بسم الله الرحمن الرحیم

فرآیندهای تصادفی

مبحث سوم: طیف توان و بسط های متعامد فرآیند های تصادفی
دکتر آقاجانی

دانشکده برق دانشگاه آزاد اسلامی واحد نجف آباد

۱- معرفی طیف توان و انرژی

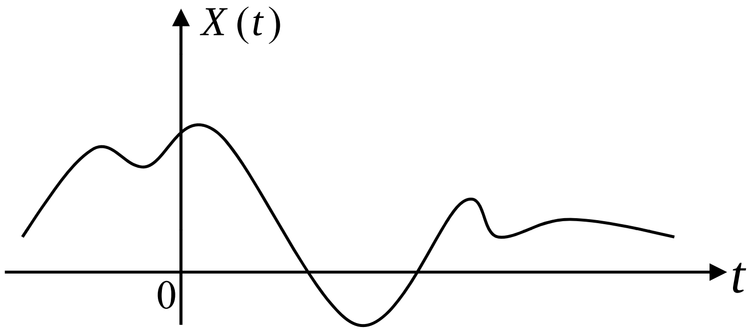
سیگنال های یقینی

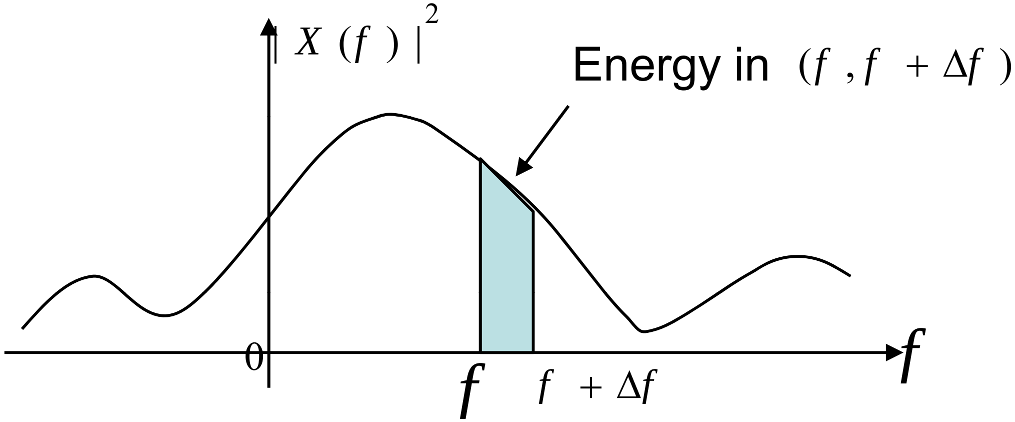
- توان لحظه ای سیگنال $|x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$
- انرژی سیگنال $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$
- توان سیگنال $P_x = <|x(t)|^2>_t$
- اگر $E_x \neq 0, \infty$، سیگنال انرژی
- اگر $P_x \neq 0, \infty$ ، سیگنال توان
- اگر تبدیل فوریه سیگنال همگرا باشد، $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$ آنگاه با استفاده از رابطه پارسوال می توان انرژی سیگنال در حوزه فرکانس را نیز به دست آورد:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df .$$

طیف انرژی

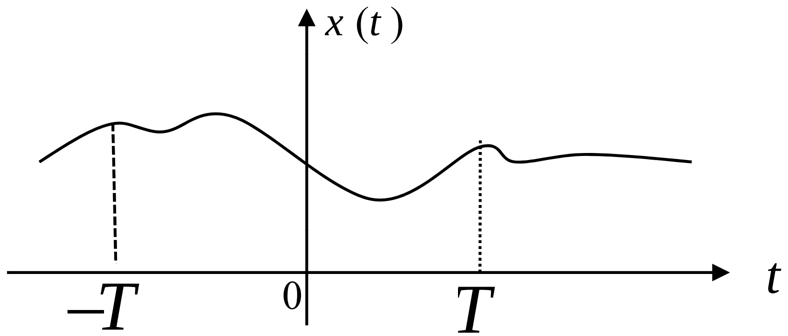
- به $|X(f)|^2$ طیف انرژی سیگنال می گوییم . زیرا چگونگی توزیع انرژی سیگنال E در مولفه های فرکانسی مختلف را نشان می دهد.





