بسم الله الرحمن الرحیم

فرآیندهای تصادفی

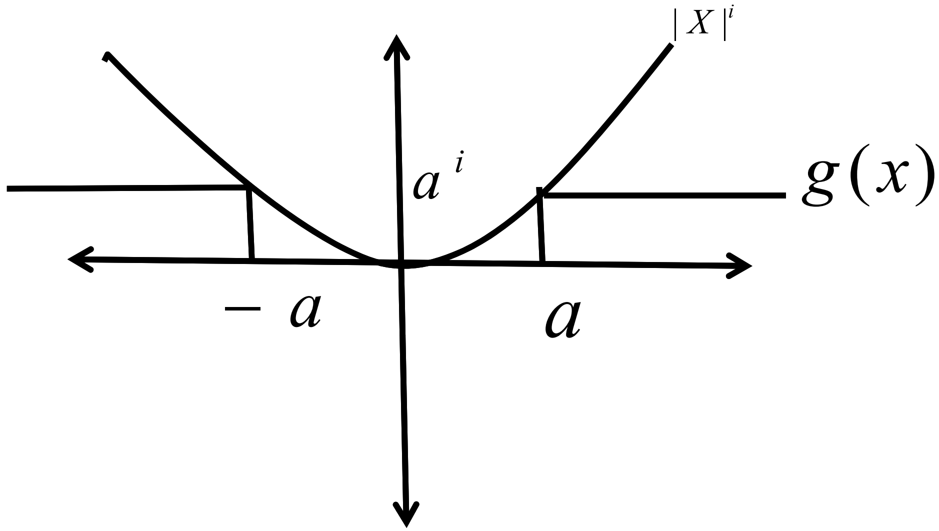
مقدمه ای بر فرآیند های تصادفی

دکتر آقاجانی

۳- امید ریاضی

نامساوی تعمیم یافته چبی شف

$$Pr\{|X| \geq \alpha\} \leq \frac{E[|X|^i]}{\alpha^i}$$



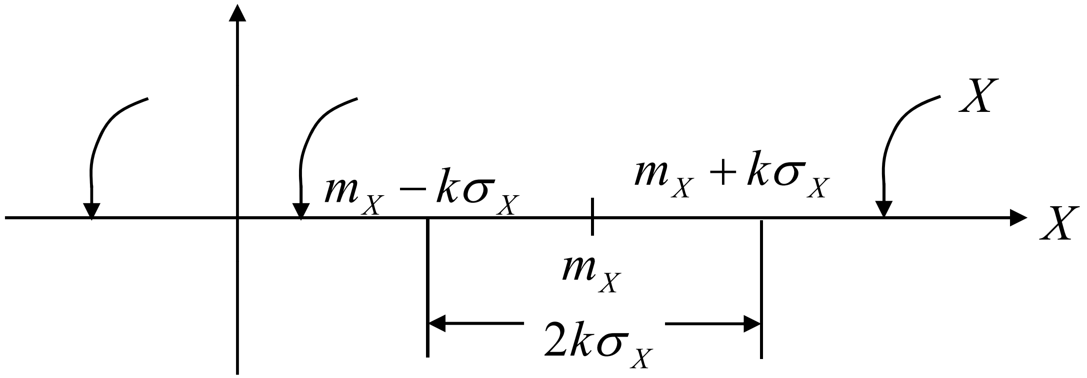
نامساوی مارکوف

- برای متغیر های تصادفی نامنفی یعنی $X \in [0\ \infty)$

$$\Pr\{ X \geq km_X \} \leq \frac{1}{k}$$

نامساوی متعارف چبی شف

$$\Pr\{|\ X - m_X \ |\geq k\sigma_X\} \leq \frac{1}{k^2}$$



نامساوی شوارتز

- $$(E[XY])^2 \leq E[X^2]E[Y^2]$$

- با استفاده از نامساوی شوارتز اثبات کنید

$$|\rho_{XY}| \leq 1$$

مفهوم تساوی دو متغیر

- تساوی در همه جا(در تمام نقاط فضای نمونه)
  - *مفهوم قوی ولی غیر عملی*

$$X \overset{e}{=} Y \quad X(\xi) = Y(\xi) \ \ \forall \xi \in \Omega$$

- تساوی ms (mean square)
  - *از نظر عملی مفیدترین مفهوم است (برای بررسی تساوی فقط به ممان ها نیاز داریم)*

$$X \overset{ms}{=} Y$$

$$E[(X - Y)^2] = 0$$

- تساوی در توزیع احتمال
  - *مفهوم ضعیف*

$$X \overset{dist}{=} Y$$

$$F_X(\alpha) = F_Y(\alpha) \ \text{شرط}$$

تابع مشخصه(characteristic function)

$$\Phi_X(\omega) = E\left(e^{jX\omega}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jx\omega} f_X(x)dx.$$

