بسم الله الرحمن الرحیم

فرآیندهای تصادفی

مقدمه ای بر فرآیند های تصادفی

دکتر آقاجانی

۵- بردار تصادفی

ماتریس

- ماتریس یک مجموعه مرتب در دوبعد

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{n\times m}$$

- ماتریس قطری

$$\mathbf{A} = Diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$

- ماتریس همانی

$$\mathbf{I} = Diag(1, 1, \ldots, 1)$$

- برگردان(transpose)

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^t = [b_{ij}]_{m\times n}, \quad b_{ij} = a_{ji}$$

- هرمیشن

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^h = (\mathbf{A}^*)^t = (\mathbf{A}^t)^*$$

روابط ماتریسی

- ضرب چند ماتریس

$$(\mathbf{ABC})^{\mathbf{t}} = \mathbf{C}^{\mathbf{t}}\mathbf{B}^{\mathbf{t}}\mathbf{A}^{\mathbf{t}}$$

$$(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{ABC})^{h} = \mathbf{C}^{h}\mathbf{B}^{h}\mathbf{A}^{h}$$

- مربع اندازه

$$\|\mathbf{A}\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$$

$$= trace(\mathbf{A}^h\mathbf{A}) = trace(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{h}})$$

- رد (trace) ماتریس

$$trace(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$$

- ماتریس متقارن

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{t}}$$

- ماتریس متقارن هرمیتی

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{h}}$$

بردار

- بردار یک مجموعه مرتب یک بعد

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]^t$$

- تعامد دو بردار

$$\mathbf{a}^{\mathbf{h}}\mathbf{b} = 0 \qquad \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$

- فرم درجه دومZ(با ماتریس A)

$$\mathbf{q}_{\mathbf{A}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{j}=1}^{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} a_{\mathbf{ij}} \mathbf{z}_{\mathbf{i}} \mathbf{z}_{\mathbf{j}}$$

- فرم هرمیتی بردارZ (با ماتریس A)

$$\mathbf{h}_{\mathbf{A}}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{j}=1}^{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} a_{\mathbf{ij}} \mathbf{z}_i^{*} \mathbf{z}_{\mathbf{j}}$$

- دو رابطه معادل

$$\mathbf{q}_{\mathbf{A}}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{\mathbf{t}}\mathbf{A}\mathbf{z} = trace(\mathbf{A}\mathbf{z}\mathbf{z}^{\mathbf{t}})$$

$$\mathbf{h}_{\mathbf{A}}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{\mathbf{h}}\mathbf{A}\mathbf{z} = trace(\mathbf{A}\mathbf{z}\mathbf{z}^{\mathbf{h}})$$

مقدار ویژه

- معادله روبرو یک جواب همیشگی $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ دارد

$$\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v}$$

- جوابهای غیر صفر بردار ویژه هستند و ضرایب متناظر λ را مقدار ویژه گویند.
- اگر $\mathbf{A}$ تقارن هرمیتی داشته باشد کلیه مقادیر ویژه حقیقی هستند. و بردارهای متفاوت ویژه متعامد هستند.
- اگر $\mathbf{A}$ حقیقی باشد و متقارن بردارهای ویژه نیز حقیقی هستند.
- در حالت کلی داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = trace(\mathbf{A})$$

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(\mathbf{A})$$

چند قرارداد

$$\mathbf{a} \le \mathbf{b} \equiv \{a_1 \le b_1, a_2 \le b_2, \ldots, a_n \le b_n\}$$

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \cdot \equiv \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n} \cdot$$

$$d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

$$\frac{\partial^n}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$$

$$g(\mathbf{x}) \equiv g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

بردار تصادفی

- مجموعه ای از n متغیر تصادفی

$$\left.\begin{array}{l} \Omega \xrightarrow{X_1} \mathbb{R} \\ \Omega \xrightarrow{X_2} \mathbb{R} \\ \vdots \\ \Omega \xrightarrow{X_n} \mathbb{R} \end{array}\right\} \equiv \Omega \xrightarrow{\mathbf{X}} \mathbb{R}^n$$

- توابع احتمال برای بردارهای تصادفی

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = Pr\{\mathbf{X} \leq \mathbf{x}\}$$

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^n}{\partial \mathbf{x}} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$$

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\omega}) = E[e^{j\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{t}}\mathbf{x}}] = E[e^{j\sum_{i=1}^{n}\omega_i X_i}]$$