سیگنال توان

- برای سیگنال های انرژی تبدیل فوریه معمولاً همگراست، در مورد سیگنال های توان ممکن است تبدیل فوریه همگرا نشود. با محدود کردن این سیگنال ها می توان آنها را از نوع انرژی کرد تا تبدیل فوریه آنها همگرا شود.



$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| < T \\ 0, & |t| > T \end{cases} \qquad x_T(t) \xrightarrow{FT} X_T(f)$$

- طیف توان

$$S_x(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{2T} = \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^{T} X(t) e^{-j2\pi ft} dt \right|^2$$

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$$

طیف توان فرآیندهای تصادفی

- تبدیل فوریه سیگنال تصادفی (حتی محدود شده)، یک سیگنال تصادفی خواهد بود. بنابراین از این تبدیل، ویژگی خاصی که کار کردن با آن راحت باشد حاصل نمی‌شود. اما از طیف توان فرآیند ها می توان در حوزه فرکانس استفاده کرد.
- توان لحظه ای فرآیند $E[|x(t)|^2] = R_x(t,t) \overset{wss}{=} R_x(0)$
- انرژی فرآیند $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} E[|x(t)|^2]dt = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(t,t)dt \overset{wss}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(0)dt = \infty$
- توان فرآیند $P_x = \langle E[|x(t)|^2] \rangle_t = \langle R_x(t,t) \rangle_t \overset{wss}{=} \langle R_x(0) \rangle_t = R_X(0)$
- طیف انرژی فرآیند محدود شده $E[|X_T(f)|^2]$
- طیف توان فرآیند $S_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E[|X_T(f)|^2]$

رابطه طیف توان و تابع همبستگی

$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty} E\left\{\frac{|X_T(f)|^2}{2T}\right\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} E\{X(t_1)X^*(s)\}e^{-j2\pi f(t_1-s)}dt_1 ds$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} R_x(t_1,s)e^{-j2\pi f(t_1-s)}dt_1 ds$$

- با تغییر متغیر $t_1 = t+\tau, s = t$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{t=-T}^{T}\int_{\tau=-T-t}^{T-t} R_X(t+\tau,t)e^{-j2\pi f(\tau)}d\tau dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{t=-T}^{T}\int_{\tau=-\infty}^{\infty} R_X(t+\tau,t)e^{-j2\pi f(\tau)}d\tau dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} R_X(t+\tau,t)dt\right)e^{-j2\pi f(\tau)}d\tau$$

$$S_X(f) = FT_\tau\{< R_X(t+\tau,t) >_t\}$$

فرآیند WSS

- با توجه به اینکه در فرآیند WSS تابع همبستگی تابعی از زمان نیست:

$$
\begin{aligned}
S_X(f) &= FT_\tau\{< R_X(t+\tau, t) >_t\} \\
&= FT_\tau\{< R_X(\tau) >_t\} \\
&= FT_\tau\{R_X(\tau)\}
\end{aligned}
$$

- **Wiener-Khinchin Theorem**

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

طیف توان متقابل

- در حالت کلی

$$S_{XY}(f) = FT_{\tau}\{< R_{XY}(t+\tau,t) >_t\}$$

- فرآیندهای Xو Y هر دو WSS

$$S_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

مثال

- طیف توان فرآیند نویز سفید؟
- طیف توان فرآیند سیگنال تلگرافی با λ ثابت؟
- طیف فرکانسی یک مولفه فرکانسی با فرکانس مشخص ولی دامنه و فاز تصادفی

$$X(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + B)}$$

- طیف فرکانسی چند مولفه فرکانسی با فرکانسهای مشخص ولی دامنه و فاز تصادفی

$$X(t) = \sum_i A_i e^{j(2\pi f_i t + B_i)}$$

- طیف فرکانسی مولفه فرکانسی با فرکانس تصادفی و فاز تصادفی

$$X(t) = k\cos(2\pi A t + B)$$

نکات طیف توان

۱. طیف توان، توزیع توان (Px) بین فرکانس های مختلف را نشان می دهد و طیف توان متقابل همبستگی بین مولفه های فرکانسی فرآیند را نشان می دهد.