- در مورد متغیر های گسسته رابطه cf به صورت زیر ساده می شود:

$$\Phi_X(\omega) = \sum_k e^{jk\omega} P(X = k).$$

خواص تابع Cf

- $$E(X^k) = \frac{1}{j^k} \frac{\partial^k \Phi_X(\omega)}{\partial \omega^k}\bigg|_{\omega=0}, \quad k \geq 1.$$

- $$|\Phi_X(\omega)| \leq 1 = \Phi_X(0)$$

- $$\Phi_{X+Y}(\omega) = \Phi_X(\omega)\Phi_Y(\omega) \quad X \perp\!\!\!\perp Y$$

- $$f_X(x) \xleftrightarrow{FT} \Phi^*_X(\omega)$$

تابع مولد احتمال
probability generating function (pgf)

- برای متغیر های تصادفی صحیح تعریف می شود.

$$\Gamma_X(z) = E[z^X] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_X(i) z^i$$

خواص تابع pgf

- $$\left.\frac{\partial^n \Gamma_X(z)}{\partial z^n}\right|_{z=1} = E[(X)(X-1)\ldots(X-n+1)],$$

- $$|\Gamma_X(1)| = 1$$

- $$\Gamma_{X+Y}(z) = \Gamma_X(z).\Gamma_Y(z) \quad X \perp\!\!\!\perp Y$$

- $$p_X(n) \xleftrightarrow{ZT} \Gamma_X(\frac{1}{z})$$

تابع cf توأم

$$\Phi_{XY}(u,v)=E\left(e^{j(Xu+Yv)}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j(Xu+Yv)}f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

- خواص

- $\left|\Phi_{XY}(u,v)\right| \le \Phi_{XY}(0,0)=1.$

- $\Phi_{XY}(u,v)=E(e^{juX})E(e^{jvY})=\Phi_X(u)\Phi_Y(v) \quad X \perp\!\!\!\perp Y$

- $\Phi_X(u)=\Phi_{XY}(u,0), \quad \Phi_Y(v)=\Phi_{XY}(0,v).$

- $E(X^nY^m)=\dfrac{1}{j^{n+m}}\left.\dfrac{\partial^{n+m}\Phi_{XY}(u,v)}{\partial^n u\,\partial^m v}\right|_{u=0,v=0}.$

تابع pgf توأم

$$\Gamma_{XY}(z_1,z_2)=E\left(z_1^X z_2^Y\right)=\sum\sum p_{XY}(i,j)z_1^i z_2^j$$

- خواص

- $\Gamma_{XY}(1,1)=1.$

- $\Gamma_{XY}(z_1,z_2)=\Gamma_X(z_1)\Gamma_Y(z_2) \quad X \perp\!\!\!\perp Y$

- $\Gamma_X(z)=\Gamma_{XY}(z,1), \quad \Gamma_Y(z)=\Gamma_{XY}(1,z).$

- $E[X(X-1)\ldots(X-n+1)Y(Y-1)\ldots(Y-m+1)]=\left.\dfrac{\partial^{n+m}\Gamma_{XY}(z_1,z_2)}{\partial^n z_1 \partial^m z_2}\right|_{z_1=z_2=1}$