دو بردار تصادفی

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^t$$

$$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)^t$$

- CDF توأم

$$F_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Pr\{\mathbf{X} \le \mathbf{x}, \mathbf{Y} \le \mathbf{y}\}$$

- pdf توأم

$$f_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial^{n+m}}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} F_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

- cf توأم

$$\Phi_{\mathbf{XY}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = E[e^{j(\mathbf{u}^t\mathbf{X} + \mathbf{v}^t\mathbf{Y})}]$$

- CDF شرطی

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} \mid \mathbf{Y} \le \mathbf{y}) = \frac{F_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{F_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})}$$

- pdf شرطی

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} \mid \mathbf{Y} = \mathbf{y}) = \frac{f_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})}$$

توابع احتمال کناری بردار

- توابع کناری

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x}, \underline{\infty})$$

$$f_X(\mathbf{x}) = \int_{-\underline{\infty}}^{+\underline{\infty}} f_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

$$\Phi_X(\boldsymbol{\omega}) = \Phi_{XY}(\boldsymbol{\omega}, \underline{0})$$

- رابطه زنجیره ای

$$F_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_X(\mathbf{x}) F_Y(\mathbf{y} \mid \mathbf{x})$$

$$f_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_X(\mathbf{x}) f_Y(\mathbf{y} \mid \mathbf{x})$$

استقلال در بردار

- شرایط معادل برای استقلال دو بردار تصادفی

$$F_{XY}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = F_X(\mathbf{x})F_Y(\mathbf{y})$$

$$f_{XY}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f_X(\mathbf{x})f_Y(\mathbf{y})$$

$$\Phi_{XY}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \Phi_X(\mathbf{u})\Phi_Y(\mathbf{v})$$

- توأماً مستقل بودن ابعاد بردار تصادفی

$$F_X(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$$

$$f_X(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \qquad X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp X_3, \ldots \perp\!\!\!\perp X_n$$

$$\Phi_X(\boldsymbol{\omega}) = \prod_{i=1}^{n} \Phi_{X_i}(\omega_i)$$

نکته

- دو بردار تصادفی را می توان یک بردار تصادفی $n+m$ بعدی در نظر گرفت. یا برعکس یک بردار را می توان چند بردار با ابعاد کوچک تر در نظر گرفت.

ممانهای بردار تصادفی

- ممان اول (متوسط)

$$\mathbf{m}_X = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EX_1 \\ EX_2 \\ \vdots \\ EX_n \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = E[\mathbf{X}]$$

- ممان دوم ساده (ماتریس همبستگی)

$$R_X = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & & r_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ r_{n1} & r_{n2} & & r_{nn} \end{bmatrix} = \left[r_{ij} \right]_{n\times n} = [EX_i X_j^*]_{n\times n} = E[X_i X_j^*]_{n\times n} = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^h]$$

- ممان دوم مرکزی(ماتریس کوواریانس)

$$C_X = \begin{bmatrix} \sigma^2{}_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma^2{}_{22} & & \sigma_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & & \sigma^2{}_{nn} \end{bmatrix} = \left[\sigma_{ij} \right]_{n\times n} = [E\tilde{X}_i \tilde{X}_j^*]_{n\times n} = E[\tilde{X}_i \tilde{X}_j^*]_{n\times n} = E[\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}^h]$$

چند نکته

- اگر ابعاد بردار تصادفی <u>متعامد</u> باشند R_X قطری می شود.

$$R_X = Diag(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

- اگر ابعاد بردار تصادفی <u>ناهمبسته</u> باشند C_X قطری می شود.

$$C_X = Diag(\sigma^2{}_1, \sigma^2{}_2, \ldots, \sigma^2{}_n)$$

- برای دو بردار تصادفی $\mathbf{Y}$ و $\mathbf{X}$
  - *ماتریس همبستگی متقابل* $R_{\mathbf{XY}} = E[\mathbf{XY}^h]$
  - *ماتریس کوواریانس متقابل* $C_{\mathbf{XY}} = E[\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{Y}}^h]$
- شرط تعامد دو بردار
  - *هرگاه هر بعد یکی با هر بعد دیگری متعامد (آماری) باشند* $R_{\mathbf{XY}} = \underline{\underline{0}}$
- شرط ناهمبستگی دو بردار
  - *هرگاه هر بعد یکی با هر بعد دیگری ناهمبسته باشند* $C_{\mathbf{XY}} = \underline{\underline{0}}$