۲. طیف توان تابعی حقیقی وغیر منفی(حتی برای فرآیندهای مختلط) است.

- *اگر فرآیند حقیقی باشد، طیف توان تابعی زوج است.*

۳. طیف توان متقابل تابعی است مختلط(حتی برای فرآیند های حقیقی)

- *اگر فرآیند حقیقی باشد، طیف توان متقابل تقارن هرمیتیک دارد.*

۴. درحالت کلی $S_{X+Y}(f)=S_X(f)+S_Y(f)+S_{XY}(f)+S_{YX}(f)$

- *برای فرآیندهای متعامد* $S_{X+Y}(f)=S_X(f)+S_Y(f)$

۵. نامساوی زیر درحالت کلی برقرار است: $|S_{XY}(f)|^2\le S_X(f)S_Y(f)$

ادامه

۶. درحالت کلی:

$$S_X(f) = S_{\tilde{X}}(f) + S_{m_X}(f)$$

- ➢ در مورد فرایند های **WSS**

$$S_X(f) = S_{\tilde{X}}(f) + |m_x|^2 \delta(f)$$

۷. در فرآیندهای **WSS** از نبودن ضربه در مبدأ طیف توان می توان نتیجه گرفت که $m_x = 0$ است.

۸. از نبودن مولفه فرکانسی مشترک بین دو فرآیند توأماً **WSS** می توان تعامد و ناهمبستگی آن دو را نتیجه گرفت.

$$\forall f \in \mathbb{R} \qquad S_X(f) S_Y(f) = 0$$

$$|S_{XY}(f)|^2 \le S_X(f) S_Y(f) = 0$$

$$\Rightarrow |S_{XY}(f)|^2 \le 0$$

$$\Rightarrow |S_{XY}(f)|^2 = 0$$

$$\Rightarrow R_{XY}(\tau) = 0$$

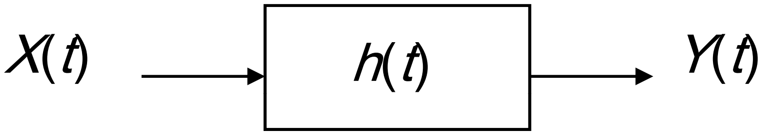
نکات تابع همبستگی

- تابع همبستگی دارای تقارن هرمینیک است.
- نامساوی شوارتز به صورت روبرو برقرار است: $|R_X(t,s)|^2 \le R_X(t,t)R_X(s,s)$
- در فرآیندهای ساکن و حقیقی از تساوی $R_X(T_0)=R_X(0)$ می توان متناوب بودن تابع همبستگی را نتیجه گرفت.
- از متناوب بودن تابع همبستگی فرآیندهای ساکن و حقیقی می توان متناوب بودن فرایند (به مفهوم ms) را نتیجه گرفت.
- خواص فوق برای تابع کوواریانس نیز برقرار است.

۳-طیف توان در ورودی و خروجی سیستم LTI

سیستم های خطی

$$R_X(\tau) \leftrightarrow S_X(f) \geq 0$$



- اگر X یک فرآیند WSS باشد:

$$R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h^*(-\tau), \quad R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h^*(-\tau) * h(\tau).$$

$$S_{XY}(f) = \mathcal{F}\{R_X(\tau) * h^*(-\tau)\} = S_X(f) H^*(f)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h^*(-\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt\right)^* = H^*(f),$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$S_Y(f) = \mathcal{F}\{R_Y(\tau)\} = S_{XY}(f) H(f)$$

$$= S_X(f) |H(f)|^2 .$$

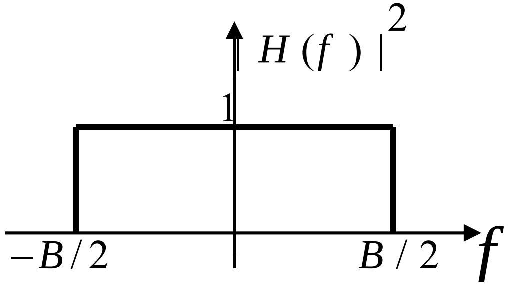
مثال ۱

- یک فرآیند نویز سفید WSS از یک فیلتر پایین گذر با پهنای باند B/2 عبور می کند تابع همبستگی خروجی را بیابید؟