تواُم Cf , pgf

- استفاده از تابع مشخصه و تابع مولد احتمال

$$f_{XY}(x,y) \xleftrightarrow{FT} \Phi^{*}_{XY}(\omega_1,\omega_2)$$

$$p_{XY}(n,m) \xleftrightarrow{ZT} \Gamma_{XY}(z_1^{-1},z_2^{-1})$$

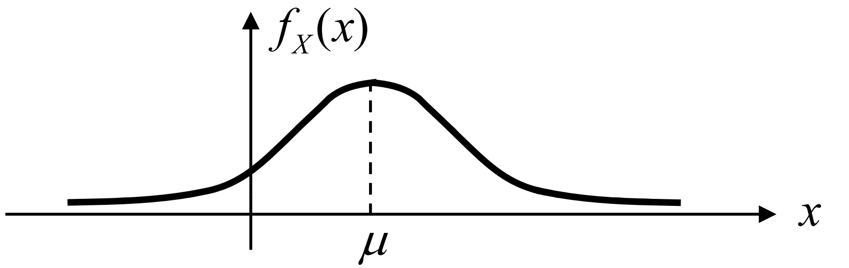
۴– آشنایی با چند متغیر تصادفی

متغیر های پیوسته

- متغیر تصادفی نرمال (گوسی) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2} dy = G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

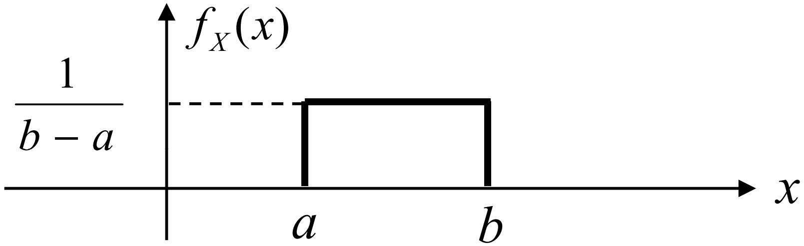


متغیر های پیوسته

- متغیر یکنواخت

$$X \sim U(a,b), \quad a<b,$$

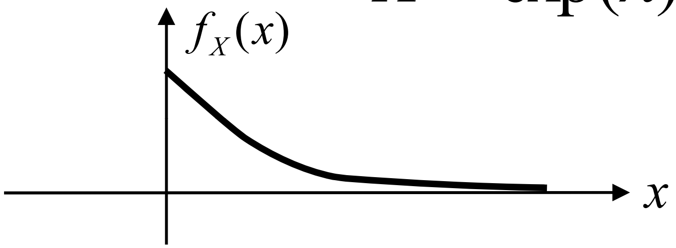
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$



- متغیر نمایی

$$X \sim \exp(\lambda)$$

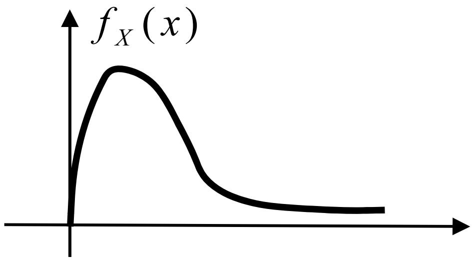
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}, & x \ge 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$



متغیر های پیوسته

- متغیر رایلی $X \sim R(\sigma^2),$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$



متغیر های تصادفی گسسته

- متغیر برنولی $X \sim B(p),$
  - متغیر تصادفی آزمایش پیروزی(1)و شکست(0)

$$P(X=0)=q, \quad P(X=1)=p.$$

$$m_X = P$$

$$\sigma_X^2 = P(1-P)$$

$$\Gamma_X(z) = E[z^X] = Pz + (1-P)$$

متغیر های تصادفی گسسته

- متغیردو جمله ای $X \sim B(n,p),$
  - تعداد رخداد پیشامد پیروزی در n آزمایش

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}, \quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

$$m_X = nP$$

$$\sigma_X^2 = nP(1-P)$$

$$\Gamma_X(z)=E[z^X]=\sum_{k=0}^{n} z^k \binom{n}{k} P^k + (1-P)^{n-k}$$

$$=[pz+(1-p)]^n$$

  - مجموع n متغیر تصادفی برنولی مستقل از هم

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

$$\Gamma_X(z)=\Gamma_{X1}(z).\Gamma_{X2}(z)\ldots\Gamma_{Xn}(z)$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\Gamma_{X_i}(z)$$

متغیر های تصادفی گسسته

- متغیر هندسی $X \sim G(p)$,
    - ➢ *تعداد آزمایش تصادفی برای رسیدن به اولین پیروزی*

$$P(X=k)=\underbrace{q.q\ldots q}_{k-1\ \text{بار}}\,p,\quad k=1,2,\cdots,\infty,\quad q=1-p.$$

$$m_X=\frac{1}{P}$$

$$\sigma_X^2=\frac{(1-P)}{P^2}$$

$$\Gamma_X(z)=\frac{Pz}{1-(1-p)z}$$

متغیر های تصادفی گسسته

- متغیر دو جمله ای منفی $X \sim NB(r,p),$
  - تعداد آزمایش تصادفی برای رسیدن به rامین پیروزی

