۲۹) بدست می‌آوریم.

$$(s^2 + \Omega^2) L(\hat{q}) - \int_0^\infty \frac{\alpha_1^2(\omega)}{s^2 + \omega^2} L(\hat{q}) d\omega = 1 \quad (32)$$

پس می‌توان نوشت:

$$L(\hat{q}) = \frac{1}{s^2 + \Omega^2 - \int_0^\infty \frac{\alpha_1^2(\omega)}{s^2 + \omega^2} d\omega} = A \quad (33)$$

همچنین با استفاده از رابطه (۳۱) داریم:

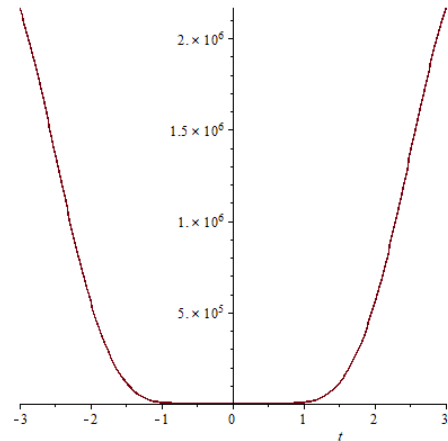
$$L(\hat{X}) = \frac{-\alpha_1(\omega)}{(s^2 + \omega^2) \left(s^2 + \Omega^2 - \int_0^\infty \frac{\alpha_1^2(\omega)}{s^2 + \omega^2} d\omega \right)} = B \quad (34)$$

بنا بر این می‌توان نوشت:

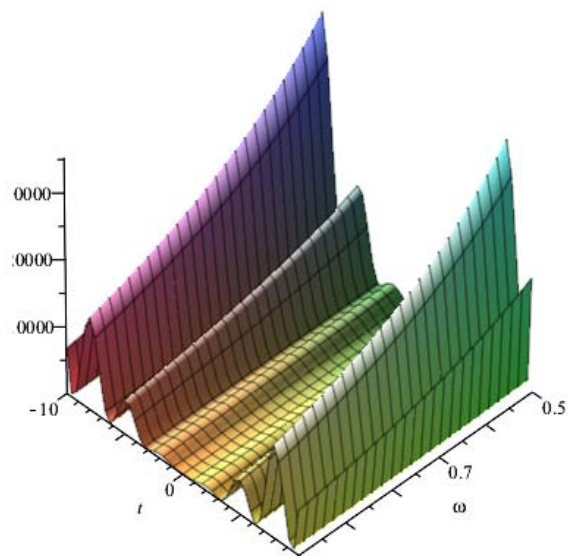
$$\hat{q} = L^{-1}(A), \hat{X}_\omega = L^{-1}(B) \quad (35)$$

در شکل نمودار $q(t)$ بر حسب زمان رسم شده است. مشاهده می‌کنیم که در لحظه $t = -10$ نوسانگر در بیشینه جابه جایی خود در جهت مثبت قرار دارد و تمامی انرژی در نوسانگر متمرکز است. سپس نوسانگر سریعاً انرژی از دست می‌دهد و در لحظه $t = -3$ نوسانگر به وضعیت تعادل

بازهم دارای حرکت نوسانی (به جز در محدوده ای از زمان) می‌باشند و در فرکانس تشدید $\omega = 0.5$ شاهد رشد سریع دامنه نوسانگرهای محیط خواهیم بود.