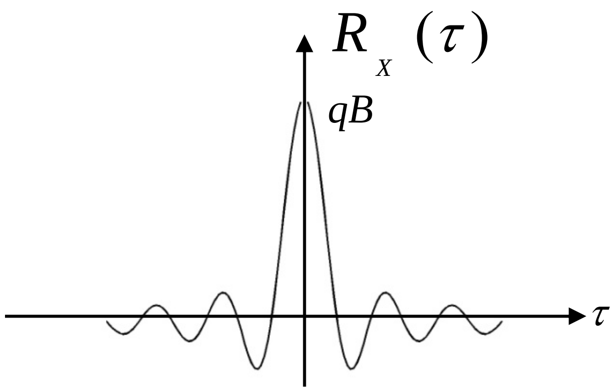
$$S_X(\omega) = q\,|H(f)|^2 = \begin{cases} q, & |f| \le B/2 \\ 0, & |f| > B/2 \end{cases}.$$

$$R_X(\tau) = \int_{-B/2}^{B/2} S_{XX}(f) e^{j2\pi f\tau} df = q\int_{-B/2}^{B/2} e^{j2\pi f\tau} df$$

$$= qB\,\frac{\sin(B\tau/2)}{(B\tau/2)} = qB\,\operatorname{sinc}(B\tau/2)$$



(a) LPF



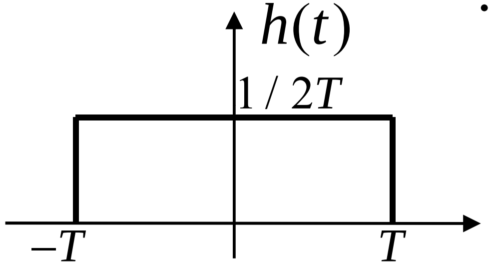
(b)

مثال ۲

- طیف سیگنال Y برحسب X را به دست آورید.

$$Y(t)=\frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T}X(\tau)d\tau$$

حل:

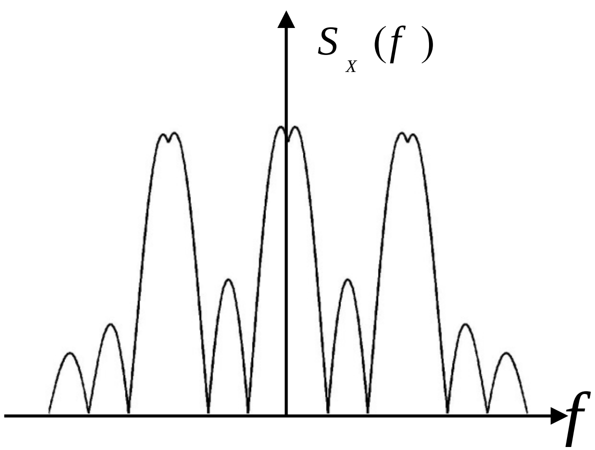


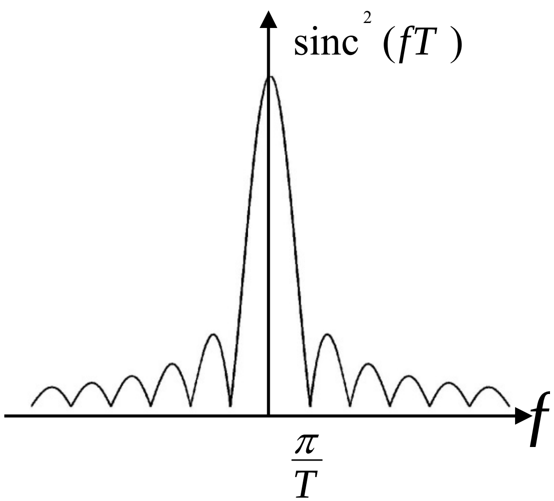
$$Y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)X(\tau)d\tau=h(t)*X(t)$$