چند رابطه مهم

- ارتباط ماتریس همبستگی و کواریانس

$$R_{\mathbf{XY}} = C_{\mathbf{XY}} + \mathbf{m}_{\mathbf{X}}\mathbf{m}_{Y}^{h}$$

$$R_{\mathbf{X}} = C_{\mathbf{X}} + \mathbf{m}_{\mathbf{X}}\mathbf{m}_{X}^{h}$$

- تعامد

$$\mathbf{X} \perp \mathbf{Y} \Rightarrow R_{X+Y} = R_X + R_Y$$

- ناهمبستگی

$$\mathbf{X} \underset{\sim}{|} \mathbf{Y} \Rightarrow C_{X+Y} = C_X + C_Y$$

- تقارن هرمیتی

$$R_{XY}^{h} = R_{YX}$$

$$C_{XY}^{h} = C_{YX}$$

$$R_{X}^{h} = R_{X}$$

$$C_{X}^{h} = C_{X}$$

رابطه خطی بین ابعاد بردار تصادفی

- رابطه خطی

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n = 0$$

- بیان رابطه خطی به صورت برداری $\mathbf{v}^h = [a_1, a_2, \dots, a_n] \Rightarrow \mathbf{v}^h\mathbf{X} = 0$
  - *تعبیر هندسی: وجود رابطه خطی معادل است با وجود یک امتداد ثابت(**V**) که تمام بردارهای عددی در فضای نمونه بر آن امتداد ثابت عمود است.*

$$\mathbf{X}(\xi) \perp \mathbf{v}$$

قضیه رابطه خطی

- شرط لازم و کافی برای وجود رابطه خطی بین ابعاد بردار تصادفی، سینگولار بودن ماتریس همبستگی است($\det(R_X) = 0$) یعنی صفر بودن یکی از مقادیر ویژه ماتریس همبستگی.
  - *امتداد ثابت V نیز همان بردار ویژه متناظربا مقدار ویژه صفر است.*

- اگر قضیه فوق برای ماتریس C_X برقرار باشد یعنی رابطه خطی بین ابعاد بردار تصادفی مرکزی $\tilde{\mathbf{X}}$.

$$\mathbf{v}^{\mathbf{h}}\tilde{\mathbf{X}} = 0$$

$$\mathbf{v}^{\mathbf{h}}(\mathbf{X} - \mathbf{m}_{\mathbf{x}}) = 0$$

$$\mathbf{v}^{\mathbf{h}}\mathbf{X} = \mathbf{v}^{\mathbf{h}}\mathbf{m}_{\mathbf{x}} = a_0$$

  - *در این حالت یک رابطه خطی با مقدار ثابت (رابطه مستوی Affine) بین ابعاد خود بردار تصادفی وجود دارد.*

خواص ماتریس Rx

- دارای تقارن هرمیتی است
  - ➢ برای بردارهای تصادفی حقیقی، حقیقی و متقارن خواهد بود.
- همه مقادیر ویژه آن حقیقی هستند. بردارهای ویژه ها متعامدند.
- Rx یک ماتریس معین غیر منفی (nnd) است .
  - ➢ اگر رابطه خطی بین ابعاد بردار تصادفی نباشد معین مثبت(pd) است.
  - ➢ تمامی مقادیر ویژه غیر منفی هستند.
  - ➢ تمامی مقادیر و یژه مثبت(غیرصفر)هستند

$$\begin{cases} \forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \\ h_{R_x}(\mathbf{z}) \geq 0 \end{cases} \quad nnd$$

اگر رابطه خطی بین ابعاد بردار تصادفی نداشته باشیم

- ماتریس همبستگی به صورت روبرو قابل تجزیه است. $\mathbf{R_X} = \mathbf{LL^h}$
- تمامی خواص فوق برای ماتریس Cx نیز برقرار است $\mathbf{C_X} = \mathbf{R_{\tilde{X}}}$

توابع از بردارهای تصادفی

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^t$$

- با m تابع از یک بردار تصادفی
یک بردار m بعدی تصادفی ایجاد می شود.