شکل (۱۳). نمودار عملگر مکان نوسانگر ($\hat{q}(t)$) بر حسب زمان برای مورد ($\Omega = 0.5, \gamma = 1, \mu = 20, a = 1$)



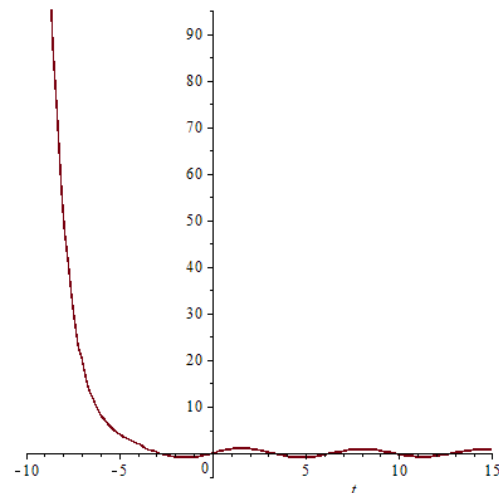
شکل (۱۴). شکل سه بعدی عملگر جابه جایی نوسانگرهای محیط ($\hat{X}_\omega(t)$) بر حسب (ω, t) برای مورد ($\Omega = 0.5, \gamma = 1, \mu = 20, a = 1$)

اگر از جملات غیرخطی در معادلات (۱۵، ۱۶) صرف نظر کنیم ($\mu = 0, \alpha_2(\omega) = 0$) به معادلات حرکت برای یک نوسانگر هماهنگ در یک محیط اتلافی می‌رسیم. در این حالت با استفاده از معادلات (۱۵ و ۱۶) می‌توان نوشت:

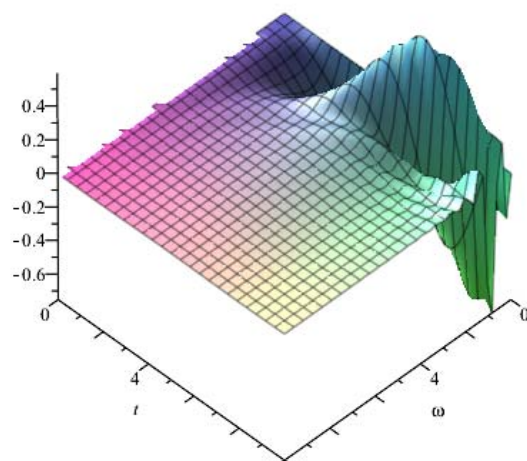
۵. بحث و نتیجه گیری

در این تحقیق به بررسی حرکت یک نوسانگر غیرهماهنگ در یک محیط اتلافی پیوستاری پرداختیم. در قسمت اول با استفاده از معادلات اوپلر- لاگرانژ معادلات حرکت را برای یک نوسانگر غیرهماهنگ بدست آوردیم. سپس برای جفت شدگی خاصی که در واقع میرایی متناسب با سرعت می باشد نمودار $q(t), X_\omega(t)$ رسم کردیم. مشاهده کردیم که در این حالت حرکت ذره غیرنوسانی می باشد و ذره متمایل است بیشتر در نواحی منفی جا به جایی حرکت کند. به علاوه حرکت ذره نسبت به برای زمانهای مثبت و منفی متقارن است. همچنین مشاهده می کنیم که نوسانگرهای محیط دارای نوساناتی بی نظم و میرا می باشند و در فرکانس تشدید $\omega = 0.5$ شاهد رشد سریع دامنه نوسانگرهای محیط خواهیم بود. علاوه بر این مشاهده کردیم که با افزایش ثابت کر است ذره تمایلی به حرکت در نواحی با جابه جایی مثبت ندارد. همچنین مشاهده کردیم که نوسانگرهای محیط بازهم دارای نوساناتی نا منظم هستند و در فرکانس تشدید $\omega = 0.5$ شاهد رشد شدید دامنه نوسانگرهای محیط خواهیم بود. در ادامه معادلات حرکت را برای موردیکه جملات غیرخطی وجود ندارد ($\mu = 0, \alpha_2(\omega) = 0$) و یک نوسانگر هماهنگ میرا با یک محیط پیوستاری برهم کنش می کند را مورد بررسی قرار دادیم. مشاهده کردیم که برای سه حالت ($\gamma < 2\Omega, \gamma = \Omega, \gamma > 2\Omega$) جوابهای متفاوتی بدست می آوریم. برای مورد $\gamma < 2\Omega$ یا حالت زیر میرایی مشاهده کردیم در حالت ($t < 0$) حرکت نوسانگر نوسانی و دامنه آن با افزایش زمان تقویت می شود و برای حالت ($t > 0$) حرکت نوسانگر نوسانی - میرایی خواهد بود. برای مورد $\gamma = 2\Omega$ یا حالت میرایی بحرانی مشاهده کردیم که نمودار مکان نوسانگر هماهنگ ساده غیر نوسانی است و در ناحیه $t < 0$ دامنه نوسانگر هماهنگ تقویت می شود و همچنین در ناحیه $t > 0$ شاهد کاهش دامنه نوسانگر خواهیم بود. همچنین مشاهده می کنیم که دامنه نوسانگرهای محیط برای زمانهای بزرگ ($t \rightarrow \infty$) و برای