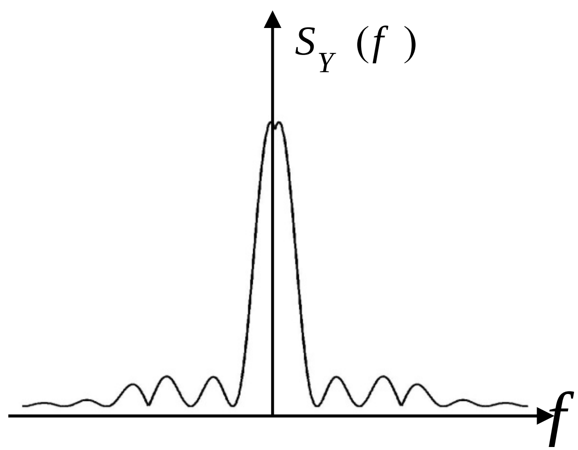
$$S_Y(f)=S_X(f)\,|H(f)|^2\,.$$

$$H(f)=\int_{-T}^{+T}\tfrac{1}{2T}e^{-j2\pi ft}dt\;=\mathrm{sinc}(fT)$$

$$S_Y(f)=S_X(f)\,\mathrm{sinc}^2(fT).$$







۴- بسط های متعامد فرآیند ها

بسط متعامد

- اگر مجموعه $\{\phi_n(t)\}$ در فاصله $t \in [a,b]$ متعامد باشندیعنی:

$$\int_a^b \phi_i(t)\phi_j^*(t)dt = \begin{cases} E_i, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

- می توان یک تابع دلخواه مثل X(t) را با رابطه ای خطی در فاصله a تا b برحسب توابع $\{\phi_n(t)\}$ بسط داد.

$$\hat{X}(t) = \sum_n C_n \phi_n(t) \quad t \in [a,b]$$

- به گونه ای که

$$\int_a^b |X(t) - \hat{X}(t)|^2 dt = Min$$

- در نتیجه:

$$C_n = \frac{1}{E_n}\int_a^b X(t)\phi_n^*(t)dt$$

بسط متعامد فرآیند تصادفی

- تبدیل فرآیند(تعداد غیر قابل شمارش متغیر تصادفی) به تعداد قابل شمارش متغیر تصادفی Cn)
- اگر فرآیند نرمال باشد، ضرایب نیز یکسری متغیرهای تصادفی توأماً نرمال خواهند بود.
- با انتخاب مناسب توابع متعامد ممکن است بسطی به دست آید که بسیاری از این ضرایب قابل اغماض باشند.(دارای واریانس کوچک)
- با انتخاب مناسب توابع متعامد می توان ضرایب را ناهمبسته کرد.

بسط سری فوریه فرآیند ساکن و متناوب

- فرآیند ساکن با تابع همبستگی متناوب را در نظر بگیرید:

$$R(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\gamma_n e^{jn\omega_0\tau}, \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T} \qquad \gamma_n=\frac{1}{T}\int_0^T R(\tau)e^{-jn\omega_0\tau}d\tau.$$

- در واقع توابع $\{e^{jn\omega_0 t}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ یک مجموعه متعامد در بازه $-\frac{T_0}{2}<t<\frac{T_0}{2}$ می باشند:

$$\hat{X}(t)\doteq\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{-jk\omega_0 t}, \qquad -\frac{T_0}{2}<t<\frac{T_0}{2}.$$

$$c_k=\frac{1}{T}\int_0^T X(t)e^{jk\omega_0 t}dt$$

خواص بسط فوریه

- در حالت کلی داریم:

$$\begin{cases} E[C_k]=0, & n\neq 0 \\ E[C_k]=m_X, & n=0 \end{cases}$$

- ضرایب ناهمبسته و متعامد هستند و برای فرآیند نرمال مستقل هم هستند.