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{g}_1(\mathbf{X}), g_2(\mathbf{X}), \ldots g_m(\mathbf{X}))^t$$

- برای محاسبه احتمال پیشامد بر حسب بردار Y باید احتمال متناظر بر حسب X را پیدا کرد.

$$\Pr(\mathbf{Y} \in B) = \Pr(\mathbf{X} \in g^{-1}(B)) = \int_{A = g^{-1}(B)} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$A \subset \mathbb{R}^n \qquad B \subset \mathbb{R}^n$$

- راه دیگر محاسبه CDF و pdf

$$F_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = P(\mathbf{Y}(\xi) \leq \mathbf{y})$$

روش تعیین pdf یک بردار

- هنگامی که n=m باشد از این روش استفاده می کنیم.
- روش حل

۱. حل دستگاه معادلات (nمعادله) $\underline{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} = (\mathbf{a}_1),(\mathbf{a}_2),\ldots.$

۲. جایگذاری حوابهای معادله فوق در رابطه

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \sum_i \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{|\mathbf{J}|}\Bigg|_{\mathbf{x}=(\mathbf{a}_i)}$$

۳. در رابطه فوق ماتریس ژاکوبین (J) به صورت زیر می باشد

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

سفید کردن

- تعریف: بردار سفید برداری است که متغیر های تصادفی آن دارای متوسط صفر بوده و با هم متعامد و ناهمبسته هستند.
  - *اگر واریانس ها یک باشند بردار سفید نرمالیزه می شود.*

$$\mathbf{m}_{\mathbf{X}} = \underline{0}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{X}} = \mathbf{C}_{\mathbf{X}} = Diag\,(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots \sigma_n^2)$$

- بدلیل تعامد و ناهمبسته بودن کار با این بردار ساده تر است.
- با یک تبدیل خطی (مستوی) می توان یک بردار را سفید نرمالیزه کرد.

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{m_W} = \mathbf{E[W]} = \mathbf{E[AX+b]} = \mathbf{AE[X]+b} = \mathbf{Am_X+b} = 0 \quad (I)$$

$$\mathbf{C_W} = \mathbf{E[\tilde{W}\tilde{W}^h]}$$
$$= \mathbf{E[A\tilde{X}(A\tilde{X})^h]}$$
$$= \mathbf{E[A\tilde{X}\tilde{X}^h A^h]}$$
$$= \mathbf{AE[\tilde{X}\tilde{X}^h]A^h} \qquad \mathbf{(II)}$$

$$\mathbf{\tilde{W}} = \mathbf{W - m_W} = \mathbf{AX+b-(Am_X+b)} = \mathbf{A(X-m_X)} = \mathbf{A\tilde{X}}$$

$$\begin{cases} \mathbf{b = -Am_X} \\ \mathbf{AC_XA^h = I} \Rightarrow \quad \mathbf{C_X = A^{-1}IA^{-h} = A^{-1}(A^{-1})^h} \end{cases}$$

$$\mathbf{C_X = LL}^h$$

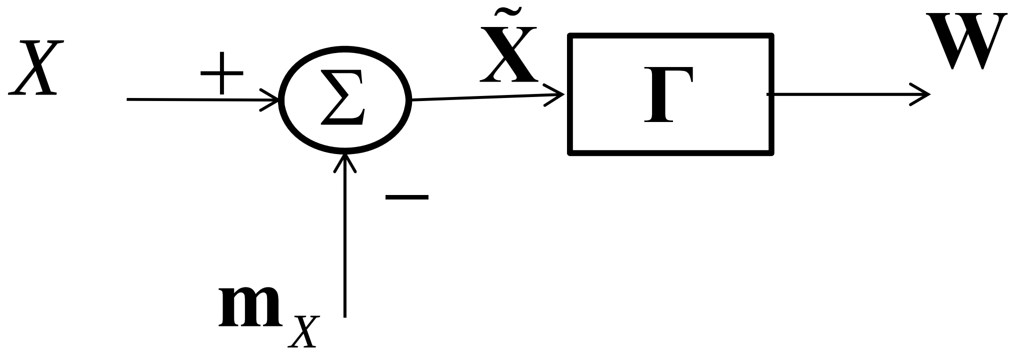
$$\mathbf{L = A^{-1}, \ \ A = L^{-1} = \Gamma}$$