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}, \quad k=r,r+1,\cdots.$$

  - مجموع r متغیر تصادفی هندسی

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n$$

$$\Gamma_X(z)=\Gamma_{X1}(z).\Gamma_{X2}(z)\ldots\Gamma_{Xn}(z)$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\Gamma_{X_i}(z)$$

$$m_X=\frac{r}{P}$$

$$\sigma_X^2=\frac{r(1-P)}{P^2}$$

$$\Gamma_X(z)=\frac{(Pz)^r}{(1-(1-p)z)^r}$$

متغیر های تصادفی گسسته

- متغیر تصادفی پوآسن $X \sim P(\lambda)$
  - تعداد رخداد پیروزی در بی نهایت آزمایش تصادفی وقتی $rP \to \lambda$
  - مهمترین متغیر تصادفی گسسته

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,\cdots,\infty.$$

$$m_X = \lambda$$

$$\sigma_X^2 = \lambda$$

$$\Gamma_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$$

یک توزیع احتمال دو بعدی

- تعریف: X و Y را دو متغیر تصادفی توأماً نرمال گوییم هرگاه هر ترکیب خطی دلخواه آنها یک متغیر تصادفی نرمال ایجاد کند.

$$\left.\begin{array}{l} z = aX + bY \\ \forall a,b \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow z \sim N(m_z, \sigma_z^2)$$

- با استفاده از تابع cf متغیر z می توان به pdf توأم رسید:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)},$$

$$-\infty < x < +\infty, \ -\infty < y < +\infty, \ |\rho| < 1.$$

خواص X و Y توأماً نرمال

- توزیع های کناری X وِ Y به تنهایی نرمال خواهند بود(ضریب a یا b را صفر فرض کنید)
  - *عکس این خاصیت درست نیست!!*
- توزیع های شرطی مثلاً $X|Y$ نیز نرمال خواهند بود.زیرا
  - *حاصل تقسیم دو نمایی به فرم درجه دوم*
  - *عکس این خاصیت نیزالزاماً درست نیست!!*

$$f_X(x\,|\,y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

- از نرمال بودن Y و $X|Y$ می توان توأماً نرمال بودن X و Y را نتیجه گرفت(خاصیت زنجیره ای)
- از مستقل بودن X و Y و نرمال بودن توزیع کناری آنها می توان توأماً نرمال بودن آنها را نتیجه گرفت.

ادامه

خواص X و Y توأماً نرمال

- هر ترکیب مستوی (Affine) یعنی ترکیب خطی با مقدار ثابت نیز متغیر تصادفی نرمال تولید می کند.
- از ناهمبستگی X و Y توأماً نرمال می توان استقلال آن دو را نتیجه گرفت.(اثبات به کمک cf)
    - *اگر متغیر های توأماً نرمال وابستگی خطی نداشته باشند(ناهمبسته) هیچ وابستگی دیگری نیز نخواهند داشت.*

متغیر مختلط

- متغیر مختلط Z : تابعی که به هر نقطه فضای نمونه یک عدد مختلط نسبت می دهد.

$$\Omega \xrightarrow{Z} \mathbb{C}$$

$$Z(\xi) = X(\xi) + jY(\xi)$$

- متغیر تصادفی مختلط معادل است با دو متغیر تصادفی حقیقی(از pdf توأم می توان استفاده کرد)، ولی اگر بخواهیم با مممان ها کار کنیم می توان آن دو را یعنوان یک متغیر تصادفی وارد روابط کرد.

$$\begin{aligned} m_Z &= E[Z] = E[X + jY] \\ &= E[X] + jE[Y] = m_X + jm_Y \end{aligned}$$

- با تعریف ممان دوم به صورت زیر حاصل حقیقی می شود!

$$\begin{aligned} P_Z &= E[ZZ^*] = E[|Z|^2] \\ &= E[X^2] + E[Y^2] = P_X + P_Y \end{aligned}$$