$$E[c_k c_m^*]=\begin{cases} \gamma_m>0, & k=m \\ 0 & k\neq m. \end{cases}$$

- اثبات:

$$E[c_k c_m^*]=\frac{1}{T^2}E[\int_0^T X(t_1)e^{jk\omega_0 t_1}dt_1\int_0^T X^*(t_2)e^{-jm\omega_0 t_2}dt_2]$$

$$=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_X(t_2-t_1)e^{jk\omega_0 t_1}e^{-jm\omega_0 t_2}dt_1dt_2$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{[\frac{1}{T}\int_0^T R_X\underbrace{(t_2-t_1)}_{\tau}e^{-jm\omega_0\overbrace{(t_2-t_1)}^{\tau}}d\underbrace{(t_2-t_1)}_{\tau}]}_{\gamma_m}e^{-j(m-k)\omega_0 t_1}dt_1$$

$$=\gamma_m\underbrace{\{\frac{1}{T}\int_0^T e^{-j(m-k)\omega_0 t_1}dt_1\}}_{\delta_{m,k}}$$

بسط KL

- بسط Karhunen-Loeve بسطی است بر حسب توابع ویژه تابع همبستگی فرآیند تصادفی
- جوابهای معادله انتگرالی در فاصله $t \in [a,b]$ ، توابع ویژه یک تابع همبستگی هستند:

$$\int_a^b R_x(t,s)\varphi_m(s)ds = \lambda_m \varphi_m(t), \quad t \in [a,b] \quad m = 1 \rightarrow \infty.$$

- به ازای هر تابع ویژه $\varphi_m(t)$ یک مقدار ویژه λ_m وجود دارد.
- توابع ویژه متناظر با مقادیر ویژه متفاوت، متعامدند. $\int_a^b \varphi_k(t)\varphi_n^*(t)dt = \delta_{k,n}$
- با در نظر گرفتن تمام توابع ویژه نرمالیزه(با انرژی واحد) یک مجموعه ارتونرمال $\{\varphi_m(t)\}$ تشکیل می شود.

ادامه بسط KL

- اگر تابع همبستگی پیوسته باشد رابطه Mercer را می توان نوشت:

$$R_X(t,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\phi_k(t)\phi_k^*(s),\quad a<t,s<b,$$

- با استفاده از توابع ویژه تابع همبستگی می توان بسط KL را به صورت زیر نوشت:

$$\hat{X}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_k\phi_k(t)\quad t\in[a,b]$$

$$c_k=\int_a^b X(t)\varphi_k^*(t)dt$$

خواص بسط KL

- ضرایب بسط KL فرآیند نرمال، توأماً نرمال هستند.
- اگر متوسط فرآیند صفر باشد، متوسط همه ضرایب صفر خواهد بود.
- ضرایب بسط یکسری متغیر تصادفی متعامد می شوند که در صورت صفر بودن متوسط، ناهمبسته نیز هستند و در صورت نرمال بودن فرآیند، توأماً مستقل هم می‌شوند.

$$E[c_k c_m^*] = E\left[\int_a^b X(t)\varphi_k^*(t)dt \int_a^b X^*(s)\varphi_m(s)ds\right]$$

$$= \int_a^b \varphi_k^*(t)\int_a^b E\{X(t)X^*(s)\}\ \varphi_m(s)dsdt$$

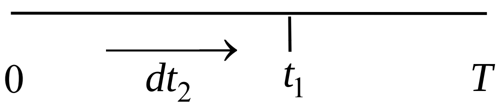
$$= \int_a^b \varphi_k^*(t)\left\{\int_a^b R_X(t,s)\ \varphi_m(s)ds\right\}dt$$

$$= \int_a^b \varphi_k^*(t)\{\ \lambda_m \phi_m(t)\}dt = \begin{cases} \lambda_k, & k=m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

مثال

- بسط KL فرآیند وینر در بازه 0 تا T را به دست آورید؟
- حل:

$$R_{xx}(t_1,t_2) = \alpha \min(t_1,t_2) = \begin{cases} \alpha t_2 & t_1 > t_2 \\ \alpha t_1 & t_1 \le t_2 \end{cases}, \qquad \alpha > 0$$