می رسد. در این حالت تمامی انرژی اولیه نوسانگر به محیط منتقل می شود. سپس حرکت نوسانگر میرایی نوسانی خواهد بود و پس از مدتی تمامی انرژی خود را به محیط منتقل می کند و به نقطه تعادل می رسد. همچنین دامنه نوسانگرهای محیط در اطراف فرکانس تشدید دارای حرکت نوسانی و رشد شدید دامنه خواهند بود و در محدوده وسیعی از زمان و فرکانس هیچ گونه نوسانی نخواهند داشت.



شکل (۱۵). نمودار عملگر مکان نوسانگر $(\hat{q}(t))$ بر حسب زمان برای مورد $(\Omega = 0.3, \gamma = 1, a = 1)$



شکل (۱۶). شکل سه بعدی عملگر جابه جایی نوسانگرهای

محیط $(\hat{X}_\omega(t))$ بر حسب (ω, t) برای مورد $(\Omega = 0.3, \gamma = 1, a = 1)$

$$X_{\omega}(\omega') = \pi [A_0(\omega) + iB_0(\omega)] \delta(\omega - \omega') + \pi [A_0(\omega) - iB_0(\omega)] \delta(\omega + \omega') + P \frac{\alpha_1(\omega) q(\omega')}{\omega^2 - \omega'^2} + \frac{\alpha(\omega)}{2\omega} [\delta(\omega - \omega') - \delta(\omega + \omega')] P \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{q(\xi)}{\xi - \omega'}$$

(الف.۱)

در اینجا عدد بی نهایت کوچک 0^+ که در معادله (۶) وارد شده است باعث بوجود آمدن مقدار اصلی کوشی شده که انرا با نماد P نشان داده ایم. همچنین با تبدیل فوریه گرفتن از دو طرف روابط (۷,۸) بدست می آوریم.

$$(-\omega'^2 + \omega_0^2) q(\omega') - \int_0^{\infty} d\omega \alpha_1(\omega) X_{\omega}(\omega') = 0$$

(الف-۲)

$$(-\omega'^2 + \omega^2) X_{\omega}(\omega') - \alpha_1(\omega) q(\omega') = 0$$

(الف-۳)

با جایگزین کردن رابطه (الف-۱) در رابطه (الف-۲) بدست می آوریم.

$$\left[(\omega'^2 - \omega_0^2) q(\omega') + P \int_0^{\infty} d\omega \frac{\alpha_1^2(\omega)}{\omega^2 - \omega'^2} \right] q(\omega') + i \frac{\alpha_1^2(|\omega'|)}{2} P \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{q(\xi)}{\xi - \omega'} = -i\pi\omega' \alpha_1(|\omega'|) [A_0(|\omega'|) + i \operatorname{sgn}(\omega') B_0(|\omega'|)]$$

(الف-۴)

حال با استفاده از رابطه (۵) می توان نوشت.

$$P \int_0^{\infty} d\xi \frac{\alpha^2(\xi)}{\xi^2 - \omega^2} = \frac{\gamma^2 \omega_0^2}{\omega^2 + \gamma^2}$$

(الف-۵)

با جایگذاری رابطه (الف-۵) در رابطه (الف-۴) بدست می آوریم.