- عمل سفید کردن

$$\mathbf{W = \Gamma(X - m_X)}$$

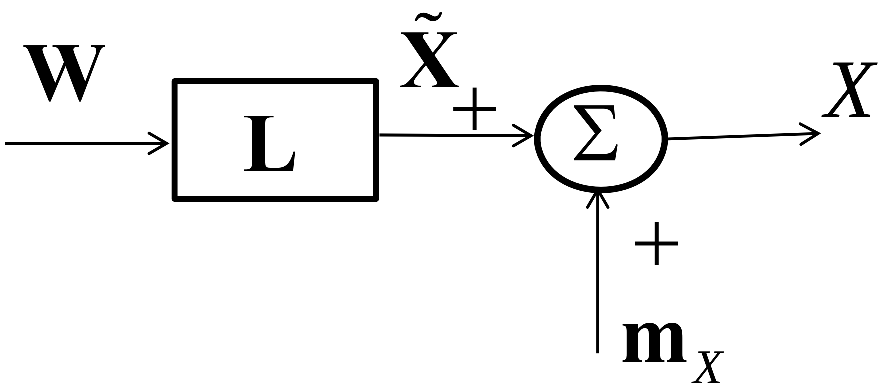
• سفید کردن

$$\mathbf{W} = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{X} - \mathbf{m_X})$$



• شبیه سازی

$$\mathbf{X} = \mathbf{L}\mathbf{W} + \mathbf{m_X}$$



نکات

- شرط سفید پذیری یک بردار تصادفی سینگولار نبودن ماتریس L یا در واقع ماتریس Cx است.
  - *صفر بودن دترمینان ماتریس کوواریانس یعنی وجود رابطه خطی بین متغیرهای تصادفی بردار*
- در بین جوابهای تجزیه $\mathbf{C_X = LL^h}$ جواب پایین مثلثی (جواب علی) از همه مناسب تر است.

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \dots & \ell_{nn} \end{bmatrix}\mathbf{W}+\mathbf{m_X} \Rightarrow \begin{cases} X_1=\ell_{11}W_1+m_1 \\ X_2=\ell_{21}W_1+\ell_{22}W_2+m_2 \\ X_3=\ell_{31}W_1+\ell_{32}W_2+\ell_{33}W_3+m_3 \\ \vdots \end{cases}$$

بردار نرمال(توزیع n بعدی)

- بردار تصادفی X را بردار نرمال گوییم هرگاه هر ترکیب خطی از متغیر های این بردار یک متغیر نرمال ایجاد کند.

$$\left.\begin{array}{c} Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \\ \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \Rightarrow Z \sim N(m_z, \sigma_Z^2)$$

- هر ترکیب مستوی از بردار نرمال یک متغیر نرمال تولید می کند.

- هرتبدیل خطی از بردار تصادفی نرمال نیز یک بردار نرمال خواهد بود.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$$

- Cf بردار نرمال

$$\Phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\omega}) = e^{j\mathbf{m}_{\mathbf{X}}^{\mathbf{t}}\boldsymbol{\omega}} . e^{-\frac{1}{2} q_{\mathbf{C_X}}(\boldsymbol{\omega})}$$

بردار نرمال سفید نرمالیزه

- Cf بردار نرمال سفید نرمالیزه

$$\Phi_W(\boldsymbol{\omega}) = e^{j\mathbf{m}_\mathbf{w}^\mathbf{t}\boldsymbol{\omega}} . e^{-\frac{1}{2}q_{\mathbf{C_w}}(\boldsymbol{\omega})}$$

$$= 1 . e^{-\frac{1}{2}q_{\mathbf{C_w}}(\boldsymbol{\omega})}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left(e^{-\frac{1}{2}\omega_i^2}\right)$$

خواص بردار تصادفی نرمال

- هر ترکیب مستوی ابعاد بردار تولید متغیر نرمال می کند.
- هر بردار از تبدیل خطی بردار نرمال نیز بردار نرمال است.
- هر زیر مجموعه ای از ابعاد بردار نرمال(توزیع های کناری) نیز نرمال هستند.
- توزیع های شرطی بردار نرمال نیز نرمال است.
- از ناهمبستگی ابعاد بردار نرمال می توان مستقل بودن ابعاد را نتیجه گرفت.
- کلیه خصوصیات آماری بردار نرمال توسط ممان های اول و دوم به دست می آیند.

$$\mathbf{X} \sim \mathbf{N}(\mathbf{m}_\mathbf{X}, \mathbf{C}_\mathbf{X})$$

- برای چهار متغیر نرمال می توان ثابت کرد:

$$E[X_1X_2X_3X_4] = E[X_1X_2]E[X_3X_4] + E[X_1X_3]E[X_2X_4] + E[X_1X_4]E[X_3X_2] - 2E[X_1]E[X_2]E[X_3]E[X_4]$$