- معادله انتگرالی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\int_0^T R_{XX}(t_1,t_2)\varphi_k(t_2)dt_2 = \int_0^{t_1} R_{XX}(t_1,t_2)\varphi_k(t_2)dt_2$$
$$+\int_{t_1}^T R_{XX}(t_1,t_2)\varphi_k(t_2)dt_2 = \lambda_k \varphi_k(t_1),$$

ادامه حل مثال

- با جایگذاری همبستگی

$$\int_0^{t_1} \alpha t_2 \ \varphi_k(t_2)dt_2 + \int_{t_1}^{T} \alpha t_1 \ \varphi_k(t_2)dt_2 = \lambda_k \varphi_k(t_1).$$

- با مشتق گیری نسبت به t1

$$\alpha \ t_1\varphi_k(t_1) + (-1)\alpha t_1\varphi_k(t_1) + \alpha\int_{t_1}^{T} \varphi_k(t_2)dt_2 = \lambda_k \varphi'_k(t_1)$$

- با ساده کردن

$$\alpha\int_{t_1}^{T} \varphi_k(t_2)dt_2 = \lambda_k \varphi'_k(t_1).$$

- یکبار دیگر مشتق می گیریم:

$$\alpha(-1)\varphi_k(t_1) = \lambda_k \varphi''_k(t_1)$$

ادامه حل مثال

- به معادله دیفرانسیل زیر می رسیم:

$$\frac{d^2\varphi_k(t_1)}{dt_1^2}+\frac{\alpha}{\lambda_k}\varphi_k(t_1)=0,$$

- حل معادله دیفرانسیل

$$\varphi_k(t)=A_k\cos\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_k}}t+B_k\sin\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_k}}t.$$

- شرایط اولیه معادله دیفرانسیل؟
- با جایگذاری در معادله و مشتق معادله انتگرالی

$$\varphi_k(0)=0, \qquad \varphi'_k(T)=0.$$

ادامه حل مثال

- با استفاده از شرایط اولیه

$$\varphi_k(0) = A_k = 0, \qquad k = 1 \to \infty,$$

$$\varphi'_k(t) = B_k \sqrt{\tfrac{\alpha}{\lambda_k}} \cos \sqrt{\tfrac{\alpha}{\lambda_k}}\, t,$$

$$\varphi'_k(T) = B_k \sqrt{\tfrac{\alpha}{\lambda_k}} \cos \sqrt{\tfrac{\alpha}{\lambda_k}}\, T = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\tfrac{\alpha}{\lambda_k}}\, T = (2k-1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_k = \frac{\alpha T^2}{(k-\frac{1}{2})^2 \pi^2}, \qquad k = 1 \to \infty.$$

ادامه حل مثال

- همچنین

$$\varphi_k(t) = B_k \sin\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_k}}\; t, \qquad 0 \le t \le T.$$

- از نرمالیزه بودن

$$\int_0^T \varphi_k^2(t)dt = B_k^2 \int_0^T \left(\sin\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_k}}\; t\right)^2 dt = B_k^2 \left[\int_0^T \left(\frac{1-\cos 2\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_k}}\; t}{2}\right) dt\right]$$

$$= B_k^2 \left(\frac{T}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_k}}\; t}{2\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_k}}}\Bigg|_0^T\right) = B_k^2 \left(\frac{T}{2} - \frac{\sin(2k-1)\pi - 0}{4\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_k}}}\right) = B_k^2\,\frac{T}{2} = 1$$