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{q(\xi)}{\xi - \omega} = -\frac{\pi\omega}{\gamma\omega_0^2} [\omega^2 + \gamma^2 - \omega_0^2] q(\omega) - \frac{\pi}{\omega_0} \left[\frac{2\pi}{\gamma} (\omega^2 + \gamma^2) \right]^{\frac{1}{2}} \times [\operatorname{sgn}(\omega) A_0(|\omega|) + iB_0(|\omega|)]$$

ω بزرگتر از صفر کاهش می یابد و هیچ گونه بیشینه ای در دامنه نوسانگرهای محیط در فرکانس تشدید $\omega = 0.5$ دیده نمی شود. همچنین برای مورد $\gamma > 2\Omega$ یا فوق میرایی مشاهده کردیم که نتایج با حالت میرایی بحرانی یکسان است با این تفاوت که دامنه نوسانگر هماهنگ ساده نسبت به مورد میرایی بحرانی کمتر است. سپس به کوانتس سیستم در تصویر هایزنبرگ با استفاده از روابط جابه جایی کانونیکال در زمانهای مساوی پرداختیم و معادلات حرکت هایزنبرگ را با استفاده از این هامیلتونی بدست آوردیم. مشاهده کردیم باز هم همانند مورد کلاسیکی حرکت ذره غیرنوسانی می باشد و در این حالت ذره متمایل است بیشتر در نواحی منفی جا به جایی حرکت کند به علاوه حرکت ذره نسبت به زمانهای مثبت و منفی متقارن است. همچنین مشاهده کردیم که نوسانگرهای محیط باز هم دارای حرکت نوسانی و بی نظم می باشند و در فرکانس تشدید $\omega = 0.5$ شاهد رشد سریع دامنه نوسانگرهای محیط خواهیم بود. وقتی که ثابت کر را افزایش داده ایم ($\mu = 20$) مشاهده کردیم ذره هیچ گونه تمایلی به حرکت در نواحی منفی ندارد ضمن اینکه دامنه حرکت نیز شدیداً افزایش می یابد. همچنین مشاهده کردیم که نوسانگرهای محیط باز هم دارای حرکت نوسانی و بی نظم می باشند و در فرکانس تشدید $\omega = 0.5$ شاهد رشد سریع دامنه نوسانگرهای محیط خواهیم بود. سپس از جملات غیرخطی صرف نظر کردیم ($\mu = 0, \alpha_2(\omega) = 0$) و معادلات حرکت برای یک نوسانگر هماهنگ کوانتومی در یک محیط اتلافی بدست آوردیم. مشاهده کردیم که در یک محدوده زمان حرکت حرکت غیر نوسانی می باشد و دامنه حرکت با گذشت زمان کاهش می یابد و محدوده ای از زمان حرکت نوسانی - میرایی خواهد بود. به علاوه دامنه نوسانگرهای محیط در اطراف فرکانس تشدید دارای حرکت نوسانی و رشد شدید دامنه خواهند بود.

ضمیمه (الف): اثبات روابط (۱۲-۱۴)

با تبدیل فوریه گرفتن از دو طرف رابطه (۹) بدست می آوریم.

medium," *Soviet Scientific Reviews Section A*, vol. 5, pp. 265–441, 1984.