$$\Rightarrow B_k = \sqrt{2/T}.$$

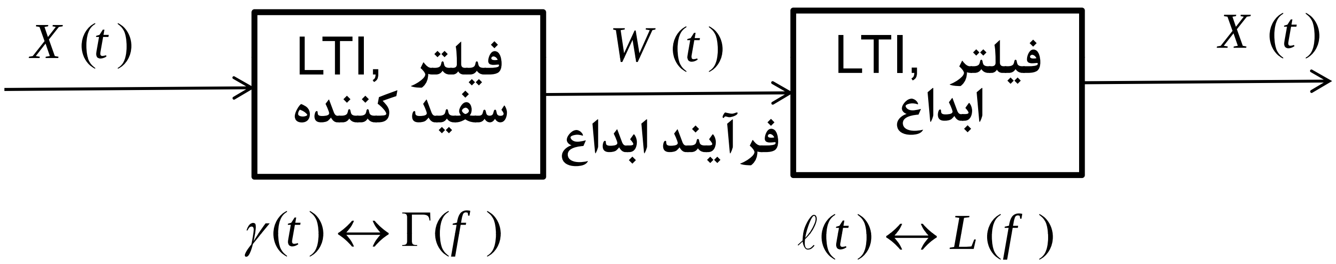
- در نتیجه

$$\varphi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\; \sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_k}}\; t\right) = \sqrt{\frac{2}{T}}\; \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{T},$$

۵–فرآیند ابداع و بسط یک فرآیند بر حسب فرآیند ابداع

فرآیند ابداع

- فرآیند سفید و نرمالیزه که با فرآیند مورد نظر بطور خطی و علی معادل است.



- شروط مطابق با فیلتر های فوق

1) $\Gamma(f)L(f) = 1$

2) $S_W(f)\,|L(f)|^2 = S_X(f) \quad \Rightarrow \qquad |L(f)| = \sqrt{(S_X(f)}$

3) علیـــــــت

- تابعی باید با دامنه فوق و فازی که سیستم را علی کند در نظر بگیریم؟!

شرط پالی- وینر

- شرط لازم و کافی برای علی شدن تابع تبدیل با دامنه مفروض به صورت زیر است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(|H|)}{1+f^{2}} df \neq \infty$$

- مثلا اگر |H| در بازه ای صفر باشد قابل علی کردن نیست!!!
- جواب منحصر بفرد ندارد.
- اگر H و وارون آن هر دو علی باشند (جواب مینیمم فاز) آنگاه جواب منحصربفرد خواهیم داشت.

رابطه خطی و علی بین فرآیند و فرآیند ابداعش

$$X(t) = \int_{0}^{+\infty} \ell(\alpha) W(t-\alpha) d\alpha = \int_{0}^{t} \ell(t-\alpha) W(\alpha) d\alpha$$

$$W(t) = \int_{0}^{+\infty} \gamma(\alpha) X(t-\alpha) d\alpha$$

روش تعیین فیلتر ابداع و سفید کننده

- تجزیه چگالی طیف توان

$$S_X(f) = K^2 \frac{\prod_{i=1}^{M} (j2\pi f - z_i)(j2\pi f - z_i^*)}{\prod_{k=1}^{N} (j2\pi f - p_k)(j2\pi f - p_k^*)}$$

$$S_X(f) = |L(f)|^2 = L(f) L^*(f)$$

- صفرها و قطبهای سمت چپ را جدا می کنیم
  - *برای علی بودن فیلتر ابداع و عکس آن (فیلتر سفید کننده):*

$$L(f) = K \frac{\prod_{i=1}^{M} (j2\pi f - z_i)}{\prod_{k=1}^{N} (j2\pi f - p_k)} \qquad \Gamma(f) = \frac{1}{L(f)}$$

مثال

- فیلتر ابداع و سفید کننده فرآیند تلگرافی را به دست آورید؟

$$R_X(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|},$$

$$S_X(f) = \frac{4\lambda}{4\lambda^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{(\sqrt{4\lambda})^2}{(2\lambda + j2\pi f)(2\lambda - j2\pi f)} = L(f)L^*(f)$$

$$L(f) = \frac{\sqrt{4\lambda}}{2\lambda + j2\pi f}$$

$$\Gamma(f) = \frac{1}{L(f)} = \sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{4\lambda}} j2\pi f$$

$$\ell(t) = \sqrt{4\lambda}\, e^{-2\lambda t} u(t)$$

$$\gamma(t) = \sqrt{\lambda}\,\delta(t) + \frac{1}{\sqrt{4\lambda}}\delta'(t)$$

$$X(t) = \sqrt{4\lambda} \int_0^\infty e^{-2\lambda\alpha} W(t-\alpha)\, d\alpha$$

$$W(t) = \sqrt{\lambda}\, X(t) + \frac{1}{\sqrt{4\lambda}} X'(t)$$