- [11] S. Zaitsev, O. Shtempluck, E. Buks, and O. Gottlieb, "Nonlinear dynamics of nanomechanical resonators," *Nonlinear Dynamics*, vol. 67, no. 1, pp. 859–883, 2012.
- [12] A. Eichler et al., "Nonlinear damping in mechanical resonators made from carbon nanotubes and graphene," *Nature Nanotechnology*, vol. 6, pp. 339–342, 2011.
- [13] A. Croy, D. Midtvedt, A. Isacsson, and J. M. Kinaret, "Nonlinearities in nanomechanical resonators," *Physical Review B*, vol. 86, p. 235435, 2012.
- [14] H. D. Simaan and R. Loudon, "Quantum theory of a nonlinear oscillator interacting with a reservoir," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 11, no. 3, p. 435, 1978.
- [15] L. Gilles and P. L. Knight, "Quantum nonlinear dissipative systems," *Physical Review A*, vol. 48, no. 2, pp. 1582–1593, 1993.
- [16] L. Gilles, B. M. Garraway, and P. L. Knight, "Quantum dynamics of nonlinear oscillators," *Physical Review A*, vol. 49, no. 4, pp. 2785–2799, 1994.
- [17] R. Loudon, "The quantum theory of nonlinear optics," *Optics Communications*, vol. 49, no. 1, pp. 24–28, 1984.
- [18] M. J. Everitt et al., "Quantum dynamics of nonlinear nanomechanical systems," *arXiv preprint*, arXiv:1212.4795, 2012.
- [19] V. B. Magalinskii, "Dynamic model of a quantum dissipative system," *Soviet Physics JETP*, vol. 9, no. 6, pp. 1381–1385, 1959.
- [20] J. Tuziemski and J. K. Korbicz, "Quantum Brownian motion in nonlinear media," *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 112, no. 4, p. 40008, 2015.
- [21] D. Boyanovsky and D. Jasnow, "Quantum dynamics of dissipative nonlinear systems," *Physical Review A*, vol. 96, no. 6, p. 062108, 2017.
- [22] L. Ferialdi and A. Smirne, "Exact solution for nonlinear dissipative quantum dynamics," *Physical Review A*, vol. 96, no. 1, p. 012109, 2017.
- [23] M. Carlesso and A. Bassi, "Nonlinear effects in quantum dissipative systems," *Physical Review A*, vol. 95, no. 5, p. 052119, 2017.
- [24] H. Z. Shen et al., "Quantum dynamics of a nonlinear oscillator coupled to a reservoir," *Physical Review A*, vol. 97, no. 4, p. 042121, 2018.

(الف-۶)

با فرض اینکه $A_0(\omega) = B_0(\omega) = 0$ می توان نوشت:

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{q(\xi)}{\xi - \omega} = -\frac{\pi\omega}{\gamma\omega_0^2} [\omega^2 + \gamma^2 - \omega_0^2] q(\omega)$$

(الف-۷)

از حل معادله بالا بدست می آوریم:

$$q(\omega) = \frac{d}{(\omega^2 - \omega_0^2) + \gamma^2 \omega^2}$$

(الف-۸)

d در اینجا یک ثابت دلخواه می باشد. با تبدیل معکوس

فوریه از دو طرف معادله روابط (۱۲-۱۴) بدست می آید.

مراجع:

- [1] M. Poot and H. S. van der Zant, "Mechanical systems in the quantum regime," *Physics Reports*, vol. 511, no. 5, pp. 273–335, 2012.
- [2] A. D. O'Connell et al., "Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator," *New Journal of Physics*, vol. 15, p. 053041, 2013.
- [3] J. D. Teufel et al., "Sideband cooling of micromechanical motion to the quantum ground state," *Nature*, vol. 475, pp. 359–363, 2011.
- [4] J. Chan et al., "Laser cooling of a nanomechanical oscillator into its quantum ground state," *Nature*, vol. 478, pp. 89–92, 2011.
- [5] A. Voje, J. M. Kinaret, and A. Isacsson, "Nonlinear quantum dynamics of a graphene nanoresonator," *Physical Review B*, vol. 85, p. 205415, 2012.
- [6] S. Rips, M. Kiffner, I. Wilson-Rae, and M. J. Hartmann, "Quantum effects in a nonlinear nanomechanical resonator," *New Journal of Physics*, vol. 14, p. 023042, 2012.
- [7] J. Atalaya, A. Isacsson, and J. M. Kinaret, "Nonlinear damping in graphene nanoresonators," *Nano Letters*, vol. 8, no. 12, pp. 4196–4200, 2008.
- [8] R. Zwanzig, "Nonlinear generalized Langevin equations," *Journal of Statistical Physics*, vol. 9, no. 3, pp. 215–220, 1973.
- [9] K. Lindenberg and V. Seshadri, "Nonlinear dissipative systems: Exact solutions," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 109, no. 3, pp. 483–499, 1981.
- [10] M. Dykman and M. Krivoglaz, "Theory of nonlinear oscillators interacting with a

- Physical Journal Plus*, vol. 135, no. 2, p. 243, 2020.
- [31] V. P. Tatarskii, "On the theory of quantum dissipative systems," *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 30, no. 2, p. 134, 1987.
- [32] H. Grabert and U. Weiss, "Quantum theory of a nonlinear oscillator coupled to a heat bath," *Zeitschrift für Physik B*, vol. 55, no. 1, pp. 87–94, 1984.
- [33] B. Huttner and S. M. Barnett, "Quantization of the electromagnetic field in dielectric media," *Physical Review A*, vol. 46, no. 7, p. 4306, 1992.
- [34] T. G. Philbin, "Quantum theory of light in dispersive media," *New Journal of Physics*, vol. 12, p. 123008, 2010.
- [35] T. G. Philbin, "Canonical quantization of macroscopic electromagnetism," *New Journal of Physics*, vol. 13, p. 063026, 2011.
- [25] S. H. Lim et al., "Quantum simulations of nonlinear dissipative systems," *Journal of Statistical Physics*, vol. 170, no. 2, pp. 351–365, 2018.
- [26] P. Bialas, J. Spiechowicz, and J. Łuczka, "Quantum nonlinear oscillator with memory effects," *arXiv preprint*, arXiv:1805.04012, 2018.
- [27] P. Bialas and J. Łuczka, "Entropy production in nonlinear quantum systems," *Entropy*, vol. 20, no. 2, p. 123, 2018.
- [28] G. W. Ford, "Quantum Brownian motion with nonlinear couplings," *Contemporary Physics*, vol. 58, no. 3, pp. 244–255, 2017.
- [29] S. F. Yuki and D. Shinichi, "Exact master equation for nonlinear quantum dissipative systems," *Physical Review A*, vol. 101, no. 2, p. 022105, 2020.
- [30] K. Fardin, "Quantum dynamics of anharmonic oscillators in dissipative media," *The European*

Quantum Dynamics of an Anharmonic Oscillator in a Continuous Dissipative Environment

Mohsen Daei Mohammad¹, Mohammad Nili Ahmadabadi²

Abstract:

In this research, we investigate the motion of an anharmonic oscillator in a continuous dissipative environment. In the first part, using the Euler-Lagrange equations, we derive the equations of motion for an anharmonic oscillator. Then, for a specific coupling which essentially represents velocity-proportional damping, we examine the temporal variations of the amplitude of the anharmonic oscillator and the amplitudes of the environmental oscillators. Subsequently, we study the equations of motion for the case where nonlinear terms are absent and a damped harmonic oscillator interacts with a continuum environment. In this case, for three different scenarios under damping, critical damping, and overdamping we analyze the temporal changes in the amplitude of the anharmonic oscillator and the amplitudes of the environmental oscillators. We then proceed to quantize the system in the Heisenberg picture using canonical commutation relations at equal times and obtain the Heisenberg equations of motion. Finally, we examine the graphs of the position coordinates of the anharmonic oscillator and the environmental oscillators.

Keywords: Damped anharmonic oscillator, Continuum environment, Hamiltonian quantization, Velocity-proportional damping.

1 -Department of Physics, Najafabad Branch, Islamic Azad University, Najafabad, Iran

2- Department of Mathematics, Najafabad Branch, Islamic Azad University, Najafabad, Iran